Cálculo Básico

con aplicación a la ciencia de la vida

Haeussler • Paul • Wood • Sears • Zemansky

Pearson

Cálculo Básico

con aplicación a la ciencia de la vida

Pearson

Argentina • Bolivia • Brasil • Chile • Colombia • Costa Rica
Ecuador • España • Guatemala • México • Panamá • Perú
Puerto Rico • República Dominicana • Uruguay • Venezuela

ÍNDICE

APLICACIONES
Y MÁS ÁLGEBRA

1

En este capítulo se aplicarán las ecuaciones a diferentes situaciones cotidianas. Después se hará lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en las que una cantidad es menor que ($<$), mayor que ($>$), menor o igual que ($\leq$) o mayor o igual que ($\geq$) alguna otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades es la regulación de equipamiento deportivo. En un juego típico de las ligas mayores de béisbol estadounidenses, se utilizan algunas docenas de pelotas de béisbol y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente $5\frac{1}{8}$ onzas. Pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de $5\frac{1}{4}$ onzas, tal como se lee en el punto 1.09 de las Reglas Oficiales de Béisbol de las Grandes Ligas. (Vea `http://mlb.mlb.com` y busque “reglas oficiales”). Observe que *no menos de* es un sinónimo de *mayor o igual que*, mientras que *no más de* es un sinónimo de *menor o igual que*. Al traducir los enunciados verbales a matemáticas, se procura evitar las palabras negativas como primer paso. De cualquier forma, se tiene

$$\text{peso de la pelota} \geq 5 \text{ onzas} \quad \text{y} \quad \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

lo cual puede combinarse para obtener

$$5 \text{ onzas} \leq \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

que se lee de manera más sencilla diciendo que la pelota debe pesar entre 5 y $5\frac{1}{4}$ onzas (donde este *entre* incluye los valores extremos).

Otra desigualdad se aplica en el caso de los veleros utilizados en las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años. La America’s Cup Class (ACC) para los yates se definió hasta el 30 de enero de 2009 como:

$$\frac{L + 1.25\sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.686} \leq 24.000\,\text{m}$$

El símbolo “$\leq$” significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho. L, S y DSP también se especifican mediante complicadas fórmulas, pero, aproximadamente, L es la longitud, S es el área de las velas y DSP es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula de la ACC proporciona a los diseñadores de yates un poco de flexibilidad. Suponga que un yate tiene $L = 20.2$ m, $S = 282$ m^2 y $DSP = 16.4$ m^3. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área de las velas mientras deja sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, los valores típicos de L, S y DSP se utilizan de modo que la expresión del lado izquierdo quede tan cercana como sea posible a 24 metros.

Además de analizar aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto y se introducirán sucesiones y la notación de suma.

Objetivo

Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.

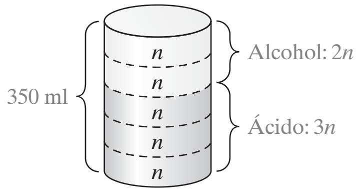


FIGURA 1.1 Solución química (ejemplo 1).

ADVERTENCIA

Observe que la solución a una ecuación no es necesariamente la solución al problema dado.

1.1 Aplicaciones de ecuaciones

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, las relaciones establecidas en los problemas deben traducirse a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado*. Los ejemplos siguientes ilustran técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de manera cuidadosa antes de pasar a los problemas.

EJEMPLO 1 Mezcla

Un químico debe preparar 350 ml de una solución compuesta por dos partes de alcohol y tres partes de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada líquido?

Solución: Sea n el número de mililitros de cada líquido. En la figura 1.1 se muestra la situación. A partir del diagrama se tiene

$$2n + 3n = 350$$

$$5n = 350$$

$$n = \frac{350}{5} = 70$$

Pero $n = 70$ *no* es la respuesta al problema original; sino que cada *parte* tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es $2n = 2(70) = 140$ y la cantidad de ácido es $3n = 3(70) = 210$. Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo puede ser útil un diagrama para plantear un problema por escrito.

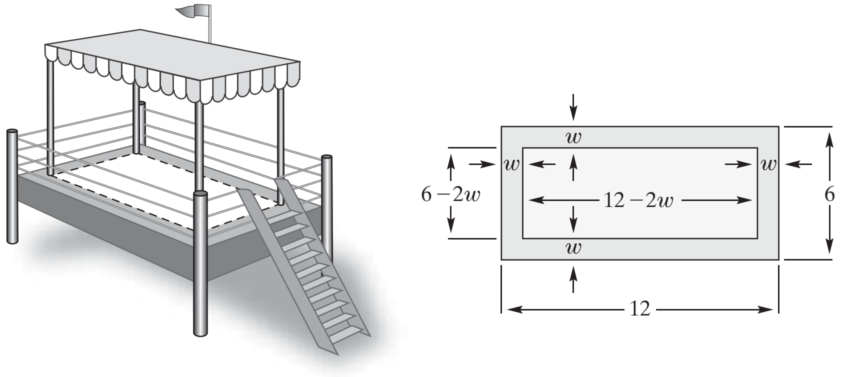
Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 2 Plataforma de observación

Se construirá una plataforma rectangular de observación con vista a un pintoresco valle [vea la figura 1.2(a)]. Las dimensiones de la plataforma serán de 6 por 12 m. Un cobertizo rectangular de 40 m^2 de área estará en el centro de la plataforma. La parte no cubierta de la plataforma será un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?

Solución: En la figura 1.2(b) se muestra un diagrama de la plataforma. Sea w el ancho (en metros) del pasillo. Por lo tanto, la parte de la plataforma destinada al cobertizo tendrá dimensiones de $12 - 2w$ por $6 - 2w$. Como su área debe ser de 40 m^2, donde área = (largo)(ancho), se tiene

$$\begin{aligned}
(12 - 2w)(6 - 2w) &= 40 \\
72 - 36w + 4w^2 &= 40 && \text{multiplicando} \\
4w^2 - 36w + 32 &= 0 \\
w^2 - 9w + 8 &= 0 && \text{dividiendo ambos lados entre 4} \\
(w - 8)(w - 1) &= 0 \\
w &= 8,\ 1
\end{aligned}$$



(a) (b)

FIGURA 1.2 Pasillo en la plataforma (ejemplo 2).

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es una solución para el problema puesto que una de las dimensiones de la plataforma es de solo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Las palabras clave introducidas aquí son *costo fijo*, *costo variable*, *costo total*, *ingreso total* y *utilidad*. Este es el momento de familiarizarse con dichos términos porque se utilizarán a lo largo del libro.

En el ejemplo siguiente se hace referencia a algunos términos de negocios relativos a una compañía manufacturera. **Costo fijo** es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que la compañía produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como mano de obra y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

Utilidad es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

EJEMPLO 3 Utilidad

La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 (dólares estadounidenses) y el costo fijo de \$80 000. Cada unidad tiene un precio de venta de \$10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de \$60 000.

Solución: Sea q el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de administración de negocios, q representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es $6q$. Por lo tanto, el *costo total* será $6q + 80\ 000$. El ingreso total por la venta de q unidades es $10q$. Como

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

el modelo para este problema es

$$60\ 000 = 10q - (6q + 80\ 000)$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} 60\ 000 &= 10q - 6q - 80\ 000 \\ 4q &= 140\ 000 \\ q &= 35\ 000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, deben venderse 35 000 unidades para obtener una ganancia de \$60 000.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 4 Fijación de precios

Sportcraft produce ropa de mezclilla y está planeando vender su nueva línea de pantalones a minoristas. El costo al por menor será de \$60 por un par de pantalones. Por conveniencia del minorista, Sportcraft colocará una etiqueta con el precio en cada par. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el minorista pueda reducir este precio en 20% durante una venta y aún así obtener una ganancia de 15% sobre el costo?

Solución: Aquí se usa el hecho de que

Observe que precio = costo + utilidad.

$$\text{precio de venta} = \text{costo por par} + \text{utilidad por par}$$

Sea p el precio por par marcado en la etiqueta. Durante la venta, el minorista realmente recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 60, más la utilidad, (0.15)(60). Por ende,

$$\begin{aligned} \text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\ p - 0.2p &= 60 + (0.15)(60) \\ 0.8p &= 69 \\ p &= 86.25 \end{aligned}$$

Sportcraft debe marcar las etiquetas con un precio de \$86.25.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

EJEMPLO 5 Inversión

Un total de \$10 000 se invirtieron en acciones de dos compañías, A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de 6 y $5\frac{3}{4}$%, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa si la utilidad total sumó \$588.75?

Solución: Sea x la cantidad invertida al 6%. Entonces, $10\,000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés ganado en A fue de $(0.06)(x)$ y en B $(0.0575)(10\,000 - x)$, que en total asciende a \$588.75. De ahí que,

$$\begin{aligned} (0.06)x + (0.0575)(10\,000 - x) &= 588.75 \\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75 \\ 0.0025x &= 13.75 \\ x &= 5500 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se invirtieron \$5500 al 6% y \$10 000 − \$5500 = \$4500 se invirtieron al $5\frac{3}{4}$ por ciento.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 6 Amortización de un bono

La mesa directiva de Maven Corporation acuerda amortizar algunos de sus bonos en dos años. En ese tiempo, se requerirán \$1 102 500. Supongamos que en este momento reservan \$1 000 000. ¿A qué tasa de interés anual, compuesto anualmente, debe tener invertido este dinero con el fin de que su valor futuro sea suficiente para amortizar los bonos?

Solución: Sea r la tasa de interés anual requerida. Al final del primer año, la cantidad acumulada será \$1 000 000 más el interés, $1\,000\,000r$, para lograr un total de

$$1\,000\,000 + 1\,000\,000r = 1\,000\,000(1 + r)$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será $1\,000\,000(1 + r)$ más el interés de esto, que es $1\,000\,000(1 + r)r$. Así, el valor total cuando finalice el segundo año será de

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r$$

Esto debe ser igual a \$1 102 500:

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r = 1\,102\,500 \tag{1}$$

Como $1\,000\,000(1 + r)$ es un factor común de ambos términos del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned} 1\,000\,000(1 + r)(1 + r) &= 1\,102\,500 \\ 1\,000\,000(1 + r)^2 &= 1\,102\,500 \\ (1 + r)^2 &= \frac{1\,102\,500}{1\,000\,000} = \frac{11\,025}{10\,000} = \frac{441}{400} \\ 1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20} \\ r &= -1 \pm \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Así, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la ecuación (1), se rechaza -2.05 porque es necesario que r sea positiva. Por lo que $r = 0.05$, de modo que la tasa buscada es de 5 por ciento.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

A veces puede haber más de una manera de modelar un problema por escrito, como lo muestra el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Renta de un departamento

Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Parklane, el cual consiste en 96 departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en \$550 mensuales. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir \$54 600 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?

Solución:

Método I. Supongamos que r es la renta que se cobrará por cada departamento. Entonces el aumento sobre el nivel de \$550 es $r - 550$. Así, el número de aumentos de \$25 es $\frac{r-550}{25}$. Como cada \$25 de aumento causa que tres departamentos queden sin rentar, el número total de departamentos sin rentar será $3\left(\frac{r-550}{25}\right)$. De modo que el número total de departamentos rentados será $96 - 3\left(\frac{r-550}{25}\right)$. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados)

se tiene

$$\begin{aligned} 54\,600 &= r\left(96 - \frac{3(r-550)}{25}\right) \\ 54\,600 &= r\left(\frac{2400 - 3r + 1650}{25}\right) \\ 54\,600 &= r\left(\frac{4050 - 3r}{25}\right) \\ 1\,365\,000 &= r(4050 - 3r) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1\,365\,000 = 0$$

Mediante la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} r &= \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1\,365\,000)}}{2(3)} \\ &= \frac{4050 \pm \sqrt{22\,500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25 \end{aligned}$$

Así que la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

Método II. Supongamos que n es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será $25n$ y habrá $3n$ departamentos por rentar. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados)

se tiene

$$\begin{aligned} 54\,600 &= (550 + 25n)(96 - 3n) \\ 54\,600 &= 52\,800 + 750n - 75n^2 \\ 75n^2 - 750n + 1800 &= 0 \\ n^2 - 10n + 24 &= 0 \\ (n-6)(n-4) &= 0 \end{aligned}$$

Así, $n = 6$ o $n = 4$. La renta que debe cobrarse es $550 + 25(6) = \$700$ o bien $550 + 25(4) = \$650$. Sin embargo, es fácil ver que la compañía de bienes raíces puede recibir \$54 675 de rentas mensuales al cobrar \$675 por cada departamento y que \$54 675 es la cantidad *máxima* de rentas que puede recibir dadas las condiciones presentes del mercado. En cierto sentido, la compañía formuló la pregunta equivocada. Gran parte del trabajo de este libro se centrará en estudiar cómo formular una mejor pregunta que la que hizo esta compañía.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

PROBLEMAS 1.1

1. Cercado Una cerca de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^2 y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?

2. Geometría El perímetro de un rectángulo es de 300 pies y su largo es 3 pies más que dos veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.

3. Oruga lagarta Uno de los insectos defoliadores más dañinos es la oruga lagarta, la cual se alimenta de plantas de sombra, de bosque y de árboles frutales. Una persona vive en un área en la que la oruga se ha convertido en un problema. Esta persona desea rociar los árboles de su propiedad antes de que ocurra mayor defoliación. Necesita 145 onzas de una solución compuesta por 4 partes de insecticida A y 5 partes de insecticida B. Después de preparada la solución, se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?

4. Mezcla de concreto Un constructor fabrica cierto tipo de concreto al mezclar 1 parte de cemento *portland* (hecho de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies^3 de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?

5. Acabado de muebles De acuerdo con *The Consumer's Handbook* [Paul Fargis, ed. (Nueva York: Hawthorn, 1974)], un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene dos partes de aceite de linaza y una parte de aguarrás. Si debe prepararse una pinta (16 onzas líquidas) de este aceite, ¿cuántas onzas líquidas de aguarrás se necesitan?

6. Administración de bosques Una compañía maderera posee un bosque que tiene forma rectangular de 1 por 2 mi. Si la compañía corta una franja uniforme de árboles a lo largo de los bordes exteriores de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja para conservar $\frac{3}{4}$ de millas cuadradas de bosque?

7. Vereda de jardín Un terreno cuadrado de 10 m por lado va a tener en el centro un jardín circular de 60 m^2 para plantar flores. Se decide poner una vereda de manera que los dueños del terreno puedan caminar alrededor del jardín de flores. ¿Cuál es el "ancho" mínimo de la superficie de la vereda? En otras palabras, ¿cuál es la menor distancia desde el jardín de flores hasta la orilla del terreno?

8. Conducto de ventilación El diámetro de un conducto de ventilación es de 140 mm. Este conducto está unido a un conducto cuadrado como se muestra en la figura 1.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Redondeando al milímetro más cercano, ¿cuál debe ser la longitud x de un lado de la sección cuadrada?

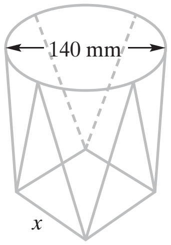


FIGURA 1.3 Conducto de ventilación (problema 8).

9. Utilidad Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado con un costo variable de \$82 por tonelada. Si los costos fijos son de \$120 000 al mes y el alimento se vende en \$134 la tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse al mes para que la compañía obtenga una utilidad mensual de \$560 000?

10. Ventas La administración de la compañía Smith quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de \$150 000. Se cuenta con los siguientes datos: precio unitario de venta, \$50; costo variable por unidad, \$25; costo fijo total, \$500 000. A partir de estos datos determine las unidades que deben venderse.

11. Inversión Una persona desea invertir \$20 000 en dos empresas de modo que el ingreso total por año sea de \$1440. Una empresa paga 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga $7\frac{1}{2}\%$ anual. ¿Cuánto debe invertirse en cada empresa?

12. Inversión Cierta persona invirtió \$120 000, una parte a una tasa de interés de 4% anual y el resto al 5% anual. El interés total al cabo de un año fue equivalente a una tasa de $4\frac{1}{2}\%$ anual sobre el total inicial de \$120 000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

13. Fijación de precios El costo de un producto al menudeo es de \$3.40. Si el minorista desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe vender el producto?

14. Retiro de bonos En tres años, una compañía requerirá de \$1 125 800 con el fin de retirar algunos bonos. Si ahora invierte \$1 000 000 para este propósito, ¿cuál debe ser la tasa de interés, compuesta anualmente, que debe recibir sobre este capital para poder retirar los bonos?

15. Programa de expansión En dos años, una compañía iniciará un programa de expansión. Ha decidido invertir \$3 000 000 ahora de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de \$3 245 000, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?

16. Negocios Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será de $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$1200, encuentre los valores de q para los que

$$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

(Es decir, la utilidad es igual a cero).

17. Sobreventa de asientos Un avión de pasajeros tiene 81 asientos. En promedio, 90% de las personas que reservan un vuelo viajan en él. ¿Cuántos asientos debe reservar la aerolínea para ocupar el avión en su totalidad?

18. Encuestas Un grupo de personas fue encuestado y el 20%, o 700, favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

19. Salario de una guardia de prisión Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las guardias era 30% menor (\$200 menos) por mes que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un guardia masculino. Redondee su respuesta a la unidad más cercana.

20. Huelga de conductores Hace pocos años en Estados Unidos, los transportistas de cemento estuvieron en huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían \$7.50 por hora y trabajaban 260 días, 8 horas por jornada, durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para compensar la pérdida de esos 46 días en un año?

21. Punto de equilibrio Un fabricante de cartuchos para juegos de video vende cada cartucho en \$21.95. El costo de fabricación de cada cartucho es de \$14.92. Los costos fijos mensuales son de \$8500. Durante el primer mes de ventas de un nuevo juego, ¿cuántos cartuchos debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total sea igual al costo total)?

22. Club de inversión Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por \$5000. El bono da un rendimiento de 4% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para molinos de viento. El precio de cada acción es de \$20 y se gana un dividendo de \$0.50 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club de modo que de su inversión total en acciones y bonos obtenga el 3% anual?

23. Cuidado de la vista Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros \$35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales de ese tipo, hasta cubrir un *total* máximo de \$100. Para un empleado, determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa.

24. Control de calidad Durante cierto periodo, el fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras fueron rechazadas por imperfecciones.

(a) Si en un año se fabrican c barras de dulce, ¿cuántas esperaría rechazar el fabricante?

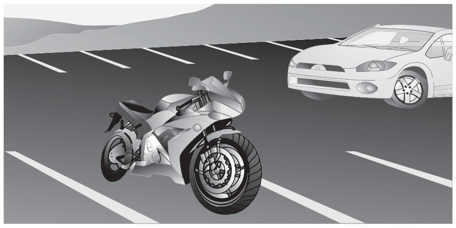
(b) Este año, se proyecta que el consumo anual del dulce será de 600 millones de barras. Aproximadamente, ¿cuántas barras tendrá que producir el fabricante si toma en cuenta las rechazadas?

25. Negocios Suponga que los clientes comprarán q unidades de un producto cuando el precio sea de $(80 - q)/4$ dólares *cada uno.* ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso por ventas sea de \$400?

26. Inversión ¿En cuánto tiempo se duplicará una inversión a interés simple con una tasa del 4.5% anual? [*Sugerencia:* exprese el 4.5% como 0.045].

27. Alternativas en los negocios La banda de música Mongeese trató de vender su canción Kobra Klub a una pequeña marca, Epsilon Records, a un pago único de \$50 000. Luego de estimar que las posibles ventas futuras después de un año de Kobra Klub son inexistentes, la gerencia de Epsilon revisa una propuesta alternativa para darle a Mongeese un pago único de \$5000 más una regalía de \$0.50 por cada disco vendido. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para que esta alternativa sea tan económicamente atractiva para la banda como su propuesta original? [*Sugerencia*: Determine en qué momento el ingreso es el mismo bajo ambas propuestas].

28. Estacionamiento Un estacionamiento es de 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y en uno de los lados. Encuentre el ancho de cada franja.



29. Rentas Usted es el asesor financiero en jefe de una compañía que posee un complejo con 50 oficinas. Cada oficina puede rentarse en \$400 mensuales. Sin embargo, por cada incremento de \$20 mensuales se quedarán dos vacantes sin posibilidad de ser ocupadas. La compañía quiere obtener un total de \$20 240 mensuales por concepto de rentas en el complejo. Se le pide a usted determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

30. Inversión Hace seis meses, una compañía de inversiones tenía un portafolio de \$3 100 000 que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó en $\frac{1}{10}$, mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó en $\frac{1}{10}$. El valor actual del portafolio suma \$3 240 000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

31. Ingreso El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de \$10 000 si el precio debe ser mayor de \$50?

32. Razón precio-utilidad La *razón precio-utilidad* (P/U) de una compañía es la razón que se obtiene de dividir el valor de mercado de una acción común en circulación entre las utilidades por acción. Si P/U se incrementa en 15% y los ingresos por acción disminuyen 20%, determine el cambio porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

33. Equilibrio de mercado Cuando el precio de un producto es p por cada unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 10$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $200 - 3p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Encuentre ese valor de p.

34. Equilibrio de mercado Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: A un precio de p por unidad, la oferta es $2p^2 - 3p$ y la demanda es $20 - p^2$.

35. Cerca de seguridad Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11 200 pies^2 en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres lados por la cerca (vea la figura 1.4). Si se van a utilizar 300 pies de cerca, ¿cuáles serán las dimensiones del área rectangular?

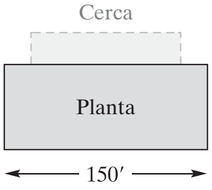


FIGURA 1.4 Cerca de seguridad (problema 35).

36. Diseño de empaque Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado a 2 pulg desde cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (vea la figura 1.5). La caja debe contener 50 pulg^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio que debe usarse?

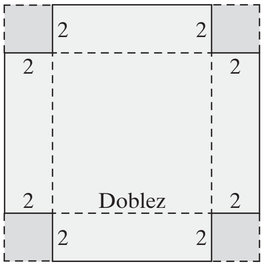


FIGURA 1.5 Construcción de una caja (problema 36).

37. Diseño de producto Una compañía de dulces fabrica la popular barra Henney's, cuyo principal ingrediente es chocolate. La barra de forma rectangular tiene 10 centímetros (cm) de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (vea la figura 1.6). El precio del chocolate como materia prima ha *disminuido* en 60% y la compañía ha decidido premiar a sus clientes leales con un aumento del 50% en el volumen de la barra. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se incrementarán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva barra?

FIGURA 1.6 Barra de dulce (problema 37).

38. Diseño de producto Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio); vea la figura 1.7.

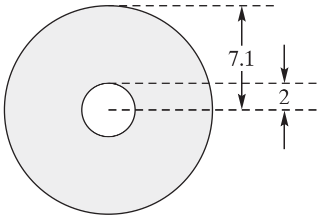


FIGURA 1.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

Debido a un incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen del dulce en 22%. Para hacerlo, se conservarán el grosor y el radio exterior, pero el radio interno se hará mayor. En la actualidad, el grosor es de 2.1 milímetros (mm), el radio interno es de 2 mm y el radio exterior mide 7.1 mm. Encuentre el radio interno del dulce con el nuevo estilo. [*Sugerencia*: El volumen V de un disco sólido es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h el grosor del disco].

39. Saldo compensatorio Un *saldo compensatorio* se refiere a la práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito mantener en depósito cierta parte de un préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una compañía obtiene un préstamo de \$100 000, el cual requiere un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar \$20 000 en depósito y usar solo \$80 000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, la Barber Die Company debe pedir prestados \$195 000. El Third National Bank, con el que no ha tenido tratos previos, requiere un saldo compensatorio del 16%. Aproximando a la unidad de millar más cercana, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios? Ahora resuelva el problema general de determinar la cantidad L de un préstamo que se necesita para manejar gastos de tamaño E si el banco requiere un saldo compensatorio de p por ciento.

40. Plan de incentivos Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. Por cada máquina que venda un agente, la comisión es de \$40. La comisión por *todas* las máquinas vendidas se incrementa en \$0.04 por máquina siempre y cuando se vendan más de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de las 602 máquinas vendidas será de \$40.08. ¿Cuántas máquinas tiene que vender un agente para obtener ingresos por \$30 800?

41. Bienes raíces Una compañía fraccionadora compra una parcela en \$7200. Después de vender todo, excepto 20 acres, con una ganancia de \$30 por acre sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántos acres se vendieron?

42. Margen de utilidad El *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta compañía aumentó en 0.02 con respecto al año pasado. El año pasado vendió su producto en \$3.00 cada uno y tuvo un ingreso neto de \$4500. Este año incrementó el precio de su producto en \$0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de \$7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántos de sus productos vendió la compañía el año pasado y cuántos vendió este año?

43. Negocios Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de producir cada unidad tipo A es \$2 más que el de B. Los costos de producción de A y B son \$1500 y \$1000, respectivamente, y se hacen 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

Objetivo

Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

1.2 Desigualdades lineales

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, puede ser que a y b coincidan, que a se encuentre a la izquierda de b o que a se encuentre a la derecha de b (vea la figura 1.8).

Si a y b coinciden, entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$, donde el *símbolo de desigualdad* "<" se lee "es menor que". Por otro lado, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y se escribe $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "≤", se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y solo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "≥" está definido como: $a \geq b$ si y solo si $a > b$ o $a = b$. En este caso, se dice que a es mayor o igual que b.

Con frecuencia, las expresiones *números reales* y *puntos* se utilizan de manera intercambiable, puesto que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, puede hablarse de los puntos $-5, -2, 0, 7$ y 9 y escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$. (Vea la figura 1.9). Resulta claro que si $a > 0$, entonces a es positiva; si $a < 0$, entonces a es negativa.

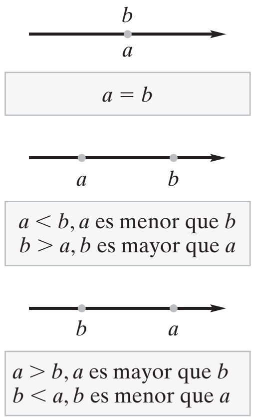


FIGURA 1.8 Posiciones relativas de dos puntos.

FIGURA 1.9 Puntos sobre la recta numérica.

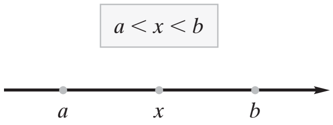


FIGURA 1.10 $a < x$ y $x < b$.

Suponga que $a < b$ y x está entre a y b. (Vea la figura 1.10). Entonces no solo $a < x$, sino que también $x < b$. Esto se indica escribiendo $a < x < b$. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$. (Vea de nuevo la figura 1.9).

Definición

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que una cantidad es menor que, mayor que, menor o igual que o mayor o igual que otra cantidad.

Por supuesto, las desigualdades se representan por medio de símbolos de desigualdad. Si dos desigualdades tienen sus símbolos apuntando en la misma dirección, entonces se dice que tienen el *mismo sentido*; si no, se dice que tienen *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por lo tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene el sentido contrario de $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es verdadera. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que se establecen a continuación.

Reglas para las desigualdades

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{Si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \textbf{ y } a - c < b - c.$$

Tenga en mente que las reglas también se aplican para ≤, > y ≥.

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***positivo***, la desigualdad resultante va a tener el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

ADVERTENCIA!

Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo, se obtiene una desigualdad con sentido opuesto.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo***, entonces la desigualdad resultante va a tener el sentido contrario al de la original. En forma simbólica,

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0, \text{ entonces } a(c) > b(c) \text{ y } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ y $-2 < 0$, entonces $4(-2) > 7(-2)$ y $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente. En forma simbólica,

$$\text{Si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos y se toma el recíproco de cada lado, entonces resulta otra desigualdad con sentido contrario al de la original. De manera simbólica,

$$\text{Si } 0 < a < b \text{ o bien } a < b < 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Por ejemplo, $2 < 4$, entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ y $-4 < -2$, por ende $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$.

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se eleva cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. De manera simbólica,

$$\text{Si } 0 < a < b \text{ y } n > 0, \text{ entonces } a^n < b^n.$$

Para el entero positivo n, esta regla también establece,

$$\text{Si } 0 < a < b, \text{ entonces } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Por ejemplo, $4 < 9$, de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

Se dice que un par de desigualdades es *equivalente* si tienen exactamente las *mismas soluciones*. Es fácil mostrar que cuando se aplica cualquiera de las reglas de la 1 a la 6 a una desigualdad, el resultado es una desigualdad equivalente.

Al expandirse a la terminología, resulta que un número a es *positivo* si $0 < a$ y *negativo* si $a < 0$. Con frecuencia resulta útil decir que a *no* es *negativo* si $0 \leq a$. (También se podría decir que a *no* es *positivo* si $a \leq 0$, pero esta terminología no se utiliza con frecuencia).

Observe a partir de la regla 1 que $a \leq b$ es equivalente a "$b - a$ no es negativo". Otra observación simple es que $a \leq b$ es equivalente a "existe un número s no negativo de modo que $a + s = b$". La s que hace el trabajo es justo $b - a$, pero la idea resulta útil cuando un lado de $a \leq b$ contiene una incógnita.

Esta idea permite reemplazar una desigualdad con una igualdad —a expensas de introducir una variable—. En el capítulo 7, el poderoso método simplex construye reemplazos de desigualdades $a \leq b$ con ecuaciones $a + s = b$ para s no negativa. En este contexto, s es conocida como la *variable de holgura* porque toma la "holgura" que hay entre a y b.

Ahora se aplicarán las reglas de la 1 a la 4 para una *desigualdad lineal*.

La definición también se aplica a $\leq$, $>$ y $\geq$.

Definición

Una ***desigualdad lineal*** en la variable x es una desigualdad que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Debe esperarse que la desigualdad sea verdadera para algunos valores de x y falsa para otros. Para ***resolver*** una desigualdad que involucra una variable deben encontrarse todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es verdadera.

APLÍQUELO ▶

1. Un vendedor tiene un ingreso mensual dado por $I = 200 + 0.8S$, donde S es el número de productos vendidos en un mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 al mes?

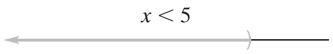


FIGURA 1.11 Todos los números reales menores que 5.

APLÍQUELO ▶

2. El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro diferentes comidas para animal con distintos valores nutrimentales para los animales de pastoreo del zoológico. Sea x_1 el número de bolsas de comida 1, x_2 el número de bolsas de comida 2, y así sucesivamente. La cantidad necesaria de bolsas de cada comida puede describirse mediante las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = 150 - x_4$$

$$x_2 = 3x_4 - 210$$

$$x_3 = x_4 + 60$$

A partir de estas ecuaciones, escriba cuatro desigualdades que involucren a x_4; para ello, suponga que ninguna variable puede ser negativa.

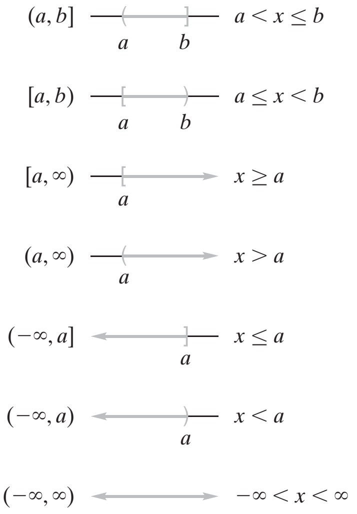


FIGURA 1.13 Intervalos.

ADVERTENCIA!

Al dividir ambos lados entre -2 se invierte el sentido de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $2(x - 3) < 4$.

Solución:

Estrategia Es necesario reemplazar la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned} 2(x-3) &< 4 && \\ 2x - 6 &< 4 && \text{Regla 4} \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 && \text{Regla 1} \\ 2x &< 10 && \text{Regla 4} \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} && \text{Regla 2} \\ x &< 5 && \text{Regla 4} \end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. Por lo tanto, la desigualdad original es verdadera para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Por ejemplo, la desigualdad es verdadera para $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$ y 4.9. La solución puede escribirse simplemente como $x < 5$ y representarla de manera geométrica por medio de una semirrecta en la figura 1.11. El paréntesis indica que 5 *no está incluido* en la solución.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

En el ejemplo 1, la solución consistió en un conjunto de números, a saber, todos números reales menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las x tales que $x < 5$ puede indicarse mediante la *notación de intervalo* $(-\infty, 5)$. El símbolo $-\infty$ no es un número, sino solo una convención para indicar que el intervalo incluye todos los números menores a 5.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b$ se conoce como **intervalo cerrado** e incluye a los números a y b, los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota mediante $[a, b]$ y se muestra en la figura 1.12(a). Los corchetes indican que a y b *están incluidos* en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las x para las que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** y se denota por (a, b). Los extremos *no están incluidos* en este conjunto. [Vea la figura 1.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, se tienen los intervalos mostrados en la figura 1.13. Así como $-\infty$ no es un número, tampoco lo es ∞, pero (a, ∞) es una notación conveniente para el conjunto de todos los números reales x para los cuales $a < x$. De modo similar, $[a, \infty)$ denota todos los números x reales para los cuales $a \leq x$. Es una extensión natural de esta notación escribir $(-\infty, \infty)$ *para el conjunto de todos los números reales y eso se hará en todo este libro.*

Intervalo cerrado $[a, b]$
(a)

Intervalo abierto (a, b)
(b)

FIGURA 1.12 Intervalos cerrado y abierto.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $3 - 2x \leq 6$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\leq 6 && \\ -2x &\leq 3 && \text{Regla 1} \\ x &\geq -\frac{3}{2} && \text{Regla 3} \end{aligned}$$

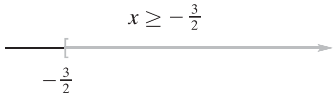


FIGURA 1.14 El intervalo $[-\frac{3}{2}, \infty)$.

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$, o, en notación de intervalo, $[-\frac{3}{2}, \infty)$. Esto se representa geométricamente en la figura 1.14.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $\frac{3}{2}(s-2)+1 > -2(s-4)$.

Solución:

$$\frac{3}{2}(s-2)+1 > -2(s-4)$$

$$2\left[\frac{3}{2}(s-2)+1\right] > 2[-2(s-4)] \qquad \text{Regla 2}$$

$$3(s-2)+2 > -4(s-4)$$

$$3s-4 > -4s+16$$

$$7s > 20 \qquad \text{Regla 1}$$

$$s > \frac{20}{7} \qquad \text{Regla 2}$$

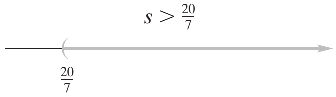


FIGURA 1.15 El intervalo $(\frac{20}{7}, \infty)$.

La solución es $(\frac{20}{7}, \infty)$; vea la figura 1.15.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades lineales

a. Resuelva $2(x-4)-3 > 2x-1$.

Solución:

$$2(x-4)-3 > 2x-1$$

$$2x-8-3 > 2x-1$$

$$-11 > -1$$

Como nunca será cierto que $-11 > -1$, no existe solución y el conjunto solución es $\emptyset$ (el conjunto sin elementos).

b. Resuelva $2(x-4)-3 < 2x-1$.

Solución: Si se procede como en el inciso (a), se obtiene $-11 < -1$. Esto es verdadero para todos los números reales x, de modo que la solución es $(-\infty, \infty)$; vea la figura 1.16.

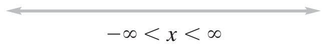


FIGURA 1.16 El intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

PROBLEMAS 1.2

En los problemas del 1 al 34, resuelva las desigualdades. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $5x > 15$
2. $4x < -2$
3. $5x - 11 \leq 9$
4. $5x \leq 0$
5. $-4x \geq 2$
6. $3z + 2 > 0$
7. $5 - 7s > 3$
8. $4s - 1 < -5$
9. $3 < 2y + 3$
10. $4 \leq 3 - 2y$
11. $t + 6 \leq 2 + 3t$
12. $-3 \geq 8(2 - x)$
13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$
14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$
15. $2(4x - 2) > 4(2x + 1)$
16. $5 - (x + 2) \leq 2(2 - x)$
17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$
18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$
19. $\frac{5}{6}x < 40$
20. $-\frac{2}{3}x > 6$
21. $\frac{5y + 2}{4} \leq 2y - 1$
22. $\frac{3y - 2}{3} \geq \frac{1}{4}$
23. $-3x + 1 \leq -3(x - 2) + 1$
24. $0x \leq 0$
25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}$
26. $\frac{5(3t + 1)}{3} > \frac{2t - 4}{6} + \frac{t}{2}$
27. $2x + 13 \geq \frac{1}{3}x - 7$
28. $3x - \frac{1}{3} \leq \frac{5}{2}x$
29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r$
30. $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t$
31. $y + \frac{y}{2} < \frac{y}{3} + \frac{y}{5}$
32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}$
33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434$
34. $\frac{3y - 1}{-3} < \frac{5(y + 1)}{-3}$

35. Ahorros Cada mes del año pasado, Brittany ahorró más de \$50 pero menos de \$150. Si S representa sus ahorros totales del año, describa S usando desigualdades.

36. Mano de obra Usando desigualdades, simbolice el enunciado siguiente: el número de horas de trabajo x necesarias para fabricar un producto no es menor que 3 ni mayor que 5.

37. Geometría En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

38. Gasto Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si ella compra un estéreo que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que puede comprar.

Objetivo

Modelar situaciones de la vida cotidiana en términos de desigualdades.

1.3 Aplicaciones de las desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, tal como ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado sin importar la producción) son de \$70 000. Si el precio de venta de un calentador es \$35, ¿cuántos deben venderse para que la compañía genere utilidades?

Solución:

Estrategia Recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Primero deben encontrarse el ingreso y el costo total y después determinar cuándo es positiva su diferencia.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por lo tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70\,000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

y se desea una utilidad > 0. Así que,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0 \\ 35q - (21q + 70\,000) &> 0 \\ 14q &> 70\,000 \\ q &> 5000 \end{aligned}$$

Como el número de calentadores debe ser un entero no negativo, se observa que deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta serían \$3000 mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (gas, aceite y operador) sería de \$180 por cada día que la máquina se utilice. Si fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de \$20 000 y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$230 por cada día que la máquina se utilizara. ¿Qué número mínimo de días al año tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?

Solución:

Estrategia Se determinarán expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así se encontrará cuándo es menor el costo de la renta que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son (12)(3000), y los costos diarios de 180d. Si la máquina se compra, el costo por año es 20 000 + 230d. Se desea que

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}} \\ 12(3000) + 180d &< 20\,000 + 230d \\ 36\,000 + 180d &< 20\,000 + 230d \\ 16\,000 &< 50d \\ 320 &< d \end{aligned}$$

Por lo tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar su renta.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

EJEMPLO 3 Razón de circulante

La *razón de circulante* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar) sobre sus pasivos circulantes (como préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la Ace Sports Equipment Company decide pedir un préstamo a corto plazo para construir inventario. La compañía tiene activos circulantes por $350 000 y pasivos circulantes por $80 000. ¿Cuánto puede pedir prestado la compañía si quiere que su razón de activo no sea menor que 2.5? (*Nota:* Los fondos recibidos se consideran como activo circulante y el préstamo como pasivo circulante).

Solución: Sea x la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos circulantes serán 350 000 + x y sus pasivos circulantes 80 000 + x. Así,

$$\text{razón de circulante} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350\,000 + x}{80\,000 + x}$$

Se quiere que

$$\frac{350\,000 + x}{80\,000 + x} \geq 2.5$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, es equivalente a una desigualdad lineal.

Como x es positiva, también lo es 80 000 + x. Así que pueden multiplicarse ambos lados de la desigualdad por 80 000 + x y su sentido permanecerá igual. Se tiene

$$\begin{aligned} 350\,000 + x &\geq 2.5(80\,000 + x) \\ 150\,000 &\geq 1.5x \\ 100\,000 &\geq x \end{aligned}$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta $100 000 y aún mantener una razón de activo mayor o igual que 2.5.

◁

EJEMPLO 4 Publicaciones

Una compañía editora determina que el costo por publicar cada ejemplar de cierta revista es de $1.50. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40 por revista. El ingreso por publicidad es 10% de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de 10 000. ¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?

Solución:

> **Estrategia** Se tiene que
>
> $$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$
>
> así que se encuentra una expresión para la utilidad y después se establece como mayor que 0.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10\,000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así que,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0 \\ 1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10\,000)] - 1.50q &> 0 \\ 1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q &> 0 \\ 0.04q - 1400 &> 0 \\ 0.04q &> 1400 \\ q &> 35\,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35 000. Esto es, deben venderse al menos 35 001 ejemplares para garantizar utilidades.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 1.3

1. **Utilidad** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600 000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades.

2. **Utilidad** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2.50 y el de mano de obra \$4. El gasto general constante, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades.

3. **Arrendamiento *versus* compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de poseer un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Ella puede arrendar un automóvil por \$420 al mes (con una base anual). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es de \$0.06. Si compra el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700 y otros costos ascenderían a \$0.08 por milla. ¿Al menos cuántas millas tendría que conducir por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce N camisetas con un costo de mano de obra total de \$1.3N y costo total por material de \$0.4N. Los gastos generales constantes para la planta son de \$6500. Si cada camiseta se vende en \$3.50, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

5. **Publicaciones** El costo unitario por la publicación de cada copia de una revista es de \$1.30. Cada una se vende al distribuidor en \$1.50 y la cantidad que se recibe por publicidad es el 20% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas arriba de 100 000. Encuentre el número mínimo de revistas que pueden editarse sin pérdida si se vende 80% del tiraje.

6. **Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo de mano de obra por producir un reloj es de \$2.00. Sin embargo, si un reloj se produce en tiempo extra su costo asciende a \$3.00. La administración ha decidido no gastar más de \$25 000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11 000 relojes esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

7. **Inversión** Una compañía invierte un total de \$30 000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5% y $6\frac{3}{4}\%$. Desea un rendimiento anual que no sea menor al $6\frac{1}{2}\%$. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}\%$?

8. **Razón de circulante** La razón de circulante de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de \$570 000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de activo no sea menor que 2.6? (Vea el ejemplo 3 para consultar una explicación sobre la razón de circulante).

9. **Asignación de ventas** En la actualidad, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy el precio unitario del producto es de \$4 por unidad. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en \$0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que \$10 750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. Ingresos Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{200}{q} + 3$ por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que \$9000?

11. Sueldo por hora A los pintores con frecuencia se les paga por hora o por obra determinada. El pago que reciben puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que algunos pintores pueden trabajar por \$9.00 la hora, o por \$320 más \$3 por cada hora por debajo de 40 si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, resulta claro que el sueldo por hora es mejor. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

12. Compensación Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted elige entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga \$35 000 más un bono del 3% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una comisión directa del 5% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

13. Razón de la prueba del ácido La *razón de la prueba del ácido* (o *razón rápida*) de un negocio es la razón de sus activos líquidos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— sobre sus pasivos circulantes. La razón mínima para que una compañía tenga unas finanzas sólidas es alrededor de 1.0; pero, por lo general, esto varía un poco de industria a industria. Si una compañía tiene \$450 000 en efectivo y valores y \$398 000 en pasivos circulantes, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón rápida en 1.3 o por arriba de este valor?

Objetivo

Resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valores absolutos.

1.4 Valor absoluto

Ecuaciones con valor absoluto

El valor absoluto de un número real es el número obtenido cuando no se toma en cuenta su signo.

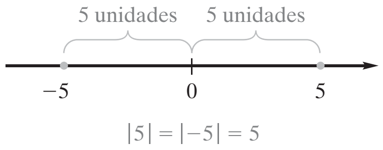


FIGURA 1.17 Valor absoluto.

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número x se le llama **valor absoluto** de x y se denota mediante $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$ porque tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del 0 (vea la figura 1.17). En forma similar, $|0| = 0$. Note que $|x|$ nunca puede ser negativo, esto es $|x| \geq 0$.

Si x es positiva o cero, entonces $|x|$ es simplemente la propia x, de modo que pueden omitirse las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x$$

Por ende, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que se ha cambiado el signo de x. La definición geométrica del valor absoluto como una distancia equivale a lo siguiente:

Definición

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito como $|x|$, se define mediante

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ADVERTENCIA ⚠

$\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, sino $\sqrt{x^2} = |x|$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no es igual a -2. Esto concuerda con el hecho de que $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Observe que $|-x| = |x|$ resulta a partir de la definición.

Aplicando la definición, se tiene $|3| = 3$, $|-8| = -(-8) = 8$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

Además, $|-x|$ no necesariamente es x, así $|-x - 1|$ no es necesariamente $x + 1$. Por ejemplo, si se hace $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. Resuelva $|x - 3| = 2$.

Solución: Esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del 0. Por lo tanto,

$$x - 3 = 2 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -2$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. Resuelva $|7 - 3x| = 5$.

Solución: Esta ecuación es verdadera si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Al resolver estas ecuaciones se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

c. Resuelva $|x - 4| = -3$.

Solución: El valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\emptyset$.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

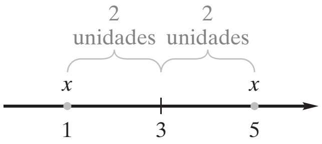


FIGURA 1.18 La solución de $|x - 3| = 2$ es 1 o 5.

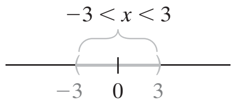
Puede interpretarse $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$ como la distancia entre a y b. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 puede calcularse con

$$\begin{aligned} \text{ya sea} \quad & |9 - 5| = |4| = 4 \\ \text{o} \quad & |5 - 9| = |-4| = 4 \end{aligned}$$

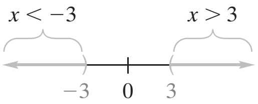
En forma similar, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 es de 2 unidades. Por lo tanto, x puede ser 1 o 5, tal como se muestra en el ejemplo 1(a) y en la figura 1.18.

Desigualdades con valor absoluto

Ahora se estudiarán las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades del 0. Por lo tanto, x debe estar entre -3 y 3, esto es, en el intervalo $-3 < x < 3$. [Vea la figura 1.19(a)]. Por otro lado, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del 0. Así que existen dos intervalos en la solución: ya sea $x < -3$ o $x > 3$. [Vea la figura 1.19(b)]. Estas ideas pueden ampliarse de la manera siguiente: si $|x| \leq 3$, entonces $-3 \leq x \leq 3$; si $|x| \geq 3$, entonces $x \leq -3$ o bien $x \geq 3$. En la tabla 1.1 se da un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.



(a) Solución de $|x| < 3$



(b) Solución de $|x| > 3$

FIGURA 1.19 Soluciones de $|x| < 3$ y $|x| > 3$.

Tabla 1.1

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ o $x > d$
$\lvert x\rvert \geq d$	$x \leq -d$ o $x \geq d$

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. Resuelva $|x - 2| < 4$.

Solución: El número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del 0. Del análisis anterior, esto significa que $-4 < x - 2 < 4$. Puede establecerse el procedimiento para resolver esta desigualdad como sigue:

$$\begin{aligned} &-4 < x - 2 < 4 \\ &-4 + 2 < x < 4 + 2 \qquad \text{sumando 2 a cada miembro} \\ &-2 < x < 6 \end{aligned}$$

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original. (Vea la figura 1.20).

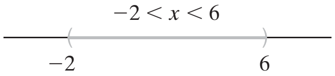


FIGURA 1.20 La solución de $|x - 2| < 4$ es el intervalo $(-2, 6)$.

b. Resuelva $|3 - 2x| \leq 5$.

Solución:

$$\begin{array}{rcccll} -5 & \leq & 3 - 2x & \leq & 5 & \\ -5 - 3 & \leq & -2x & \leq & 5 - 3 & \text{restando 3} \\ -8 & \leq & -2x & \leq & 2 & \\ 4 & \geq & x & \geq & -1 & \text{dividiendo entre } -2 \\ -1 & \leq & x & \leq & 4 & \text{reescribiendo} \end{array}$$

Observe que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* al dividir entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. Resuelva $|x + 5| \geq 7$.

Solución: Aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del 0. Así que, $x + 5 \leq -7$ *o bien* $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ *o bien* $x \geq 2$. Por lo tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Esta colección de números puede abreviarse escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$$

donde el símbolo de conexión $\cup$ es llamado símbolo de la *unión*. (Vea la figura 1.21). Formalmente, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

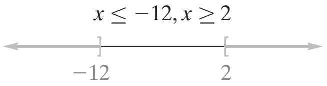


FIGURA 1.21 La unión $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$.

b. Resuelva $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ *o bien* $3x - 4 > 1$. Así que, $3x < 3$ *o bien* $3x > 5$. Por lo tanto, $x < 1$ *o bien* $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números incluidos en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

ADVERTENCIA!

Las desigualdades $x \leq -12$ o $x \geq 2$ en (a) y $x < 1$ *o bien* $x > \frac{5}{3}$ en (b) no dan lugar a un solo intervalo como en los ejemplos 2a y 2b.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

APLÍQUELO ▶

3. Exprese el enunciado siguiente usando notación de valor absoluto: el peso real w de una caja de cereal puede tener una diferencia máxima de 0.3 onzas con el peso establecido en la caja, que es de 22 onzas.

EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Use la notación de valor absoluto para expresar los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades de 5.

Solución: $|x - 5| < 3$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

Solución: $|x - 6| \geq 7$

c. $x < 3$ y $x > -3$ de manera simultánea.

Solución: $|x| < 3$

d. x está a más de una unidad de -2.

Solución:

$$|x - (-2)| > 1$$
$$|x + 2| > 1$$

e. x está a menos de σ (letra griega "sigma") unidades de μ (letra griega "mu").

Solución: $|x - \mu| < \sigma$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Propiedades del valor absoluto

Las siguientes son cinco propiedades básicas del valor absoluto:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
3. $|a - b| = |b - a|$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números. La propiedad 5 se conoce como *desigualdad del triángulo*.

EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$

c. $|7 - x| = |x - 7|$

d. $\left|\dfrac{-7}{3}\right| = \dfrac{|-7|}{|3|} = \dfrac{7}{3}; \left|\dfrac{-7}{-3}\right| = \dfrac{|-7|}{|-3|} = \dfrac{7}{3}$

e. $\left|\dfrac{x-3}{-5}\right| = \dfrac{|x-3|}{|-5|} = \dfrac{|x-3|}{5}$

f. $-|2| \leq 2 \leq |2|$

g. $|(-2) + 3| = |1| = 1 \leq 5 = 2 + 3 = |-2| + |3|$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 1.4

En los problemas del 1 al 10, evalúe la expresión de valor absoluto.

1. $|-13|$

2. $|2^{-1}|$

3. $|8 - 2|$

4. $|(-3 - 5)/2|$

5. $|2(-\frac{7}{2})|$

6. $|3 - 5| - |5 - 3|$

7. $|x| < 4$

8. $|x| < 10$

9. $|3 - \sqrt{10}|$

10. $|\sqrt{5} - 2|$

11. Utilice el símbolo de valor absoluto para expresar cada uno de los siguientes enunciados:
(a) x está a menos de 3 unidades de 7.
(b) x difiere de 2 por menos de 3.
(c) x no está a más de 5 unidades de 7.
(d) La distancia entre 7 y x es 4.
(e) $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
(f) x está entre -3 y 3, pero no es igual a 3 ni a -3.
(g) $x < -6$ o $x > 6$.
(h) El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3.
(i) El ingreso promedio mensual x de una familia difiere de 850 por menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que $f(x)$ y L difieren en no más de ϵ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2 de dos productos pueden diferir en no más de $9.

14. Determine todos los valores de x tales que $|x - \mu| < 3\sigma$.

En los problemas del 15 al 36, resuelva la ecuación o desigualdad dada.

15. $|x| = 7$

16. $|-x| = 2$

17. $\left|\dfrac{x}{5}\right| = 7$

18. $\left|\dfrac{5}{x}\right| = 12$

19. $|x - 5| = 9$

20. $|4 + 3x| = 6$

21. $|5x - 2| = 0$

22. $|7x + 3| = x$

23. $|7 - 4x| = 5$

24. $|5 - 3x| = 7$

25. $|x| < M$ para $M > 0$

26. $|-x| < 3$

27. $\left|\dfrac{x}{4}\right| > 2$

28. $\left|\dfrac{x}{3}\right| > \dfrac{1}{2}$

29. $|x + 7| < 3$

30. $|2x - 17| < -4$

31. $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$

32. $|1 - 3x| > 2$

33. $|5 - 8x| \leq 1$

34. $|3x - 2| \geq 0$

35. $\left|\dfrac{3x - 8}{2}\right| \geq 4$

36. $\left|\dfrac{x - 7}{3}\right| \leq 5$

En los problemas 37 y 38, exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 35.2 m y es precisa en ±20 cm.

38. La diferencia en temperatura entre dos sustancias químicas que se han mezclado no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

39. Estadística En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev establece que si x es una variable aleatoria, μ es su media σ su desviación estándar y $h > 0$, entonces

$$\text{(probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \geq \frac{1}{h^2}$$

Encuentre los valores de x tales que $|x - \mu| > h\sigma$.

40. Tolerancia en manufactura En la fabricación de aparatos, la dimensión promedio de una pieza mide 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una pieza no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.

Objetivo

Escribir sumas en notación de sumatoria y evaluar dichas sumas.

1.5 Notación de sigma, suma o sumatoria

Hubo un tiempo en que los profesores hacían que sus estudiantes sumaran todos los enteros positivos de 1 a 105 (por ejemplo), tal vez como castigo por un comportamiento incorrecto mientras el profesor estaba fuera del salón de clases. En otras palabras, los estudiantes debían encontrar

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105 \tag{1}$$

Un ejercicio relacionado era encontrar

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 81 + 100 + 121 \tag{2}$$

La notación de los tres puntos implica la idea de continuar la tarea, usando el mismo patrón, hasta que el último de los términos dados explícitamente haya sido sumado. Con esta notación no hay reglas firmes ni rápidas acerca de cuántos términos deben darse explícitamente al principio y al final. Quien la use debe proporcionar los términos que sean necesarios para asegurar que el lector no encuentre ambigua la expresión. Lo anterior es demasiado impreciso para muchas aplicaciones matemáticas.

Suponga que para cualquier entero positivo i se define $a_i = i^2$. Entonces, por ejemplo, $a_6 = 36$ y $a_8 = 64$. La instrucción, "Sume todos los números a_i, donde i toma los valores enteros desde 1 hasta el 11 inclusive" es un enunciado preciso de la ecuación (2). Sería preciso independientemente de la fórmula que define los valores a_i, y esto conduce a lo siguiente:

Definición

Si, para cada entero positivo i, se da un número único a_i, y m y n son enteros positivos con $m \leq n$, entonces ***la suma de los números*** a_i, ***donde*** i ***toma sucesivamente todos los valores enteros incluidos en el intervalo*** $[m, n]$, ***se denota como***

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Así,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \tag{3}$$

La $\sum$ es la letra griega sigma mayúscula que indica la "suma" o "sumatoria" de los términos a_i, por lo que la expresión $\sum_{i=m}^{n} a_i$ puede leerse como la suma o sumatoria de todos los números a_i, donde i va desde m hasta n (se entiende que a través de los enteros positivos). La descripción de a_i puede ser muy simple. Por ejemplo, en la ecuación (1) se tiene $a_i = i$ y

$$\sum_{i=1}^{105} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 105 \tag{4}$$

mientras que la ecuación (2) es

$$\sum_{i=1}^{11} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 121 \tag{5}$$

Solamente se ha definido una notación, que se llama ***notación suma***. En la ecuación (3), *i* es el índice de *sigma* (*suma*) y *m* y *n* se llaman *cotas de la suma*. Es importante entender, a partir de esta explicación, que el nombre del índice de sigma (suma) puede reemplazarse por cualquier otro, de manera que se tiene

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{\alpha=m}^{n} a_\alpha = \sum_{N=m}^{n} a_N$$

por ejemplo. En cada caso, al reemplazar el índice de sigma por los enteros positivos desde m hasta n y sumar se obtiene

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

A continuación se ilustran estos conceptos mediante algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 1 Evaluación de sigma o sumas

Evalúe las sumas dadas.

a. $\sum_{n=3}^{7} (5n - 2)$

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{7} (5n - 2) &= [5(3) - 2] + [5(4) - 2] + [5(5) - 2] + [5(6) - 2] + [5(7) - 2]\\ &= 13 + 18 + 23 + 28 + 33\\ &= 115\end{aligned}$$

b. $\sum_{j=1}^{6} (j^2 + 1)$

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{6} (j^2 + 1) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1)\\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37\\ &= 97\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 2 Escritura de una suma usando notación de sigma

Escriba la suma $14 + 16 + 18 + 20 + 22 + \cdots + 100$ en notación de sigma.

Solución: Existen muchas formas de expresar esta suma en notación de sigma. Un método consiste en darse cuenta de que los valores que se suman son $2n$, para $n = 7$ hasta 50. Entonces la suma puede escribirse como

$$\sum_{n=7}^{50} 2n$$

Otro método consiste en ver que los valores que se suman son $2k + 12$, para $k = 1$ hasta 44. La suma puede representarse entonces como

$$\sum_{k=1}^{44} (2k + 12)$$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Como la notación de suma se usa para expresar la adición de términos, pueden usarse las propiedades de la suma cuando se realizan operaciones de adición escritas en notación de suma. Al aplicar estas propiedades, puede crearse una lista de propiedades y fórmulas para la notación de suma.

Por la propiedad distributiva de la suma,

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por lo tanto, en notación de suma

$$\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (6)$$

Observe que c debe ser constante con respecto a i para que la ecuación (6) pueda usarse.

Por la propiedad conmutativa de la suma,

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Entonces, se tiene

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \qquad (7)$$

Algunas veces se desea cambiar las cotas de la sigma.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{p+n-m} a_{i+m-p} \qquad (8)$$

Una suma de 37 términos puede verse como la suma de los primeros 17 términos más la suma de los siguientes 20. La siguiente regla generaliza esta observación.

$$\sum_{i=m}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (9)$$

Además de estas cuatro reglas básicas, existen algunas otras reglas valiosas.

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad (10)$$

Esto es porque $\sum_{i=1}^{n} 1$ es una suma de n términos, cada uno de los cuales es igual a 1. La siguiente regla surge a partir de combinar la ecuación (6) con la (10).

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \qquad (11)$$

De manera similar, a partir de las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i \qquad (12)$$

El establecimiento de las siguientes tres fórmulas se realiza de mejor manera por medio de un método para demostrar que se llama inducción matemática, la cual no se construirá aquí.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{15}$$

Sin embargo, la ecuación (13) puede deducirse. Sumando las siguientes ecuaciones de manera “vertical”, término por término,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

se obtiene

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

y como existen n términos a la derecha, se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observe que si el profesor asigna la tarea de calcular

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105$$

como un *castigo* y si él conoce la fórmula dada por la ecuación (13), entonces el trabajo de un estudiante puede revisarse de manera rápida mediante

$$\sum_{i=1}^{105} i = \frac{105(106)}{2} = 105 \cdot 53 = 5300 + 265 = 5565$$

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de la notación de suma

Evalúe las sumas dadas.

a. $\sum_{j=30}^{100} 4$ **b.** $\sum_{k=1}^{100} (5k+3)$ **c.** $\sum_{k=1}^{200} 9k^2$

Soluciones:

a.

$$\begin{aligned} \sum_{j=30}^{100} 4 &= \sum_{j=1}^{71} 4 && \text{por la ecuación (8)} \\ &= 4 \cdot 71 && \text{por la ecuación (11)} \\ &= 284 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (5k+3) &= \sum_{k=1}^{100} 5k + \sum_{k=1}^{100} 3 && \text{por la ecuación (7)} \\ &= 5\left(\sum_{k=1}^{100} k\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{100} 1\right) && \text{por la ecuación (6)} \end{aligned}$$

$$= 5\left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right) + 3(100) \qquad \text{por las ecuaciones (13) y (10)}$$

$$= 25\,250 + 300$$

$$= 25\,550$$

c.

$$\sum_{k=1}^{200} 9k^2 = 9\sum_{k=1}^{200} k^2 \qquad \text{por la ecuación (6)}$$

$$= 9\left(\frac{200 \cdot 201 \cdot 401}{6}\right) \qquad \text{por la ecuación (14)}$$

$$= 24\,180\,300$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

PROBLEMAS 1.5

En los problemas 1 y 2, proporcione las cotas y el índice de sigma para cada expresión.

1. $\sum_{t=12}^{17} (8t^2 - 5t + 3)$ **2.** $\sum_{m=3}^{450} (8m - 4)$

En los problemas del 3 al 6, evalúe las sumas dadas.

3. $\sum_{i=1}^{5} 3i$ **4.** $\sum_{p=0}^{4} 10p$

5. $\sum_{k=3}^{9} (10k + 16)$ **6.** $\sum_{n=7}^{11} (2n - 3)$

En los problemas del 7 al 12, exprese las sumas dadas en notación de sigma.

7. $36 + 37 + 38 + 39 + \cdots + 60$

8. $1 + 8 + 27 + 64 + 125$

9. $5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8$

10. $11 + 15 + 19 + 23 + \cdots + 71$

11. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$

12. $10 + 100 + 1000 + \cdots + 100\,000\,000$

En los problemas del 13 al 26, evalúe las sumas dadas.

13. $\sum_{k=1}^{875} 10$ **14.** $\sum_{k=35}^{135} 2$

15. $\sum_{k=1}^{n} \left(5 \cdot \frac{1}{n}\right)$ **16.** $\sum_{k=1}^{200} (k - 100)$

17. $\sum_{k=51}^{100} 10k$ **18.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+1}k^3$

19. $\sum_{k=1}^{20} (5k^2 + 3k)$ **20.** $\sum_{k=1}^{100} \frac{3k^2 - 200k}{101}$

21. $\sum_{k=51}^{100} k^2$ **22.** $\sum_{k=1}^{50} (k + 50)^2$

23. $\sum_{k=1}^{9} \left\{\left[3 - \left(\frac{k}{10}\right)^2\right]\left(\frac{1}{10}\right)\right\}$

24. $\sum_{k=1}^{100} \left\{\left[4 - \left(\frac{2}{100}k\right)^2\right]\left(\frac{2}{100}\right)\right\}$

25. $\sum_{k=1}^{n} \left\{\left[5 - \left(\frac{3}{n} \cdot k\right)^2\right]\frac{3}{n}\right\}$

26. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(n+1)(2n+1)}$

Objetivo

Introducir las sucesiones, en particular las aritméticas y geométricas, así como sus sumas.

1.6 Sucesiones

Introducción

Considere la siguiente lista de cinco números:

$$2,\ \ 2 + \sqrt{3},\ \ 2 + 2\sqrt{3},\ \ 2 + 3\sqrt{3},\ \ 2 + 4\sqrt{3} \qquad (1)$$

Si se entiende que debe tomarse en cuenta el orden de los números, entonces una lista de este tipo se denomina **sucesión de longitud** 5 y se considera ser diferente de

$$2,\ \ 2 + 3\sqrt{3},\ \ 2 + \sqrt{3},\ \ 2 + 4\sqrt{3},\ \ 2 + 2\sqrt{3} \qquad (2)$$

que también es una sucesión de longitud 5. A su vez, ambas sucesiones son diferentes de

$$2, \ 2, \ 2+\sqrt{3}, \ 2+2\sqrt{3}, \ 2+3\sqrt{3}, \ 2+4\sqrt{3} \tag{3}$$

que es una sucesión de longitud 6. Sin embargo, cada una de las sucesiones (1), (2) y (3) tiene todos los números del *conjunto* de 5 elementos

$$\{2, \ 2+\sqrt{3}, \ 2+2\sqrt{3}, \ 2+3\sqrt{3}, \ 2+4\sqrt{3}\}$$

ADVERTENCIA!

Tanto los reordenamientos como las repeticiones ***afectan*** a una sucesión.

Se dice que "*un conjunto está determinado por sus elementos* y ni las repeticiones ni los reordenamientos de una lista lo afectan". Dado que tanto las repeticiones como los reordenamientos afectan a una sucesión, resulta que las sucesiones no son lo mismo que los conjuntos.

También se considerarán los listados como

$$2, \ 2+\sqrt{3}, \ 2+2\sqrt{3}, \ 2+3\sqrt{3}, \ 2+4\sqrt{3}, \ \cdots, \ 2+k\sqrt{3}, \ \cdots \tag{4}$$

y

$$1, \ -1, \ 1, \ -1, \ 1, \ \cdots, \ (-1)^{k+1}, \ \cdots \tag{5}$$

Ambos son ejemplos de lo que se denomina como una **sucesión infinita**. Sin embargo, observe que la sucesión infinita (4) involucra una cantidad infinita de números diferentes en el conjunto

$$\{2+k\sqrt{3} | k \text{ un entero no negativo}\}$$

mientras que la sucesión infinita (5) involucra solo a los números comprendidos en el conjunto finito

$$\{-1, 1\}$$

Para un entero positivo n, el tomar los primeros n números de una sucesión infinita resulta en una sucesión de longitud n. Por ejemplo, al tomar los primeros cinco números de la sucesión infinita (4) se obtiene la secuencia (1). Las siguientes definiciones más formales son útiles para comprender mejor la idea un tanto sutil acerca de una sucesión.

Definición

Para un entero positivo n, una ***sucesión de longitud*** n es una regla que asigna a cada elemento del conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ exactamente un número real. Al conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ se le denomina como el ***dominio*** de la sucesión de longitud n. Una ***sucesión finita*** es una sucesión de longitud n para algún entero positivo n.

Definición

Una ***sucesión infinita*** es una regla que asigna a cada elemento del conjunto de todos los enteros positivos $\{1, 2, 3, \cdots\}$ exactamente un número real. Al conjunto $\{1, 2, 3, \cdots\}$ se le llama ***dominio*** de la sucesión infinita.

En ambas definiciones, la palabra *regla* puede parecer vaga, pero el punto es que para cualquier sucesión debe haber una manera definida de especificar exactamente un número para cada uno de los elementos de su dominio. En una sucesión finita, la regla puede estar dada por el simple listado de los números incluidos en la sucesión. No hay necesidad de que exista un patrón discernible (aunque en la práctica muchas veces sí existe). Por ejemplo,

$$99, \ -\pi, \ \frac{3}{5}, \ 102.7$$

es una sucesión perfectamente válida de longitud 4. En una sucesión infinita, debe haber algún tipo de procedimiento para la generación de sus números, uno después del otro. Sin embargo, el procedimiento puede no estar dado por una fórmula simple. La sucesión infinita

$$2, \ 3, \ 5, \ 7, \ 11, \ 13, \ 17, \ 19, \ 23, \ \cdots$$

es muy importante en la teoría de los números, pero su dominio no está dado por una simple fórmula. (¿Qué regla *aparenta* es la que da lugar a esta sucesión? En ese caso, ¿cuál es el siguiente número en esta sucesión después de los que se muestran?)

Con frecuencia se usan letras como a, b, c, etc., para nombrar las sucesiones. Si la sucesión se llama a, se escribe a_1 para el número asignado a 1, a_2 para el número asignado a 2, a_3 para el número asignado a 3, y así sucesivamente. En general, para k en el dominio de la sucesión, se escribe a_k para indicar el número asignado a k y se le denomina como el k-ésimo ***término*** de la sucesión. (Si usted ha estudiado la sección 1.5 sobre notación de suma, ya estará familiarizado con esta notación). De hecho, en lugar de listar todos los números de una sucesión mediante

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

o añadir una indicación de todos los números como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$$

una sucesión suele denotarse mediante (a_k). En ocasiones, se utiliza $(a_k)_{k=1}^{n}$ para indicar que la sucesión es finita, de longitud n, o se usa $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ para destacar que la sucesión es infinita. El ***rango*** de una sucesión (a_k) es el *conjunto*

$$\{a_k | k \text{ está en el dominio de } a\}$$

Observe que

$$\{(-1)^{k+1} | k \text{ es un número entero positivo}\} = \{-1, 1\}$$

por lo que una sucesión infinita puede tener un rango finito. Si a y b son sucesiones, entonces, por definición, $a = b$ si y solo si a y b tienen el mismo dominio y, para todo k en el dominio común, $a_k = b_k$.

APLÍQUELO ▶

4. Una cadena de cafeterías de moda tenía 183 puntos de venta en 2009. A partir de 2010 planeaba ampliar su número de establecimientos en 18 cada año durante cinco años. Si c_k es el número de puntos de venta existentes en el año k, medido desde 2008, liste los términos de la sucesión $(c_k)_{k=1}^{6}$.

EJEMPLO 1 Listado de términos en una sucesión

a. Liste los cuatro primeros términos de la sucesión infinita $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ cuyo k-ésimo término está dado por $a_k = 2k^2 + 3k + 1$.

Solución: Se tiene $a_1 = 2(1^2) + 3(1) + 1 = 6$, $a_2 = 2(2^2) + 3(2) + 1 = 15$, $a_3 = 2(3^2) + 3(3) + 1 = 28$ y $a_4 = 2(4^2) + 3(4) + 1 = 45$. Así que los primeros cuatro términos son

$$6,\ 15,\ 28,\ 45$$

b. Liste los cuatro primeros términos de la sucesión infinita (e_k), donde $e_k = \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$.

Solución: Se tiene $e_1 = \left(\dfrac{1+1}{1}\right)^1 = \left(\dfrac{2}{1}\right)^1 = 2$, $e_2 = \left(\dfrac{2+1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$, $e_3 = \left(\dfrac{3+1}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$, $e_4 = \left(\dfrac{4+1}{4}\right)^4 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256}$.

c. Despliegue la sucesión $\left(\dfrac{3}{2^{k-1}}\right)_{k=1}^{6}$.

Solución: Considerando que $2^0 = 1$, se tiene

$$3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{32}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

5. Cierta cuenta bancaria inactiva que genera intereses a una tasa de 6% de interés compuesto anual muestra los siguientes saldos durante cuatro fines de año consecutivos: \$9.57, \$10.14, \$10.75, \$11.40. Escriba la sucesión de cantidades en la forma $(a_k)_{k=1}^{4}$.

EJEMPLO 2 Obtención de una fórmula para una sucesión

a. Escriba 41, 44, 47, 50, 53 en la forma $(a_k)_{k=1}^{5}$.

Solución: Cada término de la sucesión se obtiene sumando tres al término anterior. Dado que el primer término es 41, la sucesión puede escribirse como $(41 + (k-1)3)_{k=1}^{5}$. Tenga en cuenta que esta fórmula no es única. La sucesión también puede describirse mediante $(38 + 3k)_{k=1}^{5}$ y $(32 + (k+2)3)_{k=1}^{5}$, solo por mencionar dos posibilidades más.

b. Escriba la sucesión de 1, 4, 9, 16, … en la forma (a_k).

Solución: *Al parecer* se trata de la sucesión de los cuadrados de los números enteros positivos, de modo que la mayor parte de las personas consideraría que (k^2) o (k^2) o $(k^2)_{k=1}^{\infty}$ es la respuesta correcta. Pero la sucesión descrita por $(k^4 - 10k^3 + 36k^2 - 50k + 24)$

también tiene como primeros cuatro términos a 1, 4, 9 y 16, inclusive su quinto término es 49. Los términos sexto y séptimo son 156 y 409, respectivamente. El punto que pretendemos destacar es que una sucesión infinita no puede determinarse solo a partir de un número finito de valores.

Por otro lado, es correcto escribir

$$1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots = (k^2)$$

porque el despliegue realizado en el lado izquierdo de la ecuación deja claro que el ***término general*** es k^2.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 3 Demostración de la igualdad de sucesiones

Demuestre que las sucesiones $((i+3)^2)_{i=1}^{\infty}$ y $(j^2+6j+9)_{j=1}^{\infty}$ son iguales.

Solución: Tanto $((i+3)^2)_{i=1}^{\infty}$ como $(j^2+6j+9)_{j=1}^{\infty}$ están dadas explícitamente para tener el mismo dominio; a saber, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto infinito de todos los números enteros positivos. Los nombres i y j que se utilizan para nombrar a un elemento típico del dominio no son importantes. La primera sucesión contiene lo mismo que $((k+3)^2)_{k=1}^{\infty}$ y la segunda sucesión contiene lo mismo que $(k^2+6k+9)_{k=1}^{\infty}$. La primera regla asigna el número $(k+3)^2$ a cualquier entero positivo k y la segunda asigna el número k^2+6k+9 a cualquier entero positivo k. Sin embargo, para todo k, $(k+3)^2 = k^2+6k+9$, de modo que por la definición de la igualdad de sucesiones, estas sucesiones son iguales.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

Sucesiones definidas recursivamente

Suponga que a es una sucesión con

$$a_1 = 1 \text{ y, para cada entero positivo } k,\ a_{k+1} = (k+1)a_k \tag{6}$$

Tomando $k = 1$, se observa que $a_2 = (2)a_1 = (2)1 = 2$, mientras que con $k = 2$ se tiene $a_3 = (3)a_2 = (3)2 = 6$. Una sucesión cuya regla se define en términos de sí misma evaluada en valores más pequeños, y en algunos valores pequeños dados de forma explícita, se dice que está ***definida recursivamente***. Por lo tanto, se puede decir que hay una sucesión a definida recursivamente por la expresión (6).

Otro ejemplo famoso de una sucesión definida recursivamente es la sucesión de Fibonacci:

$$F_1 = 1 \text{ y } F_2 = 1 \text{ y, para cada entero positivo } k,\ F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \tag{7}$$

Tomando $k = 1$, se ve que $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$, $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$. De hecho, los diez primeros términos de (F_k) son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

EJEMPLO 4 Aplicación de una definición recursiva

a. Utilice la definición recursiva (6) para determinar a_5 (sin hacer referencia a cálculos anteriores).

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned} a_5 &= (5)a_4 \\ &= (5)(4)a_3 \\ &= (5)(4)(3)a_2 \\ &= (5)(4)(3)(2)a_1 \\ &= (5)(4)(3)(2)(1) \\ &= 120 \end{aligned}$$

La notación estándar para a_k tal como se define en (6) es $k!$ y se lee "k factorial". También se define $0! = 1$.

b. Utilice la definición recursiva (7) para determinar F_6.

Solución:

$$\begin{aligned} F_6 &= F_5 + F_4 \\ &= (F_4 + F_3) + (F_3 + F_2) \\ &= F_4 + 2F_3 + F_2 \\ &= (F_3 + F_2) + 2(F_2 + F_1) + F_2 \\ &= F_3 + 4F_2 + 2F_1 \\ &= (F_2 + F_1) + 4F_2 + 2F_1 \\ &= 5F_2 + 3F_1 \\ &= 5(1) + 3(1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

En el ejemplo 4, deliberadamente se evitó hacer cualquier evaluación numérica hasta que *todos* los términos hubieran sido expresados utilizando solo aquellos cuyos valores fueron dados explícitamente en la definición recursiva. Esto ayuda a ilustrar la estructura de la definición recursiva en cada caso.

Si bien las definiciones recursivas son muy útiles en las aplicaciones, los cálculos anteriores ponen de relieve que, para valores grandes de k, el cálculo del k-ésimo término puede llevar mucho tiempo. Es conveniente disponer de una fórmula simple para a_k que no haga referencia a a_1, para $l < k$. En ocasiones, es posible encontrar una fórmula *cerrada*. En el caso de (6) es fácil ver que $a_k = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por otro lado, en el caso de (7), no es tan fácil deducir que

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas

Definición

Una ***sucesión aritmética*** es una sucesión (b_k) definida recursivamente por

$$b_1 = a \text{ y, para cada entero positivo } k,\ b_{k+1} = d + b_k \qquad \textbf{(8)}$$

para los números reales fijos a y d.

En palabras, la definición dice que la sucesión debe comenzar en a y obtener el *siguiente* término sumando d (sin importar qué término se encuentre actualmente bajo consideración). El número a es simplemente el primer término de la sucesión aritmética. Dado que la definición recursiva da $b_{k+1} - b_k = d$, para todo entero positivo k, se observa que el número d es la diferencia entre cualquier par de términos sucesivos. En consecuencia, a esto se le llama ***diferencia común*** de la sucesión aritmética. Cualquier par de números reales a y d determina una sucesión aritmética infinita. Al restringir esto a un número finito de términos, se puede hablar de sucesiones aritméticas finitas.

APLÍQUELO ▶

6. En 2009, la matrícula en la escuela secundaria de Springfield fue de 1237 alumnos y los estudios demográficos sugieren que se reducirá anualmente en 12 alumnos durante los próximos siete años. Liste las matrículas proyectadas de la secundaria de Springfield.

EJEMPLO 5 Listado de una sucesión aritmética

Escriba explícitamente los términos de una sucesión aritmética de longitud 6 con el primer término $a = 1.5$ y una diferencia común $d = 0.7$.

Solución: Sea b_k la sucesión aritmética. Entonces

$$\begin{aligned} b_1 & & &= 1.5 \\ b_2 &= 0.7 + b_1 &= 0.7 + 1.5 &= 2.2 \\ b_3 &= 0.7 + b_2 &= 0.7 + 2.2 &= 2.9 \\ b_4 &= 0.7 + b_3 &= 0.7 + 2.9 &= 3.6 \\ b_5 &= 0.7 + b_4 &= 0.7 + 3.6 &= 4.3 \\ b_6 &= 0.7 + b_5 &= 0.7 + 4.3 &= 5.0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión requerida es

$$1.5,\ 2.2,\ 2.9,\ 3.6,\ 4.3,\ 5.0$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

Definición

Una ***sucesión geométrica*** es una sucesión (c_k) definida recursivamente por

$$c_1 = a \text{ y, para cada entero positivo } k,\ c_{k+1} = c_k \cdot r \qquad \textbf{(9)}$$

para los números reales fijos a y r.

En palabras, la definición indica que la sucesión debe comenzar en a y el *siguiente* término se obtiene multiplicando por r (sin importar qué término se encuentre actualmente bajo consideración). El número a es simplemente el primer término de la sucesión geométrica. Puesto que la definición recursiva da $c_{k+1}/c_k = r$, para todo entero positivo k con $c_k \neq 0$, se observa que el número r es la razón entre cualquier par de términos sucesivos, con el primero de ellos distinto de 0. En consecuencia, se le llama ***razón común*** de la sucesión geométrica. Cualquier par de números reales a y r determina una sucesión geométrica infinita. Si esto se restringe a un número finito de términos, puede hablarse de sucesiones geométricas finitas.

APLÍQUELO ▶

7. La población de la zona rural que circunda a Springfield está disminuyendo como resultado del movimiento hacia el núcleo urbano. En 2009 fue de 23 500 habitantes y se esperaba que cada año, durante los siguientes cuatro años, fuese de solo el 92% de la población del año anterior. Liste las cifras de población anuales previstas para el área rural.

EJEMPLO 6 Listado de una sucesión geométrica

Escriba explícitamente los términos de una sucesión geométrica de longitud 5 con el primer término $a = \sqrt{2}$ y una razón común $r = 1/2$.

Solución: Si (c_k) es la sucesión geométrica, entonces

$$\begin{aligned}
c_1 & & &= \sqrt{2}\\
c_2 &= (c_1)\cdot 1/2 = &(\sqrt{2})1/2 &= \sqrt{2}/2\\
c_3 &= (c_2)\cdot 1/2 = &(\sqrt{2}/2)1/2 &= \sqrt{2}/4\\
c_4 &= (c_3)\cdot 1/2 = &(\sqrt{2}/4)1/2 &= \sqrt{2}/8\\
c_5 &= (c_4)\cdot 1/2 = &(\sqrt{2}/8)1/2 &= \sqrt{2}/16
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión requerida es

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/4,\ \sqrt{2}/8,\ \sqrt{2}/16$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

Se ha señalado que a veces es posible determinar una fórmula explícita para el k-ésimo término de una sucesión definida recursivamente. Este es ciertamente el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas.

EJEMPLO 7 Determinación del *k*-ésimo término de una sucesión aritmética

Encuentre una fórmula explícita para el k-ésimo término de una sucesión aritmética (b_k) con el primer término a y una diferencia común d.

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned}
b_1 &= & a &= 0d + a\\
b_2 &= d + (b_1) = & d + a &= 1d + a\\
b_3 &= d + (b_2) = & d + (1d + a) &= 2d + a\\
b_4 &= d + (b_3) = & d + (2d + a) &= 3d + a\\
b_5 &= d + (b_4) = & d + (3d + a) &= 4d + a
\end{aligned}$$

Parece que, para cada entero positivo k, el k-ésimo término de una sucesión aritmética (b_k) con un primer término a y una diferencia común d está dado por

$$bk = (k - 1)d + a \qquad \textbf{(10)}$$

Esto es cierto y se comprende fácilmente a través del método de demostración denominado inducción matemática, que no se mostrará aquí.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

EJEMPLO 8 Determinación del *k*-ésimo término de una sucesión geométrica

Encuentre una fórmula explícita para el k-ésimo término de una sucesión geométrica (c_k) con el primer término a y una razón común r.

Solución: Se tiene

$$\begin{aligned} c_1 &= & a &= ar^0 \\ c_2 &= (c_1)\cdot r = & ar &= ar^1 \\ c_3 &= (c_2)\cdot r = & ar^1r &= ar^2 \\ c_4 &= (c_3)\cdot r = & ar^2r &= ar^3 \\ c_5 &= (c_4)\cdot r = & ar^3r &= ar^4 \end{aligned}$$

Parece que, para cada entero positivo k, el k-ésimo término de una sucesión geométrica (c_k) con un primer término a y una diferencia común r está dado por

$$c_k = ar^{k-1} \qquad \textbf{(11)}$$

Esto es cierto y también se comprende fácilmente a través de la inducción matemática.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

Resulta claro que cualquier sucesión aritmética tiene un único primer término a y una única diferencia común d. Para una sucesión geométrica se debe ser un poco más cuidadoso. A partir de (11), vemos que si cualquier término c_k es 0, entonces $a = 0$ o bien $r = 0$. Si $a = 0$, entonces cada término de la sucesión geométrica es 0. En este caso, no hay una r determinada en forma única porque $r \cdot 0 = 0$, para *toda* r. Si $a \neq 0$, pero $r = 0$, entonces cada término, excepto el primero, es 0.

Sumas de sucesiones

Para cualquier sucesión (c_k), se puede hablar de la suma de los primeros k términos. A esta suma se le llamará s_k. Utilizando la notación de sigma introducida en la sección 1.5, se puede escribir

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} c_i = c_1 + c_2 + \cdots + c_k \qquad \textbf{(12)}$$

Es posible considerar a s_k como los términos de una nueva sucesión (s_k), de sumas, asociada a la sucesión original (s_k). Si una sucesión (c_k) es finita de longitud n, entonces s_n puede considerarse como ***la suma de la sucesión***.

APLÍQUELO ▶

8. Si una empresa tuvo un ingreso anual de 27 millones en 2009 y los ingresos crecen en 1.5 millones cada año, encuentre los ingresos totales para el periodo de 2009 a 2015 inclusive.

EJEMPLO 9 Determinación de la suma de una sucesión aritmética

Encuentre una fórmula para la suma s_n de los primeros n términos de una sucesión aritmética (b_k) con un primer término a y una diferencia común d.

Solución: Puesto que la sucesión aritmética (b_k) en cuestión tiene, por el ejemplo 7, $b_k = (k-1)d + a$, la suma requerida está dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} ((k-1)d + a) = \sum_{k=1}^{n} (dk - (d-a)) = \sum_{k=1}^{n} dk - \sum_{k=1}^{n} (d-a)$$

$$= d\sum_{k=1}^{n} k - (d-a)\sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\star}{=} d\frac{n(n+1)}{2} - (d-a)n = \frac{n}{2}((n-1)d + 2a)$$

Observe que la igualdad etiquetada con ⋆ utiliza tanto a (13) como a (10) de la sección 1.5. Se enfatiza que el último término bajo consideración en la suma es $b_n = (n-1)d + a$, de modo que en la fórmula para s_n el factor $((n-1)d + 2a)$ es el primer término más el último término $(n-1)d + a$. Si se escribe $z = (n-1)d + a$ para el último término, entonces se puede resumir con

$$s_n = \frac{n}{2}((n-1)d + 2a) = \frac{n}{2}(a+z) \tag{13}$$

Tenga en cuenta que también se podría haber encontrado (13) mediante la misma técnica que se utilizó para encontrar (13) en la sección 1.5. Aquí, se ha preferido realizar el cálculo usando la notación de la sumatoria. Por último, cabe resaltar que la suma (13) dada en la sección 1.5 es la sumatoria de los n primeros términos de la sucesión aritmética especial con $a = 1$ y $d = 1$.

Ahora resuelva el problema 33 ◁

APLÍQUELO ▶

9. La señora Simpson depositó para Bart $1000 en una cuenta especial cada uno de sus primeros 21 cumpleaños. La cuenta ganó intereses a una tasa del 7% anual compuesto. De ello, resulta (vea el capítulo 5) que la cantidad depositada en el cumpleaños número $(22 - k)$ de Bart tiene un valor de $\$1000(1.07)^{k-1}$ en el cumpleaños 21 de Bart. Encuentre el monto total registrado en la cuenta especial de Bart en su cumpleaños 21.

EJEMPLO 10 Determinación de la suma de una sucesión geométrica

Encuentre una fórmula para la suma s_n de los primeros n términos de una sucesión geométrica (c_k) con un primer término a y una razón común r.

Solución: Puesto que la sucesión geométrica (c_k) en cuestión tiene, por el ejemplo 8, $ck = ar^{k-1}$, la suma requerida está dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{14}$$

De ello se deduce que al multiplicar (14) por r se tiene

$$rs_n = r\sum_{k=1}^{n} c_k = r\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^k = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \tag{15}$$

Si restamos (15) de (14) resulta

$$s_n - rs_n = a - ar^n \text{ de modo que } (1-r)s_n = a(1-r^n)$$

Por ende, se tiene

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{para } r \neq 1 \tag{16}$$

(Note que si $r = 1$, entonces cada término de la suma es a y, puesto que hay n términos, la respuesta fácil en este caso es $s_n = na$).

Ahora resuelva el problema 37 ◁

Para *algunas* sucesiones infinitas $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas $(s_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)_{k=1}^{\infty}$ parece acercarse a un número definido. Cuando este es el caso, el número se escribe como $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$. Aquí se considera solo el caso de una sucesión geométrica. Como se observa en (16), si $c_k = ar^{k-1}$, entonces, para $r \neq 1$, $s_k = \frac{a(1-r^k)}{1-r}$. Observe que solo el factor $1 - r^k$ depende de k. Si $|r| > 1$, entonces para valores grandes de k, $|r^k|$ se volverá grande, como también lo hará $|1 - r^k|$. De hecho, para $|r| > 1$ puede hacerse que los valores de $|1 - r^k|$ sean tan grandes como se quiera tomando k lo suficientemente grande. De ello se desprende que, para $|r| > 1$, las sumas $\frac{a(1-r^k)}{1-r}$ *no* se aproximen a un número definido. Si $r = 1$, entonces $s_k = ka$ y, de nuevo, las sumas no se aproximan a un *número* definido.

Sin embargo, para $|r| < 1$ (es decir, para $-1 < r < 1$), se puede hacer que los valores de r^k sean lo más cercano posible a 0, tomando una k lo suficientemente grande. (Asegúrese de quedar convencido acerca de que esto es cierto antes de seguir leyendo, porque el resto del análisis gira en torno a este punto). Por lo tanto, para $|r| < 1$, puede hacerse que los valores de $1 - r^k$ estén lo más cerca posible de 1, al tomar una k lo suficientemente grande. Por último, para $|r| < 1$, se puede hacer que los valores de $\frac{a(1-r^k)}{1-r}$ sean tan cercanos a $\frac{a}{1-r}$ como se desee tomando una k lo suficientemente grande. Precisamente en este sentido, una sucesión geométrica infinita con $|r| < 1$ tiene una suma y se tiene

$$\text{para } |r| < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r} \tag{17}$$

EJEMPLO 11 Determinación de la suma de una sucesión geométrica infinita

A una mujer rica le gustaría, a partir de ahora, legar \$100 000 al año divididos por igual entre todos sus descendientes directos. Ella no pone ningún límite de tiempo sobre esta donación y puede invertir en un depósito de fondos a largo plazo al 2% compuesto anualmente. ¿Cuánto debe invertir ahora para cumplir con ese compromiso a largo plazo?

Solución: Se escribe $R = 100\ 000$, el reloj se ajusta a 0 ahora mismo, y se mide el tiempo en años a partir de este momento. Con estas convenciones, se debe tener en cuenta el pago R en los tiempos 0, 1, 2, 3, …, k, … haciendo una única inversión ahora. (Tal sucesión de pagos se llama *perpetuidad*). El pago ahora simplemente le cuesta R. El pago al momento 1 tiene un *valor presente* de $R(1.02)^{-1}$. (Vea el capítulo 5). El pago en el momento 2 tiene un valor presente de $R(1.02)^{-2}$. El pago en el momento 3 tiene un valor presente de $R(1.02)^{-3}$ y, muy en general, el pago en el momento k tiene un valor presente de $R(1.02)^{-k}$. Su inversión de *ahora* debe cubrir exactamente el valor presente de *todos* estos pagos futuros. En otras palabras, la inversión debe ser igual a la suma

$$R + R(1.02)^{-1} + R(1.02)^{-2} + R(1.02)^{-3} + \cdots + R(1.02)^{-k} + \cdots$$

Se reconoce a la suma infinita como la suma de una serie geométrica, con un primer término $a = R = 100\ 000$ y una razón común $r = (1.02)^{-1}$. Dado que $|r| = (1.02)^{-1} < 1$, se puede evaluar la inversión requerida como

$$\frac{a}{1-r} = \frac{100\ 000}{1 - \dfrac{1}{1.02}} = \frac{100\ 000}{\dfrac{0.02}{1.02}} = \frac{100\ 000(1.02)}{0.02} = 5\ 100\ 000$$

En otras palabras, una inversión de apenas \$5 100 000 ahora, le permitirá a la mujer dejar \$100 000 al año a sus descendientes *para siempre*.

Ahora resuelva el problema 57 ◁

PROBLEMAS 1.6

En los problemas del 1 al 8, escriba el término indicado de la sucesión dada.

1. $a = \sqrt{2}, \; -\frac{3}{7}, \; 2.3, \; 57; \quad a_3$

2. $b = 1, \; 13, \; -0.9, \; \frac{5}{2}, \; 100, \; 39; \quad b_6$

3. $(a_k)_{k=1}^{7} = (3^k); \quad a_4$

4. $(c_k)_{k=1}^{9} = (3^k + k); \quad c_4$

5. $(a_k) = (2 + (k-1)3); \quad a_{24}$

6. $(b_k) = (5 \cdot 2^{k-1}); \quad b_6$

7. $(a_k) = (k^4 - 2k^2 + 1); \quad a_2$

8. $(a_k) = (k^3 + k^2 - 2k + 7); \quad a_3$

En los problemas del 9 al 12, encuentre un término general, (a_k), que se ajuste a los términos que aparecen en la sucesión dada.

9. $-1, \; 2, \; 5, \; 8$

10. $5, \; 3, \; 1, \; -1, \; \ldots$

11. $2, \; -4, \; 8, \; -16$

12. $5, \; \frac{5}{3}, \; \frac{5}{9}, \; \frac{5}{27}, \; \ldots$

En los problemas del 13 al 16, determine si las sucesiones dadas son iguales entre sí.

13. $((i+3)^3)$ y $(j^3 - 9j^2 + 9j - 27)$

14. $(k^2 - 4)$ y $((k+2)(k-2))$

15. $\left(\pi \frac{1}{2^{k-1}}\right)_{k=1}^{\infty}$ y $\left(\frac{\pi}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$

16. $(j^3 - 9j^2 + 27j - 27)_{j=1}^{\infty}$ y $((k-3)^3)_{k=1}^{\infty}$

En los problemas del 17 al 20, determine el término indicado de cada sucesión definida recursivamente.

17. $a_1 = 1, \; a_2 = 2, \; a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k; \quad a_7$

18. $a_1 = 1, \; a_{k+1} = a_{a_k}; \quad a_{17}$

19. $b_1 = 1, \; b_{k+1} = \frac{b_k}{k}; \quad b_6$

20. $a_1 = 1, \; a_{k+1} = (k+1) + a_k; \quad a_8$

En los problemas del 21 al 24, escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética, usando el primer término a y la diferencia común d que se proporcionan.

21. $a = 22.5, d = 0.9$

22. $a = 0, d = 1$

23. $a = 96, d = -1.5$

24. $a = A, d = D$

En los problemas del 25 al 28, escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica, usando el primer término a y la razón común r que se proporcionan.

25. $a = -2, r = -0.5$

26. $a = 50, r = (1.06)^{-1}$

27. $a = 100, r = 1.05$

28. $a = 3, r = \frac{1}{3}$

En los problemas del 29 al 32, escriba el término indicado de la sucesión aritmética, con los parámetros a y d dados, o de la sucesión geométrica, con los parámetros a y r dados.

29. Vigesimoséptimo término, $a = 3, d = 2$

30. Noveno término, $a = 2.7, d = -0.3$

31. Decimoprimer término, $a = 1, r = 2$

32. Séptimo término, $a = 2, r = 10$

En los problemas del 33 al 40, encuentre las sumas requeridas.

33. $\sum_{k=1}^{7} ((k-1)3 + 5)$

34. $\sum_{k=1}^{9} (k \cdot 2 + 9)$

35. $\sum_{k=1}^{6}((k-1)0.5+2.3)$

36. $\sum_{k=1}^{34}((k-1)10+5)$

37. $\sum_{k=1}^{10}100(1/2)^{k-1}$

38. $\sum_{k=1}^{10}50(1.07)^{k-1}$

39. $\sum_{k=1}^{10}50(1.07)^{1-k}$

40. $\sum_{k=1}^{7}5\cdot 2^{k}$

En los problemas del 41 al 46, encuentre las sumas infinitas, si es posible, o en su caso explique por qué la suma no se puede obtener.

41. $\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

42. $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$

43. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(17)^{k-1}$

44. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3}(1.5)^{k-1}$

45. $\sum_{k=1}^{\infty}50(1.05)^{1-k}$

46. $\sum_{j=1}^{\infty}75(1.09)^{1-j}$

47. Inventario Cada 30 días una tienda de comestibles compra 90 latas de sopa de fideos de elefante y, sorprendentemente, vende 3 latas cada día. Describa los niveles de inventario de sopa de fideos de elefante que hay al final de cada día, como una sucesión, y determine el nivel del inventario 19 días después del resurtido.

48. Inventario Si hoy la tienda de la esquina tiene a la venta 95 películas en DVD usadas y consigue vender 6 cada día, escriba los primeros siete términos de la sucesión del inventario diario de DVD de la tienda. ¿Cuántos DVD tendrá en inventario después de 10 días?

49. Cuenta de cheques Una cuenta corriente, que no gana ningún interés, contiene \$125.00 y su poseedor la olvida. Sin embargo, está sujeta a un cargo de \$5.00 al mes por concepto de servicios. El poseedor de la cuenta la recuerda después de 9 meses. ¿Qué cantidad contiene en ese momento la cuenta?

50. Cuenta de ahorros Una cuenta de ahorros, que genera intereses a una tasa del 5% anual compuesto, contiene \$125.00 y su poseedor la olvida; después de 9 años, la recuerda. ¿Qué cantidad contiene la cuenta en ese momento?

51. Cambio poblacional Una ciudad con población de 50 000 habitantes en 2009 está creciendo a una tasa del 8% anual. En otras palabras, al final de cada año la población es 1.08 veces la registrada a finales del año anterior. Describa la sucesión de la población y determine cuál será la población a finales de 2020 si se mantiene este ritmo de crecimiento.

52. Cambio poblacional Cada año, 5% de los habitantes de una zona rural se desplaza a la ciudad. Si la población actual es de 24 000 habitantes y esta tasa de disminución continúa, desarrolle una fórmula para la población en k años a partir de ahora.

53. Ingresos Los ingresos diarios actuales en un restaurante de hamburguesas de un campus universitario suman \$12 000. Durante los próximos siete días, se espera que los ingresos aumenten \$1000 diariamente a medida que los estudiantes regresan para el semestre de otoño. ¿Cuáles son los ingresos totales proyectados para los ocho días en los que se tienen datos pronosticados?

54. Ingresos El departamento de finanzas de un concesionario de automóviles va a recibir pagos por \$300 mensuales durante los próximos 60 meses, como pago del automóvil de Bart. El k-ésimo pago tiene un valor presente de \$300$(1.01)^{-k}$. La suma de los valores presentes de los 60 pagos debe ser igual al precio de venta del automóvil. Escriba una expresión para el precio de venta del automóvil y evalúelo utilizando su calculadora.

55. Valor futuro Dentro de seis años a partir de ahora, Nicole necesitará un nuevo tractor para su granja. A partir del próximo mes, ella depositará \$100 en el banco cada mes como ahorro para la compra inevitable. En seis años a partir de ahora, el k-ésimo depósito bancario tendrá un valor de $100(1.005)^{72-k}$ (debido al interés compuesto). Escriba una fórmula para la cantidad acumulada de dinero por los 72 depósitos bancarios. Use su calculadora para determinar cuánto tendrá Nicole a su disposición para la compra del tractor.

56. Valor futuro Lisa acaba de cumplir siete años de edad. A ella le gustaría ahorrar un poco de dinero mensualmente, a partir del próximo mes, de modo que en su cumpleaños número 21 tenga \$1000 en su cuenta bancaria. Marge le dijo que, con los tipos de interés actuales, su k-ésimo depósito tendrá un valor en su cumpleaños número 21 de $(1.004)^{168-k}$ veces la cantidad depositada. Lisa quiere depositar la misma cantidad cada mes. Escriba una fórmula para la cantidad que Lisa debe depositar cada mes con el fin de alcanzar su objetivo. Use su calculadora para evaluar la cantidad requerida.

57. Perpetuidad El testamento de Brad incluye una dotación para la Dalhousie University, dotación que consiste en otorgar cada año después de su muerte, y para siempre, un premio de \$500 al mejor estudiante de la clase de matemáticas de negocios, MATH 1115. El patrimonio de Brad puede hacer una inversión al 5% compuesto anual para pagar esta dotación. Adapte la solución del ejemplo 11 para determinar cuánto le costará esta dotación al patrimonio de Brad.

58. Perpetuidad Resuelva de nuevo el problema 57 bajo el supuesto de que el patrimonio de Brad puede hacer una inversión al 10% compuesto anual.

59. La sucesión de Fibonacci, dada en la expresión (7), se define recursivamente usando la suma. ¿Es una sucesión aritmética? Explique.

60. La sucesión factorial dada en la expresión (6) se define recursivamente usando la multiplicación. ¿Es una sucesión geométrica? Explique.

61. La definición recursiva de una sucesión aritmética (b_k) implica iniciar con un número a y sumar un número fijo d a cada término para obtener el siguiente término. De igual modo, la definición recursiva para una sucesión geométrica (c_k) implica iniciar con un número a y multiplicar cada término por un número fijo r para obtener el siguiente término. Si en lugar de la suma o la multiplicación se utiliza la exponenciación, se tienen otras dos clases de sucesiones definidas recursivamente:

$$d_1 = a \text{ y, para cada entero positivo } k,\ d_{k+1} = (d_k)^p$$

para los números reales fijos a y p, y

$$e_1 = a \text{ y, para cada entero positivo } k,\ e_{k+1} = b^{e_k}$$

para los números reales fijos a y b. Con el fin de tener una idea sobre cómo puede crecer el tamaño de las sucesiones, tome cada uno de los parámetros a, d, r, p y b que aparecen en estas definiciones como el número 2 y escriba los primeros cinco términos de las sucesión aritmética (b_k), la sucesión geométrica (c_k) y las sucesiones (d_k) y (e_k) definidas líneas arriba.

Repaso del capítulo 1

Términos y símbolos importantes

Sección 1.1 **Aplicaciones de ecuaciones**
costo fijo costo variable costo total ingreso total utilidad

Sección 1.2 **Desigualdades lineales**
$a < b$ $a \leq b$ $a > b$ $a \geq b$ $a < x < b$
desigualdad sentido de una desigualdad
desigualdades equivalentes desigualdad lineal
intervalo intervalo abierto intervalo cerrado extremos
(a, b) $[a, b]$ $(-\infty, b)$ $(-\infty, b]$ (a, ∞) $[a, \infty)$ $(-\infty, \infty)$

Sección 1.3 **Aplicaciones de las desigualdades**
renta *versus* compra
activos circulantes pasivos circulantes razón de circulante

Sección 1.4 **Valor absoluto**
distancia valor absoluto, $|x|$ unión, $\cup$

Sección 1.5 **Notación de sigma o suma**
notación $\sum$ índice cotas

Sección 1.6 **Sucesiones**
sucesión aritmética
sucesión geométrica
suma de una sucesión aritmética
suma de una sucesión geométrica

Resumen

Cuando un problema se ha expresado en palabras, no se puede proporcionar cualquier ecuación. Es posible que usted deba construir ecuaciones y desigualdades (con frecuencia más de una) traduciendo los enunciados verbales del problema en enunciados matemáticos. Este proceso es el *modelado matemático*. Es importante que primero se lea el problema más de una vez hasta que se entienda con claridad la información proporcionada y qué es lo que debe encontrarse. Después debe seleccionarse una letra para representar la cantidad desconocida que se desea determinar. Utilice las relaciones y los datos proporcionados en el problema y tradúzcalos en ecuaciones o desigualdades que involucren las variables. Por último, resuelva las ecuaciones (respetando las desigualdades) y vea si su solución responde a lo que se desea conocer. Algunas veces las soluciones a las *ecuaciones* no serán una respuesta para el *problema* (pero pueden ser útiles en la obtención de dicha respuesta).

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que al aplicarse a una desigualdad garantizan obtener una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

La definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0$$

Se interpreta $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución de la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo $(-d, d)$. La solución a $|x| > d$ consiste en la unión de dos intervalos y está dada por $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$. Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$ **2.** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a - b| = |b - a|$ **4.** $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$

La notación de suma proporciona una forma compacta y precisa de escribir sumas que tienen muchos términos. Las ecuaciones básicas de la notación de suma son solo replanteamientos de las propiedades de la suma. Ciertas sumas en particular, como $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ son útiles y dignas de recordarse.

Las sucesiones aritméticas y geométricas tienen muchas aplicaciones, particularmente en los negocios. Las sumas de sucesiones, en especial las geométricas, serán importantes en el estudio de las matemáticas financieras del capítulo 5.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 15, resuelva la ecuación o la desigualdad.

1. $3x - 1 \geq 2(x - 3)$

2. $2x - (7 + x) \leq x$

3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$

4. $-2(x + 6) > x + 4$

5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$

6. $2\left(6 - \frac{5}{2}p\right) < 7$

7. $\frac{x + 5}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$

8. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{x}{5}$

9. $\frac{1}{4}s - 3 \leq \frac{1}{8}(3 + 2s)$

10. $\frac{1}{3}(t + 2) \geq \frac{1}{4}t + 4$

11. $|4 - 3x| = 9$

12. $\left|\frac{5x - 6}{13}\right| = 0$

13. $|2z - 3| < 5$

14. $4 < \left|\frac{2}{3}x + 5\right|$

15. $|3 - 2x| \geq 4$

16. Evalúe $\sum_{k=1}^{8}(k + 3)^3$ primero elevando al cubo el binomio y después usando las ecuaciones (10), (13), (14) y (15) de la sección 1.5.

17. Evalúe $\sum_{i=4}^{11} i^3$ usando $\sum_{i=1}^{11} i^3 - \sum_{i=1}^{3} i^3$. Explique por qué funciona esto citando algunas ecuaciones de la sección 1.5 que puedan usarse. Explique por qué la respuesta es necesariamente la misma que en el problema 16.

18. Utilidad ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?

19. Intercambio de existencias En cierto día, se negociaron 1132 diferentes títulos en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban incremento de las que mostraban una disminución y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron bajas?

20. Impuesto a las ventas El impuesto sobre las ventas en cierto lugar es de 6%. Si durante un año hubo un total de $3039.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?

21. Asignación de producción Una compañía fabricará un total de 10 000 unidades de su producto en las plantas A y B. Los datos disponibles son los siguientes:

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	$5	$5.50
Costos fijos	$30 000	$35 000

Considerando las dos plantas, la compañía ha decidido asignar no más de $117 000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

22. Tanques de propano Una compañía va a reemplazar dos tanques de propano por un tanque nuevo. Los tanques viejos son cilíndricos, cada uno con 25 pies de altura. El primero tiene un radio de 10 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo es esencialmente esférico. Determine su radio si tendrá el mismo volumen que los dos tanques viejos juntos. [*Sugerencia:* El volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base circular y h es la altura del tanque. El volumen de un tanque esférico es $W = \frac{4}{3}\pi R^3$, donde R es el radio del tanque].

23. Razón operativa La *razón operativa* de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) sobre las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón operativa menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón operativa en el rango de 80 a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas por $236 460 en un periodo, escriba una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón operativa por debajo de 90 por ciento.

24. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión aritmética que tiene un primer término de 32 y diferencia común de 3.

25. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión geométrica que tiene un primer término de 100 y razón común de 1.02.

26. Encuentre la suma de los primeros cinco términos de la sucesión aritmética que tiene un primer término de 32 y diferencia común de 3.

27. Encuentre la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica que tiene un primer término de 100 y razón común de 1.02.

EXPLORE Y AMPLÍE Grabación de calidad variable[1]

En la actualidad, existe una desconcertante variedad de equipo tecnológico que un usuario puede usar para grabar películas, programas de televisión, programas de computadora, juegos y canciones. Siendo el equipo un iPod, DVD, CD o incluso VHS, casi siempre es posible grabar a relaciones de compresión variables con calidad variable.

(Si usted está usando un dispositivo de cinta antiguo con diferentes *velocidades*, entonces la velocidad más rápida tiene una relación de 1 a 1 mientras que una velocidad más lenta —que permite almacenar r veces más material grabado— tiene una compresión de r a 1. Por ejemplo, el estándar del VHS, SP, es 1 a 1, mientras que el estándar LP es 2 a 1 y el EP es 3 a 1).

El medio de almacenamiento puede ser un disco o una cinta (o algo que aún no se encuentra en el mercado), pero siempre existe cierta compensación inherente entre cantidad y calidad en cualquier dispositivo de grabación imaginable. Para cualquier medio, entre más información se almacene debido a una mayor compresión, se obtendrá menor calidad.

Suponga, por causa del argumento, que desea grabar una película de 210 minutos de duración en un DVD. Para lograr que toda cupiera en un solo disco a una relación de compresión fija, necesitaría la relación que permite obtener entre 3 y 4 horas de tiempo de grabado. La relación que se considera tiene la calidad necesaria para grabar una película permite solo alrededor de 2 horas de grabación y, por lo tanto, su solo uso no sería suficiente. Sin embargo, usted podría desear grabar tanto como fuera posible a la mejor calidad cambiando de una relación a otra en un tiempo calculado con anticipación.

Resolveremos el problema de encontrar el tiempo *de cambio* de un modo general que sea útil para todas las aplicaciones de este tipo. Deseamos almacenar M minutos de entretenimiento en un dispositivo que con una compresión de 1 a 1 almacenará m minutos. Tenemos relaciones de compresión disponibles de r a 1 y R a 1, digamos con $1 < r < R$, de manera que R corresponde a empaquetar más a una calidad menor. El número $\frac{M}{r}$ proporciona el número de 1 a 1 minutos que se necesitarán para almacenar M minutos a una relación de r a 1. Si el número $\frac{M}{r}$ es mayor que m, entonces no podremos almacenar todos los M minutos en nuestro dispositivo a una relación r. Suponiendo que $\frac{M}{R}$ *es* menor que m, deseamos encontrar el tiempo t en que será necesario cambiar de r a R para grabar todos los M minutos de entretenimiento.

Si se graban t minutos a la relación r, entonces se consumirán $\frac{t}{r}$ de los m minutos con relación 1 a 1 disponibles para tiempo de grabación. Los restantes $M - t$ minutos de entretenimiento consumirán otros $\frac{M-t}{R}$ de los m minutos disponibles 1 a 1 con relación R. Así, para usar *todo* el espacio de grabación disponible, debemos encontrar un tiempo t de modo que

$$\frac{t}{r} + \frac{M-t}{R} = m$$

Aunque esta ecuación, que es completamente literal, podría parecer complicada, resulta muy sencilla con respecto a t, la variable que se desea resolver. De hecho, es *lineal* en t y se necesitan solo unos cuantos pasos para obtener una solución general.

$$\begin{aligned} \frac{t}{r} + \frac{M}{R} - \frac{t}{R} &= m \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)t &= m - \frac{M}{R} \\ \left(\frac{R-r}{rR}\right)t &= \frac{mR - M}{R} \\ t &= \frac{mR-M}{R} \cdot \frac{rR}{R-r} \end{aligned}$$

$$t = \frac{r(mR-M)}{R-r}$$

Observe que la fórmula no es simétrica con respecto a r y R. Nos dice cuántos minutos después de empezar a grabar a alta calidad debemos cambiar a la calidad más baja con la intención de completar la grabación en el espacio disponible. Si se deseara guardar el componente de calidad más alta para el *final* de la grabación, sería necesario ajustar la fórmula. Vea los problemas 1, 2, 3, 4 y 7. Debe enfatizarse que la fórmula no necesita memorizarse (a menos que se planee utilizarla con mucha frecuencia). El método es mucho más importante. La existencia de la solución general asegura que el método siempre funcionará.

En los problemas siguientes, trate de plantear y resolver los problemas específicos usando el método en vez de sustituir en la fórmula.

Para aprender más acerca de los esquemas de compresión de datos, visite `wikipedia.org` y busque “data compression” y términos relacionados.

Problemas

Una videograbadora que usa cinta estándar T-120 graba durante 2 horas en modo SP. Así que $m = 120$ para dicho equi-po de grabación estándar. Utilice este valor en los problemas del 1 al 4.

1. Si los modos LP y SP se utilizan para grabar una película de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe cambiarse *de* LP *a* SP?

---

[1] Adaptado de Gregory N. Fiore, “An Application of Linear Equations to the VCR”, *Mathematics Teacher* 81 (octubre de 1988), pp. 570-572. Con permiso del National Council of Teachers of Mathematics.

2. Si los modos EP y SP se utilizan para grabar un programa en vivo de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuántos minutos después de iniciado el programa debe cambiarse de EP a SP?

3. Si los modos LP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de M minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de LP a SP?

4. Los modos EP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de M minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?

5. Parea un disco compacto estándar, el valor de m es de alrededor de 74. Utilice la función Solver de una calculadora gráfica para resolver la ecuación

$$\frac{x}{12} + \frac{1080 - x}{20} = 74$$

Después, de una manera similar, resuelva la ecuación

$$\frac{x}{15} + \frac{1590 - x}{24} = 74$$

6. En el contexto de la grabación comprimida de audio en discos compactos, ¿qué representa la segunda ecuación en el problema 5?

7. Obtenga la fórmula general para encontrar el tiempo necesario para cambiar la relación de grabación si la calidad más alta (relación r) debe reservarse para el final de la grabación.

FUNCIONES
Y GRÁFICAS

2

Suponga que un hombre de 180 libras bebe cuatro cervezas en rápida sucesión. Se sabe que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se eleva y después disminuye en forma paulatina hasta cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye de nuevo?

Si se obtienen los valores medidos de la CAS para este bebedor en particular, pueden mostrarse en una tabla, como sigue:

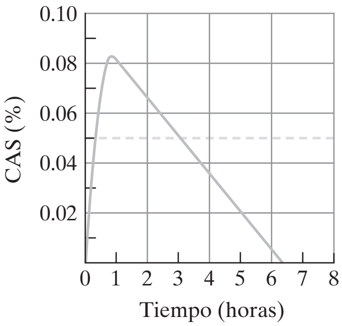
Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
CAS(%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla solo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podría relacionarse la CAS con el tiempo t utilizando una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el capítulo 0):

$$\begin{aligned} \text{CAS} &= -0.1025t^2 + 0.1844t && \text{si } t \leq 0.97 \\ \text{CAS} &= -0.0152t + 0.0972 && \text{si } t > 0.97 \end{aligned}$$

Sin embargo, tal como sucede con la tabla, resulta difícil ver las ecuaciones y entender rápidamente lo que ocurre con la CAS a lo largo del tiempo.



Quizá la mejor descripción de los cambios en la concentración de alcohol en la sangre a lo largo del tiempo sea una gráfica como la de la izquierda. Ahí, con facilidad se observa qué sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, tiene un máximo de 0.083% después de aproximadamente una hora, y luego disminuye de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que, por más de tres horas, la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en que, por lo regular, las habilidades para conducir algún vehículo empiezan a declinar. La curva cambiará de un bebedor a otro, pero por lo general las mujeres se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no solo por la diferencia de peso, también a consecuencia del diferente contenido de agua en el cuerpo de mujeres y hombres.

La relación entre el tiempo y el contenido de alcohol en la sangre es ejemplo de una función. En este capítulo se tratan a fondo las funciones y sus gráficas.

Objetivo

Entender lo que es una función y determinar los dominios y valores de una función.

2.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más básicos en todas las matemáticas y resulta esencial para el estudio del cálculo.

A diario, en los discursos de personas educadas escuchamos decir que “Las tasas de interés están en función de los precios del petróleo” o “El monto de la pensión está en función de los años trabajados” o “La concentración de alcohol en la sangre después de beber cerveza es una función del tiempo”. Algunas veces dicho uso está en concordancia con el uso matemático, pero no siempre. Debemos ser más cuidadosos al usar la palabra *función* con el fin de que nos sea útil matemáticamente; sin embargo, hay otros ejemplos de su uso en la vida diaria que podrían resultar valiosos. En los siguientes tres párrafos se abordará la definición de dicho término.

Una idea clave es darse cuenta de que un **conjunto**, no necesita tener números como **elementos**. Se puede hablar de un conjunto de tasas de interés, un conjunto de precios del petróleo, un conjunto de ingresos, etc. Si X y Y son conjuntos, en esa generalidad, y x es un elemento de X y y es un elemento de Y, entonces se puede escribir (x, y) para lo que se llama el **par ordenado** que consta de x y y en el orden mostrado. Por lo tanto, (y, x) es en general diferente de (x, y). De hecho, teniendo en cuenta dos pares ordenados (x, y) y (a, b), se tiene que $(x, y) = (a, b)$ si y solo si $x = a$ y $y = b$. Se escribirá $X \times Y$ para describir el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), donde x es un elemento de X y y es un elemento de Y. Por ejemplo, si x es el conjunto de los precios del petróleo y Y es el conjunto de las tasas de interés; entonces, un elemento de $X \times Y$ es un par (p, r), donde p es un precio del petróleo y r es una tasa de interés.

Una **relación** R de un conjunto X a un conjunto Y es un subconjunto de $X \times Y$. Esto significa que cualquier elemento de R es también un elemento de $X \times Y$. Si sucede que (x, y) es un elemento de R, entonces se dice que x está relacionado con R a y y se escribe xRy. Cada uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ son relaciones del conjunto $(-\infty, \infty)$ de todos los números reales a sí mismo. Por ejemplo, se puede definir al símbolo $<$ como el subconjunto de $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ que consta de todo par ordenado (a, b) tal que $a < b$ es verdadera. El uso de xRy para denotar que “x está relacionado con y mediante R” se inspira en la notación de las desigualdades. Para dar otro ejemplo, sean P y L, respectivamente, el conjunto de todos los puntos y el conjunto de todas las líneas en un plano dado. Para un par ordenado (p, l) en $P \times L$, se da el caso de que “p está en l” o bien “p no está en l”. Si se escribe $p \circ l$ para “p está en l”, entonces $\circ$ es una relación de P a L en el sentido de este párrafo. De regreso a los precios y tasas, se podría decir que el precio del petróleo p está relacionado con la tasa de interés r mediante R, y se escribe pRr, si “ha habido un momento en el que tanto el precio del petróleo ha sido p como la tasa de interés bancario ha sido r”.

Una **función** f de un conjunto X a un conjunto Y es una relación de X a Y con la propiedad especial de que si xfy y xfz son verdaderas, entonces $y = z$. (En muchos libros también se requiere que, para cada x en X, exista una y en Y de tal manera que xfy. Aquí no se impondrá esta condición adicional). El punto es que si x está relacionado con cualquier cosa mediante f, entonces esa cosa está determinada únicamente por x. Después de todo, la definición dice que si dos cosas, y y z, están ambas relacionadas con x mediante f, entonces en realidad son lo mismo, $y = z$. Se escribe $y = f(x)$ para la única y, si es que existe alguna, de tal modo que x esté relacionada con y mediante f.

Con esta definición, se observa que la noción de función no es simétrica en x y y. La notación $f\colon X \longrightarrow Y$ se utiliza a menudo para decir que “f es una función de X a Y” porque pone de manifiesto la direccionalidad del concepto.

Ahora se examinarán los ejemplos derivados del habla cotidiana. La relación R definida por pRr si “ha habido un momento en el que tanto el precio del petróleo ha sido p y la tasa de interés bancario ha sido r” *no* define una función de los precios del petróleo para con las tasas de interés. Muchos recordarán cuando el petróleo costaba \$30 por barril y la tasa de interés bancario era de 6% y, en otra ocasión, cuando el petróleo costaba \$30 por barril y la tasa de interés era de 1%. En otras palabras, tanto (30, 6) como (30, 1) son pares ordenados que pertenecen a la relación R, y puesto que $6 \neq 1$, R no es una función. Para que no se piense que podemos estar tratando de hacerlo al revés, escribiremos R° para describir la relación del conjunto de las tasas de interés para con el conjunto de los precios del petróleo dados por $rR^{\circ}p$ si y solo si pRr. Si usted puede recordar cuando la tasa de interés era de 6% y el precio del petróleo de $30 por barril y cuando la tasa era de 6% y el petróleo costaba $40 el barril, entonces tendrá tanto a (6, 30) como a (6, 40) en la relación R°. El hecho de que $30 \neq 40$ muestra que R° tampoco es una función.

Por otra parte, suponga que una persona que acaba de beber cinco cervezas se somete a una prueba de concentración del alcohol en la sangre, a partir de ese momento y cada hora siguiente durante seis horas. Para cada uno de los valores de tiempo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la medición de la concentración de alcohol en la sangre producirá *exactamente un valor*. Si se escribe T para el conjunto de todas las veces en que se hace la prueba, comenzando con la primera, y B para el conjunto de todos los valores de concentración de alcohol en la sangre, entonces la prueba de la persona en cuestión determinará una función $b: T \longrightarrow B$, donde para cualquier tiempo t en T, $b(t)$ es *la* concentración de alcohol en la sangre de la persona en el tiempo t.

No es cierto que "El monto de la pensión está en función de los años trabajados". Si el valor de los "años trabajados" es 25, el valor del "monto de la pensión" aún no puede determinarse. En la mayoría de las organizaciones, un director general y un gerente de sistemas tendrán pensiones de retiro muy diferentes después de 25 años de servicio. Sin embargo, en este ejemplo podría decirse que, *para cada descripción de trabajo en una organización en particular*, el monto de la pensión está en función de los años trabajados.

Si se invierten $100 a una tasa de interés simple del 6%, entonces el interés ganado I es una función de la cantidad de tiempo t que el dinero permanece invertido. Estas cantidades están relacionadas por la fórmula

$$I = 100(0.06)t, \tag{1}$$

Aquí, para cada valor de t, existe exactamente un valor de I dado por la ecuación (1). En una situación como esta, con frecuencia se escribe $I(t) = 100(0.06)t$ para reforzar la idea de que el valor de I está determinado por el valor de t. Algunas veces se escribe $I = I(t)$ para expresar que I es una función de t aún si no se conoce una fórmula que lo especifique. La fórmula (1) asigna la salida 3 a la entrada $\frac{1}{2}$ y la salida 12 a la entrada 2. Puede tomarse a la fórmula (1) como la definición de una *regla:* multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación con flechas:

$$t \quad \mapsto \quad 100(0.06)t$$

Una fórmula proporciona un modo de describir una regla para cubrir potencialmente de manera infinita muchos casos, pero si existe solo una cantidad finita de valores de la variable de entrada, como en el párrafo inicial del capítulo, entonces la *regla* tal como está dada por las observaciones registradas en la tabla no será parte de alguna *fórmula* reconocible. A continuación, se usará la palabra *regla* en lugar de *fórmula* para permitir captar esta útil generalidad. La siguiente definición es a veces más fácil de recordar que la descripción de una función como un tipo especial de relación.

Definición

Una ***función*** $f : X \longrightarrow Y$ es una regla que asigna a cada elemento x de X, como máximo, un elemento de Y. Si un elemento se asigna a x en X, se denota por $f(x)$. El subconjunto de X que consiste en todas las x para las cuales $f(x)$ está definida, se llama ***dominio*** de f. Al conjunto de todos los elementos contenidos en Y de la forma $f(x)$, para algunas x en X, se le llama ***rango*** de f.

Para la función del interés definida por la ecuación (1), el número de entrada t no puede ser negativo porque el tiempo negativo no tiene sentido en este ejemplo. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos; esto es, todo $t \geq 0$, donde la variable proporciona el tiempo transcurrido desde el momento en que se hizo la inversión.

En ocasiones, a una variable que toma los valores presentes en el dominio de una función $f : X \longrightarrow Y$ se le llama **entrada** o **variable independiente** para f. A veces, a una variable que toma valores presentes en el rango de f se le llama **salida** o **variable dependiente** de f. Por lo tanto, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la variable dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación:

$$y = x + 2 \tag{2}$$

define a y como una función de x. La ecuación proporciona la regla: "Sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

¡ADVERTENCIA!

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero la relación no da a y como una función de x.

No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por lo tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de una función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones en dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x existe exactamente una salida $2x$. Así que y es una función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y, existe exactamente una salida, $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

Por lo general, las letras f, g, h, F, G, etc., se usan para nombrar funciones. Por ejemplo, la ecuación (2), $y = x + 2$, define a y como una función de x, donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que f representa esta regla. Entonces se dice que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, se escribe $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". De manera similar, $f(-4) = -2$. En forma más general, si x es cualquier entrada, se tiene la notación siguiente:

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f, el cual resulta cuando la regla f se aplica a la entrada x a partir del dominio de f.

$$\underbrace{\overset{\substack{\text{entrada}\\ \downarrow}}{f(x)}}_{\substack{\uparrow\\ \text{salida}}}$$

¡ADVERTENCIA!

$f(x)$ **no** significa f veces x. $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

Así, la salida $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, puede escribirse $f(x) = y = x + 2$, o simplemente

$$f(x) = x + 2$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, se reemplaza con 3 cada x presente en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Los números de salida también se llaman **valores funcionales**.

En otro ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$ define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g\colon x \mapsto x^3 + x^2$$

En otras palabras, g suma el cubo de la entrada al cuadrado de la entrada. Algunos valores funcionales son:

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^3 + 2^2 = 12 \\ g(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 \\ g(t) &= t^3 + t^2 \\ g(x+1) &= (x+1)^3 + (x+1)^2 \end{aligned}$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x + 1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$. Cuando se haga referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, con toda libertad se dirá que "la función $g(x) = x^3 + x^2$" y, de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

A menos que se establezca algo diferente, el dominio de una función $f : X \longrightarrow Y$ es el conjunto de todas las x incluidas en X para las cuales $f(x)$ tiene sentido como un elemento de Y. Cuando X y Y son $(-\infty, \infty)$, esta convención con frecuencia se refiere a restricciones aritméticas. Por ejemplo, suponga que

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}$$

Aquí puede usarse cualquier número real para x excepto 6, porque el denominador es 0 cuando x es 6. De manera que se entiende que el dominio de h consiste en todos los números reales excepto 6. Una notación útil para ilustrar este conjunto es $(-\infty, \infty) - \{6\}$. De manera más general, si A y B son subconjuntos de un conjunto X, entonces se escribe $A - B$

para el conjunto de todas las x en X tales que x está en A pero x *no* está en B. También se observa que el rango de h es el conjunto de todos los números reales excepto 0. Cada salida de h es una fracción y la única manera de que una fracción pueda ser 0 es que su numerador sea 0. Si se tiene

$$\frac{1}{x-6} = \frac{c}{c(x-6)} \qquad \text{para toda } c \neq 0$$

por el *principio fundamental de las fracciones*, se observa que 0 no es un valor funcional para h. Pero si y es cualquier número real distinto de cero, se puede resolver $\frac{1}{x-6} = y$ para x y obtener $x = 6 + \frac{1}{y}$ como la entrada (única) para la cual $h(x)$ es la y dada. Así, el rango es $(-\infty, \infty) - \{0\}$, el conjunto de todos los números reales distintos de 0.

Igualdad de funciones

Decir que dos funciones $f, g : X \longrightarrow Y$ son iguales, denotado por $f = g$, es igual a decir que:

1. El dominio de f es igual al dominio de g;
2. Para toda x en el dominio de f y g, $f(x) = g(x)$.

El requisito 1 dice que un elemento x está en el dominio de f si y solo si x está en el dominio de g. Por ende, si se tiene que $f(x) = x^2$, sin mención explícita del dominio, y $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$, entonces $f \neq g$. Aquí, el dominio de f es toda la recta real $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Por otro lado, si se tiene $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$, entonces se entiende que tanto para f como para g el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el criterio para decidir si $f = g$ consiste en saber si, para cada número real x, se tiene que $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Pero esto es cierto. De hecho, los libros de texto antiguos se refieren a los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ como "identidades" para indicar que son ciertos para cualquier valor admisible de la variable y distinguirlos de los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = 0\cdot$ que son verdaderas solo para algunos valores de x.

Dadas las funciones f y g, se tiene que $f \neq g$ *si* el dominio de f es diferente del dominio de g o *si* existe alguna x para la cual $f(x) \neq g(x)$.

EJEMPLO 1 Determinación de la igualdad de funciones

Determine cuáles de las siguientes funciones son iguales.

a. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}$

b. $g(x) = x + 2$

c. $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d. $k(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Solución: El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de 1, mientras que el de g es el conjunto de todos los números reales. (Para éstos se sigue la convención de que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido). Se tendrá que decir más acerca de funciones como h y k que se definen por *casos* en el ejemplo 4 de la sección 2.2. Aquí se observa que tanto el dominio de h como el de k es $(-\infty, \infty)$, puesto que para ambos existe una regla que tiene sentido para todos los números reales. Los dominios de g, h y k son iguales entre sí, pero el de f es diferente. Entonces, por el requisito 1 para la igualdad de funciones $f \neq g$, $f \neq h$ y $f \neq k$. Por definición, $g(x) = h(x) = k(x)$ para toda $x \neq 1$, de manera que la igualdad de g, h y k depende de sus valores en 1. Como $g(1) = 3$, $h(1) = 0$ y $k(1) = 3$, se concluye que $g = k$ y $g \neq h$ (y $h \neq k$).

Aunque este ejemplo pudiera parecer artificial, es representativo de situaciones que surgen frecuentemente en el cálculo.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

1. El área de un círculo depende de la longitud del radio del círculo.
a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

EJEMPLO 2 Determinación de dominios

Encuentre el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

Solución: No es posible dividir entre cero, así que deben encontrarse todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Así que se iguala el denominador a cero y se resuelve para x:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 && \text{ecuación cuadrática} \\ (x-2)(x+1) &= 0 && \text{factorizando} \\ x &= 2, -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de f consiste en todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$ como una función $g: (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$

Solución: $\sqrt{2t-1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual a cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t-1}$ no es un número real, por ende se asume que

$$\begin{aligned} 2t - 1 &\geq 0 \\ 2t &\geq 1 && \text{sumando 1 en ambos lados} \\ t &\geq \frac{1}{2} && \text{dividiendo ambos lados entre 2} \end{aligned}$$

Así, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

APLÍQUELO ▶

2. El tiempo necesario para recorrer cierta distancia depende de la rapidez a la cual se haga el recorrido.
a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo necesario si la distancia a recorrer es de 300 millas y la rapidez es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?
d. Encuentre $t(x)$, $t\left(\frac{x}{2}\right)$ y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.
e. ¿Qué le pasa al tiempo si la rapidez se reduce (o divide) por una constante c? Describa esta situación usando una ecuación.

EJEMPLO 3 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Cualquier número real puede utilizarse como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. Encuentre $g(z)$.

Solución: Al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5$$

b. Encuentre $g(r^2)$.

Solución: Al reemplazar cada x por r^2 en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5$$

c. Encuentre $g(x + h)$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 31(a) ◁

¡ADVERTENCIA!

No confunda la notación. En el ejemplo 3(c), encontramos $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. $g(x + h)$, $g(x) + h$ y $g(x) + g(h)$ son todas cantidades muy diferentes.

EJEMPLO 4 Determinación de un cociente de diferencias

Si $f(x) = x^2$, determine $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución: La expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencias**. Aquí el numerador es una diferencia de valores funcionales. Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \quad \text{para } h \neq 0\end{aligned}$$

El cociente de diferencias de una función es un concepto importante para el cálculo.

Si se considera al cociente de diferencias original como una función de h, entonces es diferente de $2x + h$ porque 0 no está en el dominio del cociente de diferencias original, sino que *está* en el dominio predeterminado de $2x + h$. Por esta razón, se tuvo que restringir la igualdad final.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, la función de interés estudiada con anterioridad, $I = 100(0.06)\,t$, tiene $t \geq 0$ porque t representa el tiempo transcurrido desde el momento en que se hizo la inversión. El ejemplo 5 proporciona otra ilustración.

APLÍQUELO ▶

3. Suponga que la función de demanda semanal de *pizzas* grandes en una pizzería local es $p = 26 - \dfrac{q}{40}$.

a. Si el precio actual es de \$18.50 por pizza, ¿cuántas pizzas se venden cada semana?

b. Si se venden 200 pizzas cada semana, ¿cuál es el precio actual?

c. Si el propietario desea duplicar el número de pizzas vendidas cada semana (a 400), ¿cuál debe ser el precio?

EJEMPLO 5 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \quad \mapsto \quad \frac{100}{q} = p$$

Por ejemplo,

$$20 \quad \mapsto \quad \frac{100}{20} = 5$$

esto es, cuando q es 20, p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda**. La variable independiente es q y la variable dependiente es p. Como q no puede ser 0 (la división entre 0 no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio son todos los valores de q tales que $q > 0$.

Ahora resuelva el problema 43 ◁

Se ha visto que una función es una regla que asigna exactamente una salida en el rango a cada número de entrada en el dominio. Para la regla dada por $f(x) = x^2$, en la figura 2.1 se ilustran algunas asignaciones de muestra por medio de flechas. El ejemplo siguiente analiza una regla dada por un listado finito en vez de una fórmula algebraica.

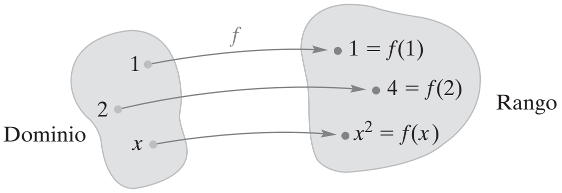


FIGURA 2.1 Algunos valores funcionales para $f(x) = x^2$.

APLÍQUELO ▶

4. Para la función de oferta que se da en la tabla siguiente, determine la función del ingreso semanal, suponiendo que se venden todas las unidades ofrecidas.

p Precio por unidad	q Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

EJEMPLO 6 Programa de oferta

La tabla de Aplíquelo, punto 4, dada en esta página es *un programa de oferta.* Una tabla de este tipo lista para cada uno de los precios p de cierto producto, la cantidad q que los fabricantes ofrecerán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad, de modo que se muestra a q como una función de p.

Pero además, para cada cantidad, la tabla proporciona exactamente un precio, que también exhibe a p como una función de q. Si se escribe $q = f(p)$, entonces la tabla da

$$f(500) = 11 \quad f(600) = 14 \quad f(700) = 17 \quad f(800) = 20$$

Si se escribe $p = g(q)$, entonces la tabla da

$$g(11) = 500 \quad g(14) = 600 \quad g(17) = 700 \quad g(20) = 800$$

Observe que se tiene $g(f(p)) = p$, para todos los valores de p, y $f(g(q)) = q$ para todos los valores de q. Se abunda sobre los pares de funciones de este tipo en la sección 2.4. Las dos funciones determinadas por esta tabla se llaman **funciones de oferta**.

Ahora resuelva el problema 53 ◁

PROBLEMAS 2.1

En los problemas del 1 al 4, determine si las funciones dadas son iguales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

2. $G(x) = (\sqrt{x+1})^2$; $H(x) = x + 1$

3. $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$; $g(x) = x - 1$

En los problemas del 5 al 16, obtenga el dominio de cada función.

5. $f(x) = \dfrac{6}{x - 1}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{5}$

7. $h(x) = \sqrt{x - 3}$

8. $K(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z - 1}}$

9. $f(z) = 3z^2 + 2z - 4$

10. $H(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

11. $f(x) = \dfrac{9x - 9}{2x + 7}$

12. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$

13. $g(y) = \dfrac{4}{y^2 - 4y + 4}$

14. $\phi(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 + x - 6}$

15. $h(s) = \dfrac{3 - x^2}{3x^2 - 5x - 2}$

16. $G(r) = \dfrac{2}{r^2 + 1}$

En los problemas del 17 al 28, determine los valores funcionales para cada una de las funciones.

17. $f(x) = 2x + 1$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$

18. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4)$, $H(\sqrt{2})$, $H\left(\dfrac{2}{3}\right)$

19. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8)$, $G(u)$, $G(u^2)$

20. $F(x) = -7x + 1$; $F(s)$, $F(t + 1)$, $F(x + 3)$

21. $\gamma(u) = 2u^2 - u$; $\gamma(-2)$, $\gamma(2v)$, $\gamma(x + a)$

22. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16)$, $h\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $h(1 - x)$

23. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x + h)$

24. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0)$, $H(2)$, $H(t - 4)$

25. $k(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 1}$; $k(5)$, $k(2x)$, $k(x + h)$

26. $k(x) = \sqrt{x - 3}$; $k(4)$, $k(3)$, $k(x + 1) - k(x)$

27. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0)$, $f(64)$, $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

28. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32)$, $g(-64)$, $g(t^{10})$

En los problemas del 29 al 36, encuentre (a) $f(x + h)$ *y (b)* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$*; simplifique sus respuestas.*

29. $f(x) = 4x - 5$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3}$

31. $f(x) = x^2 + 2x$

32. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

33. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

34. $f(x) = x^3$

35. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 8}{x}$

37. Si $f(x) = 5x + 3$, encuentre $\dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

38. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$, encuentre $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

En los problemas del 39 al 42, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

39. $9y - 3x - 4 = 0$

40. $x^4 - 1 + y = 0$

41. $y = 7x^2$

42. $x^2 + y^2 = 1$

43. La fórmula para calcular el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

44. Suponga que $f(b) = a^2b^3 + a^3b^2$. (a) Encuentre $f(a)$. (b) Encuentre $f(ab)$.

45. Valor de un negocio Un negocio con un capital original de \$50 000 tiene ingresos y gastos semanales por \$7200 y \$4900, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor V del negocio al final de t semanas como una función de t.

46. Depreciación Si una máquina de \$30 000 se deprecia en 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor V de la máquina después de transcurridos t años.

47. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

48. Función de demanda Suponga que la función de demanda anual para que un actor particular protagonice una película es $p = \frac{1\,200\,000}{q}$, donde q es el número de películas que el actor protagoniza durante el año. Si el actor actualmente cobra $600 000 por película, ¿cuántas películas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro películas por año, ¿cuánto debería cobrar por esto?

49. Función de oferta Suponga que la función de oferta semanal por una libra de café casero en un local de venta de café es $p = \frac{q}{48}$, donde q es el número de libras de café que se ofrecen por semana. ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $8.39 por libra? ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $19.49 por libra? ¿Cómo cambia la cantidad ofrecida conforme se incrementa el precio?

50. Altas de un hospital Una compañía de seguros examinó los registros de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{200}{200 + t}\right)^3$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(800)$, (d) ¿Al cabo de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad del grupo?

51. Psicología Se realizó un experimento para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió asignar una magnitud de 10 a esta descarga en particular, llamada estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas la respuesta R era un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con la del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I en microamperes) y se estimó mediante

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500} \qquad 500 \leq I \leq 3500$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_0)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el hecho de duplicar la intensidad?

52. Psicología En un experimento de aprendizaje por asociación de parejas,[2] la probabilidad de obtener una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Usando este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

53. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *un programa de demanda.* Dicha tabla proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, liste los números en el dominio de f. Encuentre $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Encuentre $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	Cantidad demandada por semana, q
$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas del 54 al 57, utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$

55. $f(x) = \frac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$

56. $f(x) = (20.3 - 3.2x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.3)$, (b) $f(-0.02)$, (c) $f(1.9)$

57. $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}x^2 + 7.31(x + 1)}{5.03}}$; (a) $f(12.35)$, (b) $f(-123)$, (c) $f(0)$

Objetivo

Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

2.2 Funciones especiales

En esta sección se verán funciones que tienen formas y representaciones especiales. Se iniciará con el tipo tal vez más sencillo de función que existe: una *función constante.*

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h: (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$ dada por $h(x) = 2$. El dominio de h es $(-\infty, \infty)$, el conjunto de todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2 \qquad h(-387) = 2 \qquad h(x + 3) = 2$$

---

[1] Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), pp. 39-49.

[2] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York; Academia Press, 1983).

A la función h se le denomina *función constante* porque todos los valores funcionales son iguales. En forma un tanto más general, se tiene la siguiente definición:

Una función de la forma $h(x) = c$, donde c es una *constante*, se llama **función constante**.

APLÍQUELO ▶

5. Suponga que las primas mensuales de un seguro médico para un individuo son por \$125.00.
a. Escriba las primas mensuales del seguro médico como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.
b. ¿Cómo cambian las primas del seguro médico conforme aumentan las visitas al doctor?
c. ¿Qué tipo de función es ésta?

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales.* En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ son constantes, con $c_n \neq 0$, se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama **grado** del polinomio y c_n es el **coeficiente principal**. Así,

En una función polinomial, cada término es una constante o bien una constante por una potencia entera positiva de x.

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal de 3. De igual modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas**, respectivamente. Por ejemplo, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado 0. La función constante $f(x) = 0$ también se considera ser una función polinomial, pero no tiene asignado ningún grado. El dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales.

APLÍQUELO ▶

6. La función $d(t) = 3t^2$, para $t \geq 0$, representa la distancia en metros que un automóvil puede recorrer en t segundos cuando tiene una aceleración constante de 6 m por segundo.
a. ¿Qué tipo de función es ésta?
b. ¿Cuál es el grado de la función?
c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal de 1.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal de $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Como $f(x) = 2x^{-3}$ y el exponente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las funciones polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Una función que es cociente de funciones polinomiales se llama **función racional**.

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional porque el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional porque $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

Toda función polinomial es una función racional.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

APLÍQUELO ▶

7. Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si un cliente compra de cero a cinco pares de medias, el precio es de \$3.50 por par; si compra de seis a 10 pares, el precio es de \$3.00 por par y, si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

EJEMPLO 4 Funciones definidas por partes

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq s < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8 \end{cases}$$

Ésta se llama **función definida por partes**, puesto que la regla para su especificación está dada por reglas para cada uno de los diferentes casos que pueden presentarse. Aquí, s es la variable independiente y el dominio F es toda s tal que $-1 \leq s \leq 8$. El valor de s determina cuál expresión debe usarse.

Determine $F(0)$: como $-1 \leq 0 < 1$, se tiene $F(0) = 1$.

Determine $F(2)$: como $1 \leq 2 \leq 2$, se tiene $F(2) = 0$.

Determine $F(7)$: como $2 < 7 \leq 8$, se sustituye 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $|-|(x) = |x|$ se denomina *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** de un número real x se denota mediante $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el dominio de $|-|$ son todos los números reales. Algunos valores funcionales son

$$|16| = 16$$

$$|-\tfrac{4}{3}| = -\left(-\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{4}{3}$$

$$|0| = 0$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

En los ejemplos siguientes se utiliza la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, con r como un entero positivo, se lee "r **factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r$$

También se define

$$0! = 1$$

Para cada entero no negativo n, $(-)!(n) = n!$ determina un número único, de manera que puede decirse que $(-)!$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos.

APLÍQUELO ▶

8. Deben colocarse siete libros diferentes en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y proporcione la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b. $3!(6 - 5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

EJEMPLO 7 Genética

Suponga que dos conejillos de indias negros se reproducen y tienen cinco descendientes. Bajo ciertas condiciones, puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de los descendientes sean de color café y los otros negros es una función de r, $P = P(r)$, donde

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

La letra P en $P = P(r)$ se usa de dos formas. En el lado derecho, P representa la regla de la función; en el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P son todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determine la probabilidad de que exactamente tres conejillos de indias sean de color café.

Solución: Para encontrar $P(3)$, se tiene

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}$$

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 2.2

En los problemas del 1 al 4, determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4$

2. $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x - 3}{3}$

3. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

4. $g(x) = 2^{-3}x^3$

En los problemas del 5 al 8, determine si la función dada es una función racional.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 4}$

6. $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$

7. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

8. $g(x) = 4x^{-4}$

En los problemas del 9 al 12, determine el dominio de cada función.

9. $k(z) = 26$

10. $f(x) = \sqrt{\pi}$

11. $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x > 1 \\ 4 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 3 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

En los problemas del 13 al 16, establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6$

14. $g(x) = 9x^2 + 2x + 1$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} - 3x^5 + 2x^6 + x^7$

16. $f(x) = 9$

En los problemas del 17 al 22, determine los valores funcionales para cada función.

17. $f(x) = 8$; $f(2)$, $f(t + 8)$, $f(-\sqrt{17})$

18. $g(x) = |x - 3|$; $g(10)$, $g(3)$, $g(-3)$

19. $F(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \\ -1 & \text{si } t < 1 \end{cases}$;

$F(12)$, $F(-\sqrt{3})$, $F(1)$, $F\left(\dfrac{18}{5}\right)$

20. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

$f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$

21. $G(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$;

$G(8)$, $G(3)$, $G(-1)$, $G(1)$

22. $F(\theta) = \begin{cases} 2\theta - 5 & \text{si } \theta < 2 \\ \theta^2 - 3\theta + 1 & \text{si } \theta > 2 \end{cases}$;

$F(3)$, $F(-3)$, $F(2)$

En los problemas del 23 al 28, determine el valor de cada expresión.

23. $6!$

24. $(3 - 3)!$

25. $(4 - 2)!$

26. $6! \cdot 2!$

27. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

28. $\dfrac{8!}{5!(8-5)!}$

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$2.50. Escriba el costo de un boleto de viaje redondo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué tipo de función es ésta?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene una longitud tres veces mayor que su ancho y su altura es una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es ésta?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para máquina, el costo inicial de un dado es de \$850 y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Si un capital P se invierte a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si el grupo es menor de 12, cada boleto cuesta \$9.50; si el grupo es de 12 o más, cada boleto cuesta \$8.75. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales La clase de matemáticas financieras ha elegido un comité de representación integrado por cinco personas para quejarse ante el magisterio por la introducción de la notación factorial en el curso. Estas personas decidieron que serían más eficaces si se etiquetaban como los miembros A, G, M, N y S, donde el miembro A gestionará ante los profesores que tienen apellidos que inician de la

A a la F, el miembro G con los profesores con apellidos de la G a la L, y así sucesivamente. ¿De cuántas formas puede el comité etiquetar a sus elementos de esta manera?

35. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. Genética En el ejemplo 7, determine la probabilidad de que los cinco descendientes tengan ojos color café.

37. Crecimiento de bacterias En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo t (en horas) necesario para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación) es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{24}T + \dfrac{11}{4} & \text{si } 30 \le T \le 36 \\[2ex] \dfrac{4}{3}T - \dfrac{175}{4} & \text{si } 36 < T \le 39 \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f y **(b)** encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas del 38 al 41, use su calculadora para encontrar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.19x^4 - 27.99 & \text{si } x \ge 5.99 \\ 0.63x^5 - 57.42 & \text{si } x < 5.99 \end{cases}$

(a) $f(7.98)$ **(b)** $f(2.26)$ **(c)** $f(9)$

39. $f(x) = \begin{cases} 29.5x^4 + 30.4 & \text{si } x < 3 \\ 7.9x^3 - 2.1x & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

(a) $f(2.5)$ **(b)** $f(-3.6)$ **(c)** $f(3.2)$

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12 & \text{si } -8 \le x < -2 \\ x^2 - 4x^{-2} & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$ **(b)** $f(-14.9)$ **(c)** $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3) & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2 & \text{si } -5 \le x < 0 \\ \sqrt{2.1x+3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$ **(b)** $f(46)$ **(c)** $f(-2/3)$

Objetivo

Combinar funciones mediante la suma, resta, multiplicación, división, multiplicación por una constante y composición.

2.3 Combinaciones de funciones

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x$$

Al sumar $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10$$

En general, para cualesquiera funciones $f, g : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$, se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** $\dfrac{f}{g}$ como sigue:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para } g(x) \ne 0 \end{aligned}$$

Para cada una de estas cuatro nuevas funciones, el dominio es el conjunto de todas las x que pertenecen al dominio de f y al dominio de g. Para el cociente, se restringe aún más el

---

[3] Adaptado de F. K. E. Imrie y A. J. Vlitos, “Production of Fungal Protein from Carob”, en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge: MIT Press, 1975).

dominio con el fin de excluir cualquier valor de x para el cual $g(x) = 0$. En cada una de las cuatro combinaciones se tiene una nueva función de X a $(-\infty, \infty)$. Por ejemplo, se tiene $f + g : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$. Un caso especial de fg merece ser mencionado por separado. Para cualquier número real c y cualquier función f se define cf mediante

$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

Este tipo restringido de producto se llama **producto escalar**. El producto escalar tiende a compartir algunas propiedades con las sumas (y las restas) que no suelen poseer los productos (y cocientes).

Para $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $c = \sqrt{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 3x \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x^2 - 3x \\
(fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3 \\
\frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \quad \text{para } x \neq 0 \\
(cf)(x) &= cf(x) = \sqrt{2}x^2
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x$, encuentre

a. $(f + g)(x)$

b. $(f - g)(x)$

c. $(fg)(x)$

d. $\frac{f}{g}(x)$

e. $\left(\frac{1}{2}f\right)(x)$

Solución

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2$

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x$

d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}$

e. $\left(\frac{1}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{3x - 1}{2}$

Ahora resuelva el problema 3(a) a (f) ◁

Composición

También pueden combinarse dos funciones aplicando primero una función a una entrada y después la otra función al resultado de la primera. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3 \cdot 2 = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6$$

Después, se hace que la salida 6 se convierta en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

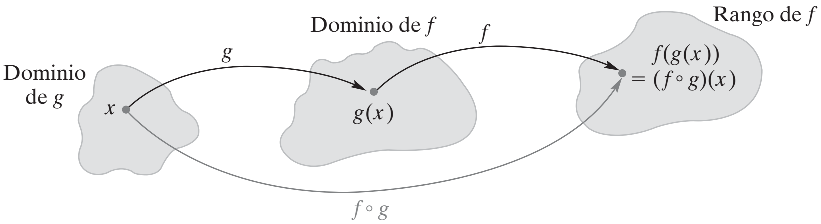


FIGURA 2.2 Composición de f con g.

Al aplicar primero g y después f, se envía el 2 al 36:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

De manera más general, se reemplazará el 2 por x, donde x está en el dominio de g (vea la figura 2.2). Aplicando g a x, se obtiene el número $g(x)$, que debe suponerse está en el dominio de f. Al aplicar f a $g(x)$, se obtiene $f(g(x))$, que se lee "f de g de x", la cual se encuentra en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado se llama *composición* y la función resultante, denotada por $f \circ g$, se llama *función compuesta* de f con g. Esta función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. (Vea la flecha inferior en la figura 2.2). De esta manera, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Definición

Para las funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $f : Y \longrightarrow Z$, la ***composición de*** f ***con*** g ***es la función*** $f \circ g : X \longrightarrow Z$ ***definida por***

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, puede obtenerse una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como se vio anteriormente.

Cuando se trata con números reales y la operación de suma, 0 es un caso especial, para cualquier número real a, se tiene

$$a + 0 = a = 0 + a$$

El número 1 tiene una propiedad similar con respecto a la multiplicación. Para cualquier número real a, se tiene

$$a1 = a = 1a$$

Con propósitos de referencia, en la sección 2.4 se observa que la función I definida por $I(x) = x$ satisface, para cualquier función f,

$$f \circ I = f = I \circ f$$

donde se considera la igualdad de funciones tal como se definió en la sección 2.1. De hecho, para cualquier x,

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = I(f(x)) = (I \circ f)(x)$$

La función I se llama función *identidad*.

APLÍQUELO ▶

9. Un CD cuesta x precio al mayoreo. El precio que paga la tienda está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, donde x es el precio que paga la tienda. Escriba una función compuesta para determinar el precio al cliente como una función del precio al mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$. Encuentre

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x y f obtiene la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}$$

El dominio de g son todos los números reales x y el de f todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición sean todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio son todas las $x \geq -1$ o, de manera equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x y g suma 1 al resultado. De esta manera, g suma 1 a $\sqrt{x}$ y se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

El dominio de f son todas las $x \geq 0$ y el dominio de g son todos los números reales. Por ende, el dominio de la composición son todas las $x \geq 0$ para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, a saber, toda $x \geq 0$.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

¡ADVERTENCIA!

Por lo general, $f \circ g$ y $g \circ f$ son muy diferentes. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1}$$

pero se tiene

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

Observe que $(f \circ g)(1) = \sqrt{2}$, mientras que $(g \circ f)(1) = 2$. Tampoco debe confundirse $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí,

$$f(g(x)) = \sqrt{x + 1}$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x + 1)$$

La composición es *asociativa*, esto significa que para cualesquiera tres funciones f, g y h,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$, $G(p) = 2p + 1$ y $H(p) = |p|$, encuentre

a. $F(G(p))$

b. $F(G(H(p)))$

c. $G(F(1))$

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p + 1) = (2p + 1)^2 + 4(2p + 1) - 3 = 4p^2 + 12p + 2 = (F \circ G)(p)$

b. $F(G(H(p))) = (F \circ (G \circ H))(p) = ((F \circ G) \circ H)(p) = (F \circ G)(H(p)) = (F \circ G)(|p|) = 4|p|^2 + 12|p| + 2 = 4p^2 + 12|p| + 2$

c. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

APLÍQUELO ▶

10. Suponga que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x + 3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones y explique lo que representa cada función.

EJEMPLO 4 Expresión de una función como una composición

Exprese $h(x) = (2x - 1)^3$ como una composición.

Solución:

Se observa que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que se hace $g(x) = 2x — 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x - 1)^3 = (g(x))^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

lo cual resulta en h como una composición de dos funciones.

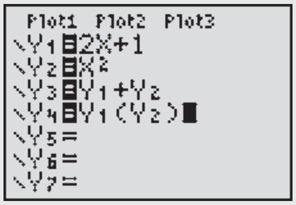
Ahora resuelva el problema 13 ◁

TECNOLOGÍA

Dos funciones pueden combinarse usando una calculadora gráfica. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

que se introducen en la calculadora como Y_1 y Y_2, según muestra la figura 2.3. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene al evaluar Y_4 en 3.



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X+1
\Y2=X²
\Y3=Y1+Y2
\Y4=Y1(Y2)
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

FIGURA 2.2 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

PROBLEMAS 2.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)(0)$ **(c)** $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(-2)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(3)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

(j) $(g \circ f)(3)$

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)(4)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}(2)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(2)$

3. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)\left(-\frac{1}{2}\right)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(-3)$

4. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)\left(\frac{2}{3}\right)$ **(c)** $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(7)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(12\,003)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \frac{4}{p}$ y $g(p) = \frac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

7. Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \frac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(t) = \sqrt{t}$ y $G(t) = 2t^2 - 2t + 1$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

9. Si $f(v) = \frac{1}{v^2+1}$ y $g(v) = \sqrt{v+2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(v)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 11 al 16, determine las funciones f y g tales que h(x) = f(g(x)).

11. $h(x) = 11x - 7$

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

13. $h(x) = \frac{3}{x^2 + x + 1}$

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$

15. $h(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$

16. $h(x) = \frac{2 - (3x - 5)}{(3x - 5)^2 + 2}$

17. Utilidad Un expendio de café vende una libra de café en \$9.75. Los gastos mensuales son de \$4500 más \$4.25 por cada libra de café vendida.
(a) Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras de café vendidas.
(b) Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.
(c) Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

18. Geometría Suponga que el volumen de una esfera es $v(x) = \frac{4}{3}\pi(3x - 1)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones y explique lo que representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos de una persona.[4] Sea S un valor numérico de la posición social con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población, suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}$$

---

[4] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975).

Además, suponga que el ingreso I de una persona es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué describe esta función?

En los problemas del 21 al 24, para las funciones f y g dadas, determine los valores funcionales indicados. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2$, $g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$
(a) $(f + g)(4.5)$, **(b)** $(f \circ g)(-2)$

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$, $g(x) = 11.2x + 5.39$
(a) $\dfrac{f}{g}(-2)$, **(b)** $(g \circ f)(-10)$

23. $f(x) = x^{4/5}$, $g(x) = x^2 - 8$
(a) $(fg)(7)$, **(b)** $(g \circ f)(3.75)$

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$
(a) $(f - g)(7.3)$, **(b)** $(f \circ g)(-4.17)$

Objetivo

Introducir las funciones inversas, sus propiedades y usos.

2.4 Funciones inversas

Dado que $-a$ es el número para el cual

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

y, para $a \neq 0$, a^{-1} es el número para el cual

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

entonces, dada una función $f: X \longrightarrow Y$, puede indagarse acerca de la existencia de una función g que satisface

$$f \circ g = I = g \circ f \qquad (1)$$

donde I es la función identidad, introducida en la subsección titulada “Composición” de la sección 2.3 y dada por $I(x) = x$. Suponga que se tiene g como se ha señalado y una función h que también satisface las ecuaciones de (1) de manera que

$$f \circ h = I = h \circ f$$

Entonces

$$h = h \circ I = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$$

muestra que hay a lo más una función que satisface los requerimientos de g en (1). En la jerga matemática, g está determinada solo por f y por lo tanto se le da un nombre, $g = f^{-1}$, que refleja su dependencia única de f. La función f^{-1} se lee como f **inversa** de f y se le llama **inversa** de f.

El inverso aditivo $-a$ existe para cualquier número a; el inverso multiplicativo a^{-1} existe precisamente si $a \neq 0$. La existencia de f^{-1} coloca un fuerte requisito sobre una función f. Puede mostrarse que f^{-1} existe si y solo si, para toda a y b, siempre que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. Puede ser útil pensar que una f así puede *cancelarse* (*a la izquierda*).

¡ADVERTENCIA!

No confunda f^{-1}, la inversa de f, con $\dfrac{1}{f}$, el recíproco multiplicativo de f. Desafortunadamente, la nomenclatura empleada para describir las funciones inversas choca con el uso numérico de $(-)^{-1}$. Por lo general, $f^{-1}(x)$ es diferente de $\dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Por ejemplo, $I^{-1} = I$ (puesto que $I \circ I = I$), entonces $I^{-1}(x) = x$, pero $\dfrac{1}{I}(x) = \dfrac{1}{I(x)} = \dfrac{1}{x}$.

> Una función f que satisface
>
> para toda a y b, si $\quad f(a) = f(b) \quad$ entonces $\quad a = b$
>
> se llama función **uno a uno**.

De este modo, puede decirse que una función tiene una inversa precisamente si es uno a uno. Una forma equivalente de expresar la condición de uno a uno es:

$$\text{para toda } a \text{ y } b, \quad \text{si } a \neq b \quad \text{entonces} \quad f(a) \neq f(b)$$

así que las entradas distintas dan lugar a salidas diferentes. Observe que esta condición no se cumple para muchas funciones simples. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f(1)$ y $-1 \neq 1$ muestra que la función cuadrática no es uno a uno. De manera similar, $f(x) = |x|$ no es una función uno a uno.

En general, el dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f. Aquí debe hacerse notar que (1) es equivalente a

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f. \tag{2}$$

y

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para toda } y \text{ en el rango de } f \tag{3}$$

En general, el rango de f, que es igual al dominio de f^{-1}, puede ser muy diferente al dominio de f.

EJEMPLO 1 Inversas de funciones lineales

De acuerdo con la sección 2.2, una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, es una función lineal. Muestre que una función lineal es uno a uno. Encuentre la inversa de $f(x) = ax + b$ y muestre que también es lineal.

Solución: Suponga que $f(u) = f(v)$, esto es

$$au + b = av + b \tag{4}$$

Para mostrar que f es uno a uno, debe comprobarse que de esta suposición resulta que $u = v$. Al restar b en ambos lados de (4) se obtiene $au = av$, a partir de lo cual resulta que $u = v$ al dividir ambos lados entre a. (Se supone que $a \neq 0$). Como f está dada primero multiplicando por a y luego sumando b, podría esperarse que el efecto de f pueda eliminarse primero restando b y después dividiendo entre a. Entonces, considere $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$. Se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a\frac{x-b}{a} + b = (x-b) + b = x$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(ax+b)-b}{a} = \frac{ax}{a} = x$$

Como g satisface los requisitos de la ecuación (1), se deduce que g es la inversa de f. Esto es, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{-b}{a}$ y la última igualdad muestra que f^{-1} también es una función lineal.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Identidades para las inversas

Muestre que

a. Si f y g son funciones uno a uno, la composición $f \circ g$ también es uno a uno y $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

b. Si f es uno a uno, entonces $(f^{-1})^{-1} = f$.

Solución:

a. Suponga que $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$; esto es, $f(g(a)) = f(g(b))$. Como f es uno a uno, $g(a) = g(b)$. Dado que g es uno a uno, $a = b$ y esto muestra que $f \circ g$ es uno a uno. Las ecuaciones

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I$$

y

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I$$

muestran que $g^{-1} \circ f^{-1}$ es la inversa de $f \circ g$, lo cual, de manera simbólica, es el enunciado $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

b. En las ecuaciones (2) y (3) reemplace f por f^{-1}. Al tomar g como f se muestra que las ecuaciones (1) están satisfechas y de esto de obtiene $(f^{-1})^{-1} = f$.

EJEMPLO 3 Inversas usadas para resolver ecuaciones

Muchas ecuaciones toman la forma $f(x) = 0$, donde f es una función. Si f es una función uno a uno, entonces la ecuación tiene $x = f^{-1}(0)$ como su única solución.

Solución: Si se aplica f^{-1} a ambos lados de $f(x) = 0$ se obtiene $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0)$, y $f^{-1}(f(x)) = x$ muestra que $x = f^{-1}(0)$ es la única solución posible. Como $f(f^{-1}(0)) = 0$, $f^{-1}(0)$ de hecho es una solución.

◁

EJEMPLO 4 Restricción del dominio de una función

Puede suceder que una función f, cuyo dominio es el natural que consiste en todos los números para los cuales la regla de definición tiene sentido, no sea uno a uno y aún así pueda obtenerse una función g uno a uno restringiendo el dominio de f.

Solución: Por ejemplo, se ha mostrado que la función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, pero que la función $g(x) = x^2$ *con el dominio explícito dado como* $[0, \infty)$ sí lo es. Como $(\sqrt{x})^2 = x$ y $\sqrt{x^2} = x$ para $x \geq 0$, se deduce que $\sqrt{\ }$ es la inversa de la función cuadrática restringida g. A continuación se presenta un ejemplo más artificial. Sea $f(x) = |x|$ (con su dominio natural). Sea $g(x) = |x|$ *con el dominio dado explícitamente como* $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$. La función g es uno a uno y, por ende, tiene una inversa.

◁

EJEMPLO 5 Determinación de la inversa de una función

Para determinar la inversa de una función f uno a uno, resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x en términos de y obteniendo $x = g(y)$. Entonces $f^{-1}(x) = g(x)$. Para ilustrarlo, encuentre $f^{-1}(x)$ si $f(x) = (x - 1)^2$, para $x \geq 1$.

Solución: Sea $y = (x - 1)^2$, para $x \geq 1$. Entonces $x - 1 = \sqrt{y}$ y, por lo tanto, $x = \sqrt{y} + 1$. Se deduce que $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 2.4

En los problemas del 1 al 6, encuentre la inversa de la función dada.

1. $f(x) = 3x + 7$

2. $g(x) = 5x - 3$

3. $F(x) = \frac{1}{2}x - 7$

4. $f(x) = (4x - 5)^2$, para $x \geq \frac{5}{4}$

5. $A(r) = \pi r^2$, para $r \geq 0$

6. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

En los problemas del 7 al 10, determine si la función es o no uno a uno.

7. $f(x) = 5x + 12$

8. $g(x) = (3x + 4)^2$

9. $h(x) = (5x + 12)^2$, para $x \geq -\frac{12}{5}$

10. $F(x) = |x - 9|$

En los problemas 11 y 12, resuelva cada ecuación mediante la determinación de una función inversa.

11. $(4x - 5)^2 = 23$, para $x \geq \frac{5}{4}$

12. $2x^3 + 1 = 129$

13. Función de demanda La función

$$p = p(q) = \frac{1\,200\,000}{q} \qquad q > 0$$

expresa el sueldo p de una actriz por película como una función del número q de películas en las que actúa. Exprese el número de películas en que actúa la actriz en términos de su sueldo por película. Muestre que la expresión es una función de p. Muestre que la función resultante es inversa a la función dada, p, en términos de q.

14. Función de oferta En una cafetería, la función de la oferta semanal para una libra de café de mezcla de la casa es

$$p = p(q) = \frac{q}{48} \quad q > 0$$

donde q es el número de libras de café ofertado por semana y p es el precio por libra. Exprese q como una función de p y demuestre la relación que hay entre las dos funciones.

15. ¿La función $f(x) = 2^x$ tiene una inversa?

2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares

Objetivo

Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y horizontal y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

Un **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica útil para graficar ecuaciones de dos variables, en particular aquellas que surgen de las funciones.

En un plano, se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí y de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 2.4. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora, se llamará a la recta horizontal *eje x* y a la vertical *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje x no necesariamente es la misma que la del eje y.

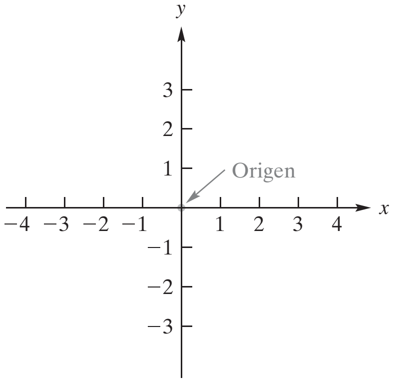
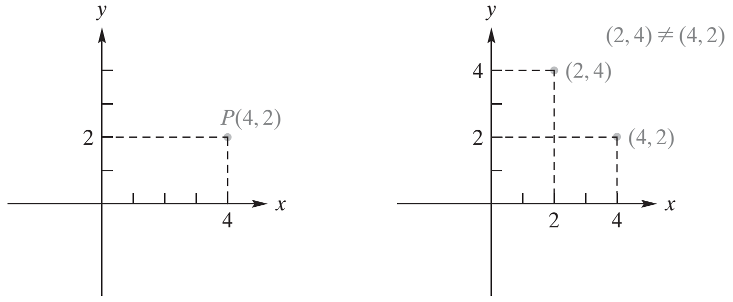


FIGURA 2.4 Ejes de coordenadas.

El plano sobre el cual están los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o, simplemente, *plano x, y*. En este plano puede marcarse cualquier punto para indicar su posición. Para marcar el punto P en la figura 2.5(a), se trazan líneas perpendiculares al eje x y al eje y que pasen por el punto P. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por lo tanto, P determina dos números, 4 y 2, entonces se dice que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** (4, 2). Tal como se remarcó en la sección 2.1, la palabra *ordenado* es importante. En la terminología de la sección 2.1, los puntos del plano se marcaron con los elementos del conjunto $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$. En la figura 2.5(b), el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que para (2, 4):

$$(4, 2) \neq (2, 4)$$



(a) (b)

FIGURA 2.5 Coordenadas rectangulares.

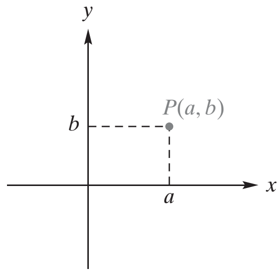


FIGURA 2.6 Coordenadas de P.

En general, si P es cualquier punto, entonces sus coordenadas rectangulares estarán dadas por un par ordenado en la forma (a, b). (Vea la figura 2.6). Se le llama a a la *coordenada x* de P y b a la *coordenada y* de P. Es cierto que la notación utilizada para describir un par ordenado de números reales es la misma que la utilizada para un intervalo abierto, pero esta práctica está muy arraigada y casi nunca se presta a confusión.

De esta manera, con cada punto marcado en un plano coordenado puede asociarse exactamente un par ordenado (a, b) de números reales. También debe quedar claro que con cada par ordenado (a, b) de números reales puede asociarse exactamente un punto en ese plano. Como existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos marcados en el plano y todos los pares ordenados de números reales, al punto P con coordenada-x a y coordenada-y b se le refiere simplemente como el punto (a, b), o como $P(a, b)$. Además, se usarán las palabras *punto* y *par ordenado* en forma intercambiable.

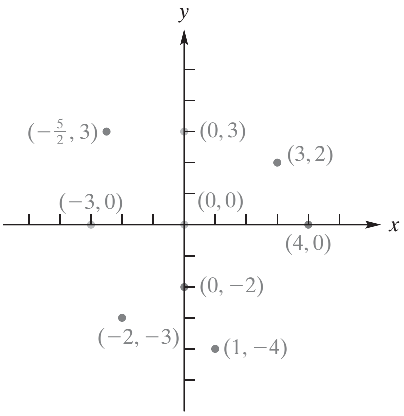


FIGURA 2.7 Coordenadas de puntos.

En la figura 2.7 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto (1, −4) está localizado una unidad a la derecha del eje y y cuatro unidades por debajo del eje x. El origen es (0, 0). La coordenada x de todo punto situado en el eje y es 0 y la coordenada y de todo punto marcado sobre el eje x es 0.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (figura 2.8). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) con $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos que se marcan sobre los ejes no quedan en ningún cuadrante.

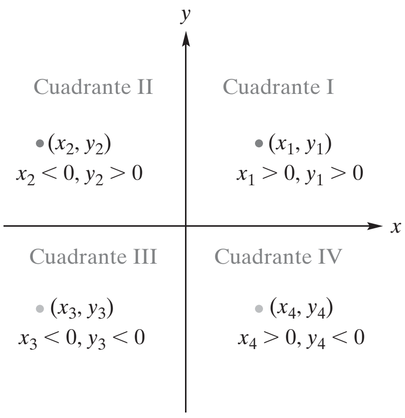
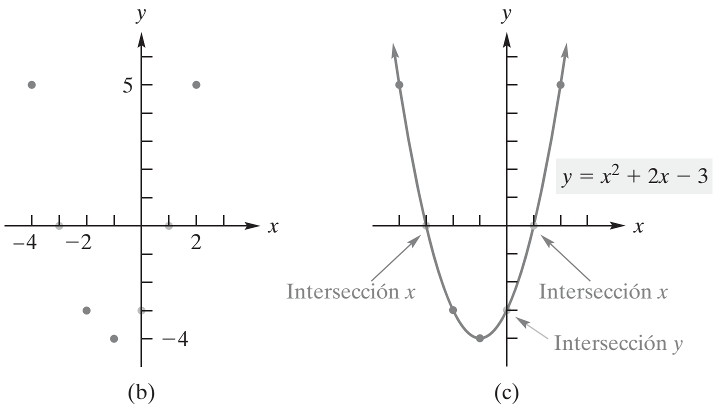


FIGURA 2.8 Cuadrantes.

x	y
-4	5
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5

(a)



(b) (c)

FIGURA 2.9 Graficación de $y = x^2 + 2x - 3$.

Utilizando un sistema de coordenadas rectangulares, pueden representarse geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3 \tag{1}$$

Para esta ecuación, una solución es un valor de x y uno de y que la hagan verdadera. Por ejemplo, si $x = 1$, sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

Así, una solución de la ecuación (1) es $x = 1$, $y = 0$. De manera similar,

$$\text{si } x = -2 \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

y entonces $x = -2$, $y = -3$ también es una solución. Seleccionando otros valores para x, pueden obtenerse más soluciones. [Vea la figura 2.9(a)]. Debe quedar claro que existe una cantidad infinita de soluciones para la ecuación (1).

Cada solución da origen a un punto (x, y). Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 2.9(b) se han graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Como la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, solo es de interés la forma general de la gráfica. Por esta razón se grafican suficientes puntos de modo que pueda tenerse una idea aproximada acerca de su forma. (Las técnicas de cálculo que se estudiarán en el capítulo 13 lograrán que esta "idea" sea mucho más acertada). Después se unen esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, se obtiene la curva de la figura 2.9(c). Por supuesto, entre más puntos se marquen, mejor será la gráfica. Aquí se supone que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia, solo se dice que la intersección y es -3 y las intersecciones x son -3 y 1.

El punto $(0, -3)$ donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ donde la curva interseca al eje x se llaman *intersecciones x*. En general, se tiene la definición siguiente.

Definición

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero se hace $y = 0$ y se resuelve para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero se hace $x = 0$ y luego se resuelve para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, se desea determinar las intersecciones x. Se hace $y = 0$ y al resolver para x se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 3 \\ 0 &= (x + 3)(x - 1) \\ x &= -3, 1 \end{aligned}$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como se vio con anterioridad. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a 0, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a 0. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión dónde cruza los ejes la gráfica.

APLÍQUELO ▶

11. Rachel ha ahorrado en el banco \$7250 para gastos del colegio. Ella planea gastar \$600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y haga el bosquejo de su gráfica.

Solución: Si $y = 0$, entonces

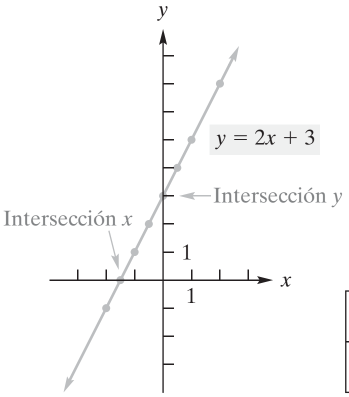
$$0 = 2x + 3 \quad \text{de modo que} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Así, la intersección x es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 2.10 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.

Ahora resuelva el problema 9 ◁



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
y	3	0	4	2	5	1	7	-1

FIGURA 2.10 Gráfica de $y = 2x + 3$.

APLÍQUELO ▶

12. El precio de admisión a un parque de diversiones es de \$24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación que hay entre el número de recorridos, x, que el cliente hace y el costo de admisión, y, para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

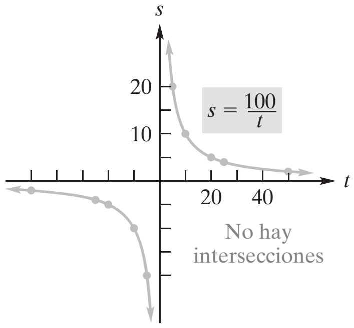
Determine las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$ y haga un bosquejo de la gráfica.

Solución: Para la gráfica, se marcará al eje horizontal con t y al eje vertical con s (figura 2.11). Como t no puede ser igual a 0 (la división entre 0 no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t porque si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

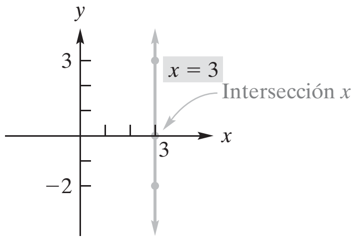
no tiene solución. Recuerde, la única forma en que una fracción puede ser 0 es teniendo un numerador que valga 0. En la figura 2.11 se muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, donde k es una constante diferente de 0, se conoce como *hipérbola rectangular*.

Ahora resuelva el problema 11 ◁



t	5	-5	10	-10	20	-20	25	-25	50	-50
s	20	-20	10	-10	5	-5	4	-4	2	-2

FIGURA 2.11 Gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$.



x	3	3	3
y	0	3	-2

FIGURA 2.12 Gráfica de $x = 3$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones de la gráfica de $x = 3$ y bosqueje la gráfica.

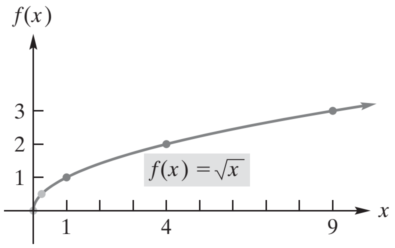
Solución: Puede pensarse en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y si se escribe como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Como $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3, 0)$. No existe intersección y puesto que x no puede ser 0. (Vea la figura 2.12). La gráfica es una recta vertical.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

Cada función f da lugar a una ecuación, a saber $y = f(x)$, la cual es un caso especial de las ecuaciones que se han estado graficando. Su **gráfica** consiste en todos los puntos $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. El eje vertical puede etiquetarse como y o $f(x)$, donde f es el nombre de la función, y se le denomina como **eje de los valores funcionales**. *Siempre se etiqueta el eje horizontal con la variable independiente, pero tome en cuenta que los economistas etiquetan el eje vertical como la variable independiente.* Observe que al graficar una función se obtienen las "soluciones" (x, y) que hacen verdadera la ecuación $y = f(x)$. Para cada x en el dominio de f, se tiene exactamente una y obtenida al evaluar $f(x)$. El par resultante $(x, f(x))$ es un punto sobre la gráfica y éstos son los únicos puntos sobre la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Las intersecciones x de la gráfica de una función real f son todos aquellos números reales x para los que $f(x) = 0$. Como tales, son también conocidos como **raíces** de la ecuación $f(x) = 0$ y aún más como **ceros** de la función f.

Una observación geométrica útil es que la gráfica de una función tiene cuando mucho un punto de intersección con alguna recta vertical en el plano. Recuerde que la ecuación de una recta vertical es necesariamente de la forma $x = a$, donde a es una constante. Si a no está en el dominio de la función f, entonces $x = a$ intersecará la gráfica de $y = f(x)$. Si a está en el dominio de la función f, entonces $x = a$ intersecará la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y solo ahí. De manera inversa, si un conjunto de puntos en el plano tiene la propiedad de que cualquier recta vertical interseca al conjunto al menos una vez, entonces el conjunto de puntos es en realidad la gráfica de una función. (El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales a que tienen la propiedad de que la línea $x = a$ interseca el conjunto de puntos dado y de que para tal a el valor funcional correspondiente es la coordenada y del único punto de intersección de la línea $x = a$ y el conjunto de puntos dado). Ésta es la base de la **prueba de la recta vertical** que se analiza después del ejemplo 7.



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 2.13 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Trace la gráfica de $f : (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: La gráfica se muestra en la figura 2.13. Se marca el eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$, no ± 3. Además, el dominio de f es $[0, \infty)$ porque sus valores se declaran como números reales. Ahora se considerarán las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$, de modo que $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, la intersección x y la intersección del eje vertical son lo mismo, a saber, (0, 0).

Ahora resuelva el problema 29 ◁

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Grafique $p = G(q) = |q|$.

Solución: Se usa la variable independiente q para marcar el eje horizontal. El eje de los valores funcionales puede marcarse como $G(q)$ o p. (Vea la figura 2.14). Note que las intersecciones q y p están en el mismo punto, (0, 0).

Ahora resuelva el problema 31 ◁

APLÍQUELO ▶

13. Brett rentó una bicicleta en un negocio de alquiler, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas a lo largo de una ruta para bicicletas y después regresó por el mismo camino. Grafique la función valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler como una función del tiempo en el dominio apropiado.

q	0	1	−1	3	−3	5	−5
p	0	1	1	3	3	5	5

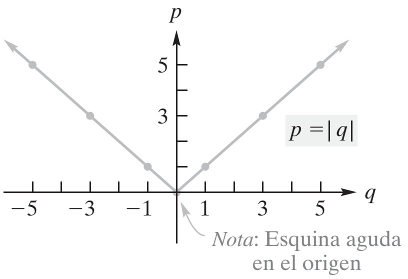


FIGURA 2.14 Gráfica de $p = |q|$.

TECNOLOGÍA

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora gráfica, primero se expresa la ecuación en la forma $f(x) = 0$:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Después se grafica f y luego se estiman las intersecciones x, ya sea utilizando el acercamiento y rastreo o por medio de la operación de extracción de raíces. (Vea la figura 2.15). Observe que se define la ventana para $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 5$.

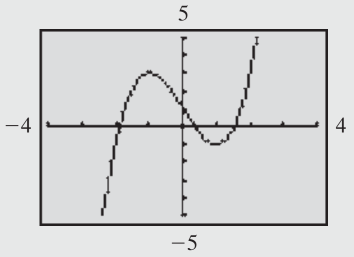


FIGURA 2.15 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente −1.88, 0.35 y 1.53.

La figura 2.16 muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que al número de entrada x en el eje horizontal le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

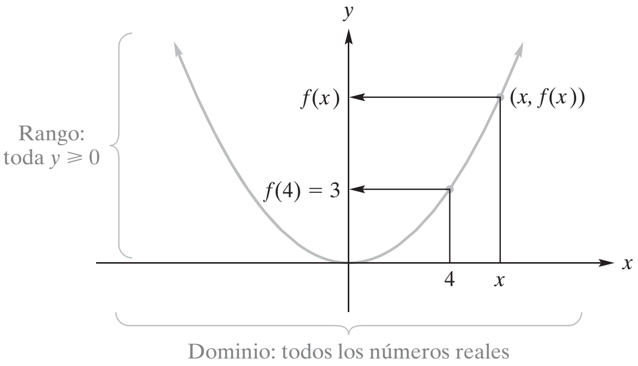


FIGURA 2.16 Dominio, rango y valores funcionales.

A partir de la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f son todos los números reales. Observe que el conjunto de todas las coordenadas y de puntos en la gráfica es el conjunto de todos los números no negativos. Así, el rango de f es toda $y \geq 0$. Esto muestra que puede hacerse una deducción acertada acerca del dominio y del rango de una función viendo su gráfica. *En general, el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica y el rango consiste en todos los valores* y *incluidos en esa gráfica.* Por ejemplo, la figura 2.13 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. En la figura 2.14 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \geq 0$.

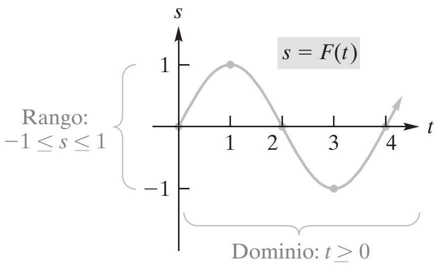


FIGURA 2.17 Dominio, rango y valores funcionales.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores funcionales

En la figura 2.17 se muestra la gráfica de una función F. A la derecha de 4 se supone que la gráfica se repite indefinidamente. Entonces el dominio de F es toda $t \geq 0$. El rango es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores funcionales son

$$F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad F(2) = 0 \quad F(3) = -1$$

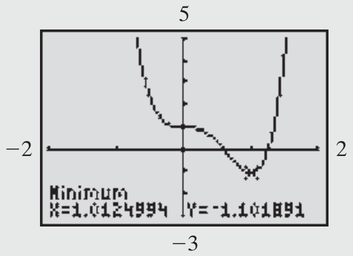
Ahora resuelva el problema 5 ◁

TECNOLOGÍA

Utilizando una calculadora gráfica puede estimarse el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 2.18. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$ y el rango son todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. El valor mínimo para y puede estimarse ya sea usando rastreo y acercamiento o seleccionando la operación "mínimo".



```
Minimum
X=1.0124994  Y=-1.101891
```

FIGURA 2.18 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

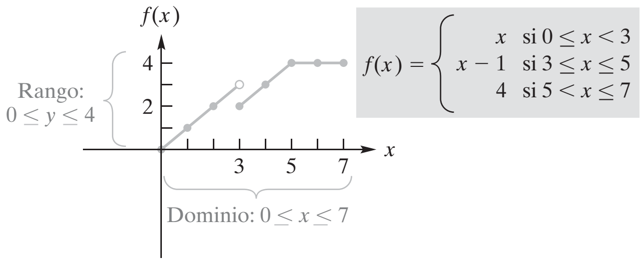
APLÍQUELO ▶

14. Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Un cliente paga \$0.53 por termia para un consumo de 0 a 70 termias y \$0.74 por cada termia consumida por encima de 70. Grafique la función definida por partes que representa el costo mensual de t termias de gas.

EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 4 & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 2.19 Gráfica de una función definida por partes.

Solución: El dominio de f es $0 \leq x \leq 7$. La gráfica se muestra en la figura 2.19, donde el *punto hueco* significa que este *no* está incluido en la gráfica. Observe que el rango de f son todos los números reales y tales que $0 \leq y \leq 4$.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

Existe una manera fácil de determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 2.20(a), observe que con la x dada existen asociados *dos* valores de y: y_1 y y_2. Así, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical**. Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en al menos dos puntos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando tal recta vertical no puede dibujarse de igual modo, la curva *sí* es la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 2.20 no representan funciones de x, pero las de la figura 2.21 sí.

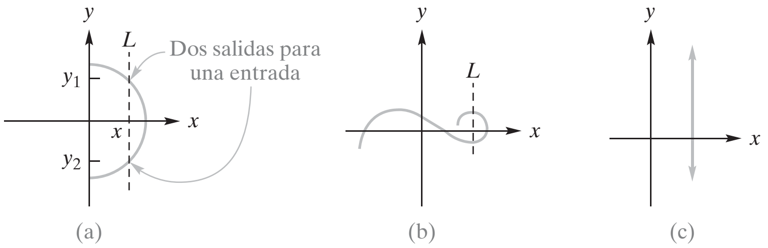


FIGURA 2.20 y no es una función de x.

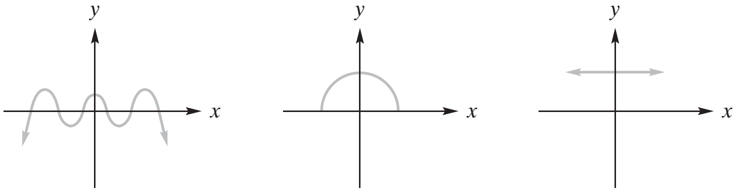


FIGURA 2.21 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de *x*

Grafique $x = 2y^2$.

Solución: Aquí es más fácil seleccionar valores de y y después encontrar los correspondientes a x. En la figura 2.22 se muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

Ahora resuelva el problema 39 ◁

Después de haber determinado si una curva es la gráfica de una función, quizá usando la prueba de la recta vertical, existe una forma fácil de decir si tal función es uno a uno. En la figura 2.16 se observa que $f(4) = 3$ y, en apariencia, también $f(-4) = 3$.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	−1	2	−2	3	−3

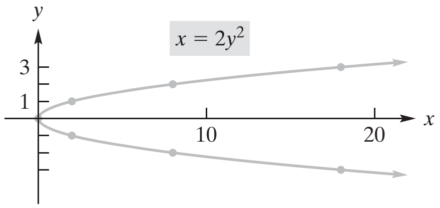


FIGURA 2.22 Gráfica de $x = 2y^2$.

Como los diferentes valores de entrada -4 y 4 producen la misma salida, la función no es uno a uno. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general llamada **prueba de la recta horizontal**. Si puede dibujarse una recta *horizontal* L que interseque la gráfica de una función en al menos dos puntos, entonces la función *no* es uno a uno. Cuando no se puede dibujar tal recta horizontal, la función sí es uno a uno.

PROBLEMAS 2.5

En los problemas 1 y 2 localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(-2, -5), (3, -1), \left(-\frac{1}{3}, 4\right), (1, 0)$

2. $(-4, 5), (3, 0), (1, 1), (0, -6)$

3. En la figura 2.23(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) Estime $f(0), f(2), f(4)$ y $f(-2)$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de f?
   (c) ¿Cuál es el rango de f?
   (d) ¿Cuál es una intersección x de f?

4. En la figura 2.23(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) Estime $f(0)$ y $f(2)$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de f?
   (c) ¿Cuál es el rango de f?
   (d) ¿Cuál es una intersección x de f?

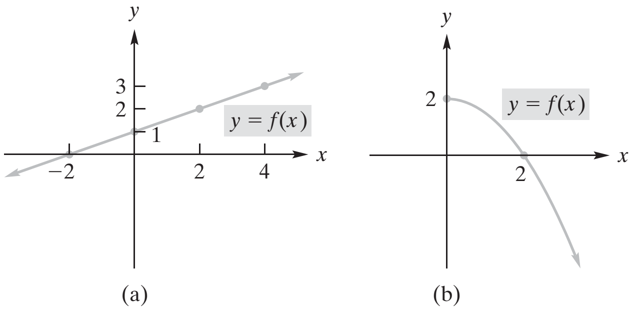


FIGURA 2.23 Diagrama para los problemas 3 y 4.

5. En la figura 2.24(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) Estime $f(0), f(1)$ y $f(-1)$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de f?
   (c) ¿Cuál es el rango de f?
   (d) ¿Cuál es una intersección x de f?

6. En la figura 2.24(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) Estime $f(0), f(2), f(3)$ y $f(4)$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de f?
   (c) ¿Cuál es el rango de f?
   (d) ¿Cuál es una intersección x de f?

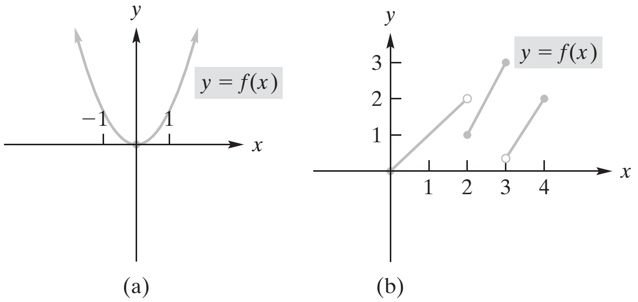


FIGURA 2.24 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas del 7 al 20, determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y bosqueje la gráfica. Con base en la gráfica que realice, ¿es y una función de x?, si es así, ¿es una función uno a uno?, ¿cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$

8. $y = x + 1$

9. $y = 3x - 5$

10. $y = 3 - 2x$

11. $y = x^3 + x$

12. $y = \dfrac{2}{x^2}$

13. $x = 0$

14. $y = 4x^2 - 16$

15. $y = x^3$

16. $x = 3$

17. $x = -|y|$

18. $x^2 = y^2$

19. $2x + y - 2 = 0$

20. $x + y = 1$

En los problemas del 21 al 34, grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $u = f(v) = 2 + v^2$

22. $f(x) = 5 - 2x^2$

23. $y = h(x) = 3$

24. $g(s) = -17$

25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$

26. $y = f(x) = -x^2 + x + 6$

27. $f(t) = -t^3$

28. $p = h(q) = 1 + 2q + q^2$

29. $s = f(t) = \sqrt{t^2 - 9}$

30. $F(r) = -\dfrac{1}{r}$

31. $f(x) = |3x + 2|$

32. $v = H(u) = |u - 3|$

33. $F(t) = \dfrac{16}{t^2}$

34. $y = f(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

En los problemas del 35 al 38, grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

35. $c = g(p) = \begin{cases} p + 1 & \text{si } 0 \leq p < 7 \\ 5 & \text{si } p \geq 7 \end{cases}$

36. $\gamma(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ x - 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 2.25 representan funciones de x?

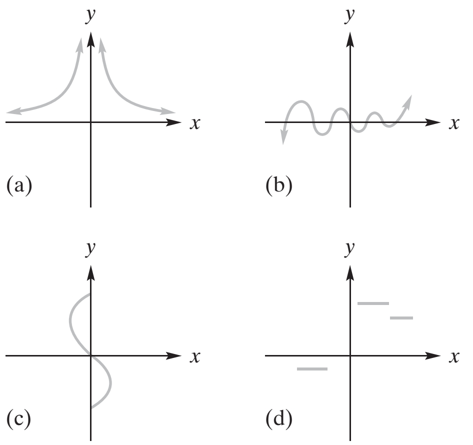


FIGURA 2.25 Diagrama para el problema 39.

40. ¿Cuáles de las gráficas mostradas en la figura 2.26 representan funciones de x uno a uno?

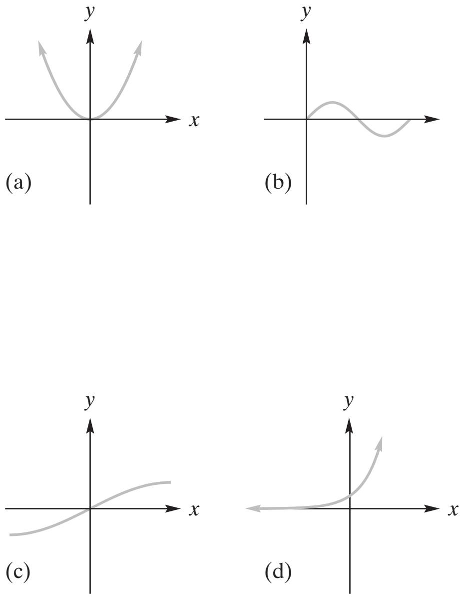


FIGURA 2.26 Diagrama para el problema 40.

41. Pagos de una deuda Allison tiene cargos por \$9200 en sus tarjetas de crédito. Ella planea pagarlos por medio de pagos mensuales de \$325. Escriba una ecuación que represente el monto de la deuda, excluyendo los cargos financieros, después de haber realizado x pagos e identifique las intersecciones explicando su significado financiero, si es que existe.

42. Fijación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de un platillo a lo largo del día. De 6 p.m. a 8 p.m., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 a.m. a las 2:30 p.m., los clientes pagan la mitad del precio. De 2:30 p.m. a las 4:30 p.m., los clientes obtienen un dólar de descuento sobre el precio del almuerzo. De 4:30 p.m. a las 6 p.m., los clientes obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8 p.m. al cierre, a las 10 p.m., los clientes obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo de un platillo a lo largo del día para un precio de cena de \$18.

43. Programa de oferta Dado el siguiente programa de oferta (vea el ejemplo 6 de la sección 2.1), grafique cada pareja cantidad-precio seleccionando el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de oferta.* Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (esto es, cuando se incrementa el precio, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida?) ¿El precio por unidad es una función de la cantidad ofrecida?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	\$10
100	20
150	30
190	40
210	50

44. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda.* Este indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (es decir, compran) cada semana a cierto precio por unidad. Grafique cada par precio-cantidad seleccionando el eje vertical para los precios posibles y una los puntos con una curva suave. De esta manera, se aproximan los puntos entre los datos dados. El resultado se llama *curva de demanda.* Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (esto es, cuando el precio disminuye, ¿qué le pasa a la cantidad demandada?) El precio por unidad, ¿es una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	Precio por unidad, p
5	\$20
10	10
20	5
25	4

45. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000 & \text{si } 0 \le x < 7 \\ -100x + 1700 & \text{si } 7 \le x < 14 \\ -100x + 2400 & \text{si } 14 \le x < 21 \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el tiempo x.

46. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un arreglo de letras, después se le pidió recordar tantas letras del arreglo como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de arreglos con x letras. La gráfica de los resultados aproximadamente se ajusta a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{si } 4 < x \le 5 \\ 4.5 & \text{si } 5 < x \le 12 \end{cases}$$

Grafique esta función.[5]

En los problemas del 47 al 50, utilice una calculadora gráfica para determinar todas las raíces reales, si es que existen, de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

47. $5x^3 + 7x = 3$

48. $x^2(x - 3) = 2x^4 - 1$

49. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2$

50. $(x - 2)^3 = x^2 - 3$

En los problemas del 51 al 54, utilice una calculadora gráfica para determinar todas las intersecciones x de la gráfica de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

51. $f(x) = x^3 + 5x + 7$

52. $f(x) = 2x^4 - 1.5x^3 + 2$

53. $g(x) = x^4 - 1.7x^2 + 2x$

54. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1$

---

[5] Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press. División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

En los problemas del 55 al 57, utilice una calculadora gráfica para determinar (a) el valor máximo de $f(x)$ y (b) el valor mínimo de $f(x)$ para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

55. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10 \quad 1 \leq x \leq 4$

56. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1 \quad -1 \leq x \leq 1$

57. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5} \quad 3 \leq x \leq 5$

58. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

59. Con base en la gráfica de $f(x) = 1 - 4x^3 - x^4$, encuentre (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

60. Con base en la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1.1}{3.8 + x^{2/3}}$, encuentre **(a)** el rango de f y **(b)** las intersecciones. **(c)** ¿f tiene ceros reales? Redondee los valores a dos decimales.

61. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \leq x \leq 5$. Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

2.6 Simetría

Objetivo

Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección se examinarán ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior, se verá que el cálculo es de *gran* ayuda en la representación gráfica porque permite determinar la forma de una gráfica. También proporciona técnicas muy poderosas para determinar si una curva se une o no de manera "suave" entre los puntos.

Considere la gráfica de $y = x^2$ que se muestra en la figura 2.27. La parte situada a la izquierda del eje y es el reflejo (o imagen de espejo) de la parte derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (a, b) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-a, b)$ también debe pertenecer a la gráfica. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

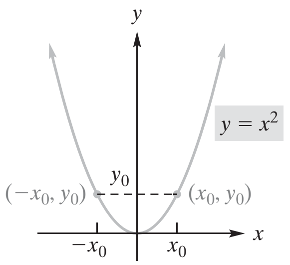


FIGURA 2.27 Simetría con respecto al eje y.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y*** si y solo si $(-a, b)$ está en la gráfica cuando (a, b) lo está.

EJEMPLO 1 Simetría del eje y

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

Solución: Suponga que (a, b) es *cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces

$$b = a^2$$

Debe mostrarse que las coordenadas de $(-a, b)$ satisfacen $y = x^2$. Pero

$$(-a)^2 = a^2 = b$$

muestra que esto es cierto. Así se ha *probado* con álgebra simple lo que la imagen de la gráfica permitía suponer: la gráfica de $y = x^2$ *es* simétrica con respecto al eje y.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Cuando se prueba la simetría en el ejemplo 1, (a, b) puede ser cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante se escribirá (x, y) para referir cualquier punto de una gráfica. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y si, al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, resulta una ecuación equivalente.

Otro tipo de simetría se muestra mediante la gráfica de $x = y^2$ en la figura 2.28. Ahí, la parte de la gráfica situada debajo del eje x es la reflexión, con respecto al eje x, de la parte

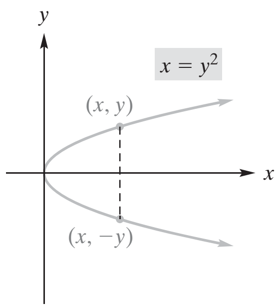


FIGURA 2.28 Simetría con respecto al eje x.

que se encuentra por arriba de este, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje x*.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** si y solo si $(x, -y)$ está en la gráfica cuando (x, y) lo está.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $x = y^2$, se observa que $(-y)^2 = x$ si y solo si $y^2 = x$, simplemente porque $(-y)^2 = y^2$. Por lo tanto, la gráfica de $x = y^2$ es simétrica con respecto al eje x.

Un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, se ilustra mediante la gráfica de $y = x^3$ (figura 2.29). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a la gráfica.

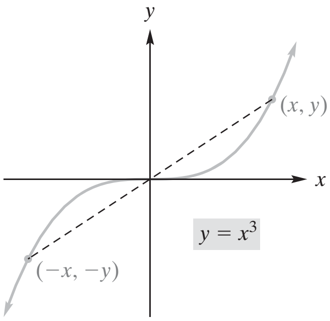


FIGURA 2.29 Simetría con respecto al origen.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y solo si $(-x, -y)$ está en la gráfica cuando (x, y) lo está.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, cuando se aplica esta prueba a la gráfica de $y = x^3$ mostrada en la figura 2.29, se obtiene

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^3 \\ -y &= -x^3 \\ y &= x^3 \end{aligned}$$

donde las tres ecuaciones son equivalentes, en particular la primera y la última. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

En la tabla 2.1 se muestra un resumen de las pruebas para la simetría. Cuando se sabe que una gráfica tiene simetría, puede hacerse su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

Tabla 2.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Hay simetría si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Hay simetría si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Hay simetría si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. Después determine las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con respecto al eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{esto equivale a} \quad y = -\frac{1}{x}$$

la cual no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto equivale a} \quad y = -\frac{1}{x}$$

la cual no es equivalente a la ecuación dada. De este modo, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje y.

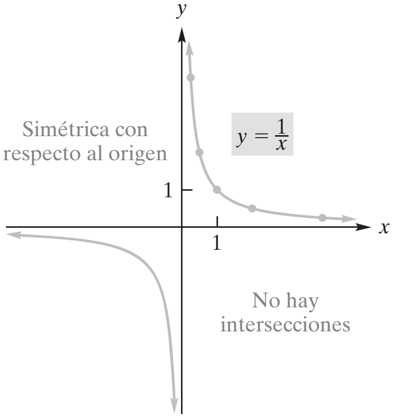
Con respecto al origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto equivale a} \quad y = \frac{1}{x}$$

la cual es equivalente a la ecuación dada. En consecuencia, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Como x no puede ser 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Análisis Como no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x > 0$, solo se obtienen puntos en el primer cuadrante. En la figura 2.30 se muestra una tabulación con los puntos de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, esa parte se refleja con respecto al origen para obtener toda la gráfica.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 2.30 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encuentre las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{esto equivale a} \quad y = -1 + x^4$$

la cual no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto equivale a} \quad y = 1 - x^4$$

la cual es equivalente a la ecuación dada. Por ende, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto equivale a} \quad -y = 1 - x^4 \quad \text{o bien a} \quad y = -1 + x^4$$

lo cual no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x se hace $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= 0 \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &= 0 \\ (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) &= 0 \\ x = 1 \quad &\text{o} \quad x = -1 \end{aligned}$$

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

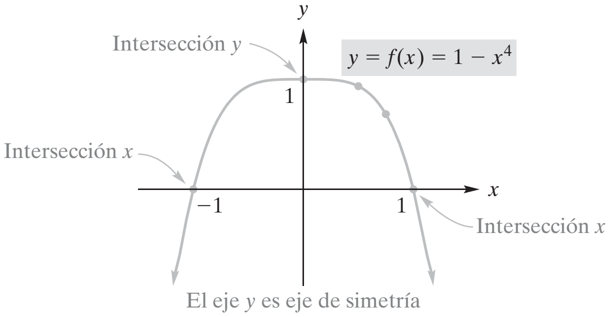


FIGURA 2.31 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

Por lo tanto, las intersecciones x son (1, 0) y (−1, 0). Para probar las intersecciones y, se establece $x = 0$. Entonces $y = 1$, por lo que (0, 1) es la única intersección y.

Análisis Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, puede hacerse el bosquejo de *toda* la gráfica utilizando la simetría con respecto al eje y (figura 2.31).

Ahora resuelva el problema 19 ◁

La función constante $f(x) = 0$, para toda x, puede identificarse fácilmente como simétrica con respecto al eje x. En el ejemplo 3, se mostró que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría con respecto al eje x. Para cualquier *función* f, suponga que la gráfica de $y = f(x)$ tiene simetría con el eje x. De acuerdo con la definición, esto significa que también se tiene que $-y = f(x)$. Lo anterior indica que para una x arbitraria en el dominio de f se tiene $f(x) = y$ y $f(x) = -y$. Puesto que para una función cada valor de x determina un solo valor de y, se debe tener $y = -y$ y esto implica $y = 0$. Como x es arbitraria, se deduce que si la gráfica de una *función* es simétrica con respecto al eje x, entonces la función debe ser la constante 0.

La única *función* cuya gráfica es simétrica con respecto al eje x es la función constante 0.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$ para las intersecciones y simetrías. Haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son (3, 0) y (−3, 0). Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y, de esta manera, $y = \pm 2$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje y son (0, 2) y (0,−2).

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto equivale a} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

que es la ecuación original, por lo que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{esto equivale a} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

que es la ecuación original, por lo que también existe simetría con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

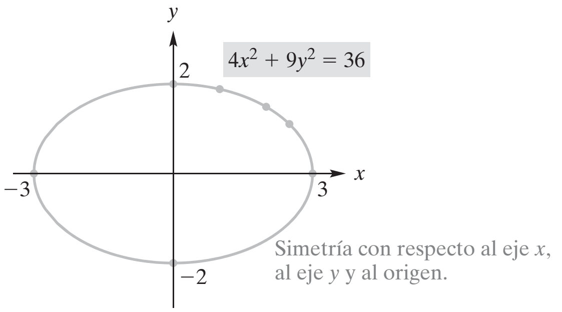
$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto equivale a} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

que es la ecuación original, por lo que la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Análisis En la figura 2.32 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave. Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación utilizando la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen, puede obtenerse el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y), puede obtenerse la gráfica completa.

Ahora resuelva el problema 23 ◁

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$



Simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

FIGURA 2.32 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

En el ejemplo 4, la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces también el tipo restante debe existir.**

Este hecho puede ayudar a ahorrar tiempo durante la verificación de la simetría.

EJEMPLO 5 Simetría con respecto a la recta $y = x$

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto a la recta*** $y = x$ si y solo si (b, a) está en la gráfica cuando (a, b) lo está.

Otra forma de establecer la definición es decir que al intercambiar los papeles de x y y en la ecuación dada se obtiene una ecuación equivalente.

Use la definición anterior para mostrar que $y^2 + x^2 = 1$ es simétrica con respecto a la recta $y = x$.

Solución: Al intercambiar los papeles de x y y se obtiene $y^2 + x^2 = 1$, lo cual es equivalente a $x^2 + y^2 = 1$. Así que $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto a $y = x$.

◁

El punto con coordenadas (b, a) es la imagen de espejo en la recta $y = x$ del punto (a, b). Si f es una función uno a uno, $b = f(a)$ si y solo si $a = f^{-1}(b)$. Así que la gráfica de f^{-1} es la imagen de espejo en la recta $y = x$ de la gráfica de f. Es interesante notar que para *cualquier* función f puede formarse la imagen de espejo de la gráfica de f. Sin embargo, la gráfica resultante no debe ser necesariamente la gráfica de una función. Para que esta imagen de espejo sea la gráfica de una función, debe pasar la prueba de la recta vertical. No obstante, las rectas verticales y horizontales son imágenes de espejo en la recta $y = x$, y se observa que para que la imagen de espejo de la gráfica de f pase la prueba de la recta vertical es porque la gráfica de f pasa la prueba de la gráfica horizontal. Esto último sucede precisamente si f es uno a uno, que a su vez sucede si y solo si f tiene una inversa.

EJEMPLO 6 Simetría y funciones inversas

Bosqueje la gráfica de $g(x) = 2x + 1$ y su inversa en el mismo plano.

Solución: Tal como se estudiará con más detalle en el capítulo 3, la gráfica de g es la línea recta con pendiente 2 e intersección con y en 1. Esta línea, la recta $y = x$, y la reflexión de $y = 2x + 1$ en $y = x$ se muestran en la figura 2.33.

Ahora resuelva el problema 27 ◁

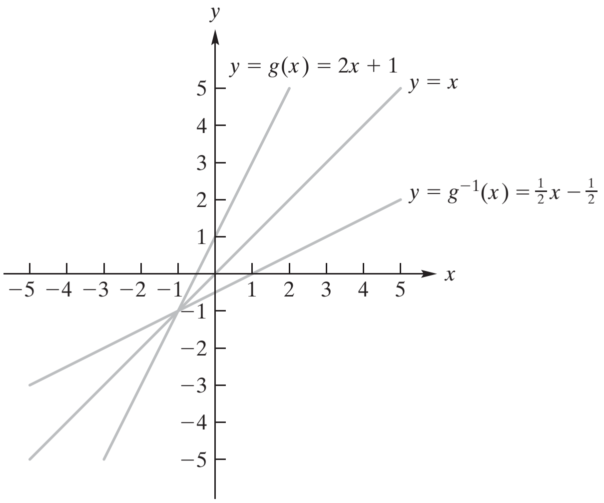


FIGURA 2.33 Gráfica de $y = g(x)$ y $y = g^{-1}(x)$.

PROBLEMAS 2.6

En los problemas del 1 al 16, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$

2. $y = f(x) = x^2 - 4$

3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$

4. $x = y^3$

5. $25x^2 + 144y^2 = 169$

6. $y = 57$

7. $x = -2$

8. $y = |2x| - 2$

9. $x = -y^{-4}$

10. $y = \sqrt{x^2 - 36}$

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

12. $x^2 + xy + y^3 = 0$

13. $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 1}$

14. $x^2 + xy + y^2 = 0$

15. $y = \dfrac{2}{x^3 + 27}$

16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$

En los problemas del 17 al 24, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a la recta y = x. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $3x + y^2 = 9$

18. $x - 1 = y^4 + y^2$

19. $y = f(x) = x^3 - 4x$

20. $2y = 5 - x^2$

21. $|x| - |y| = 0$

22. $x^2 + y^2 = 16$

23. $9x^2 + 4y^2 = 25$

24. $x^2 - y^2 = 4$

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 5 - 1.96x^2 - \pi x^4$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$ y (c) el rango de f. Redondee todos los valores a dos decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. Determine todos los ceros reales de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

27. Bosqueje la gráfica de $f(x) = -3x + 2$ y su inversa en el mismo plano.

Objetivo

Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento o contracción verticales de la gráfica de una función.

2.7 Traslaciones y reflexiones

Hasta ahora, el enfoque de este texto con relación a las gráficas se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier simetría que exista. Pero esta técnica no es necesariamente la preferida. Más adelante en este libro se analizarán gráficas utilizando otras técnicas. Sin embargo, como algunas funciones y sus gráficas asociadas aparecen con mucha frecuencia, resulta útil memorizarlas. En la figura 2.34 se muestran seis de tales funciones.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, puede utilizarse la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar $y = x^2 + 2$. Observe que $y = f(x) + 2$. Por lo tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y = x^2 + 2$ es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de

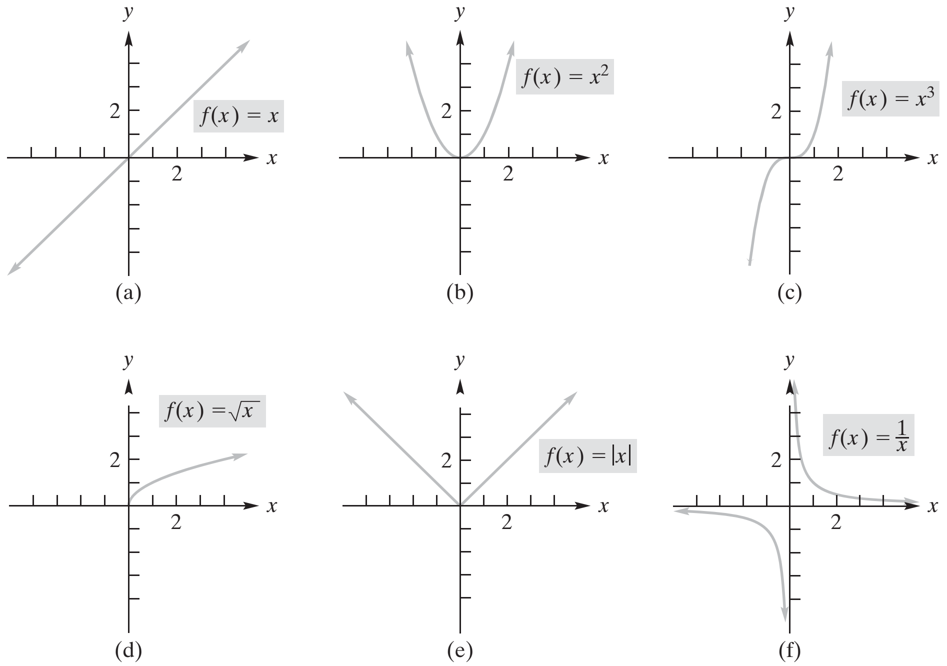


FIGURA 2.34 Funciones utilizadas con frecuencia.

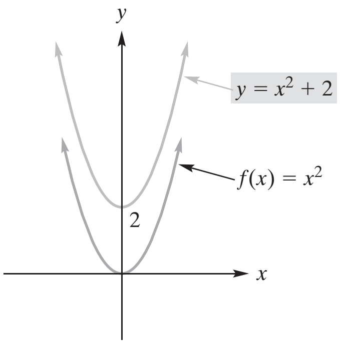


FIGURA 2.35 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

$f(x) = x^2$. Esto significa que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es simplemente la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada, o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba. (Vea la figura 2.35). Se dice que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x) = x^2$. La tabla 2.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

Tabla 2.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
$y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
$y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
$y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
$y = cf(x) \quad c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor c
$y = cf(x) \quad c < 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor c

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Haga el bosquejo de la gráfica de $y = (x - 1)^3$.

Solución: Se observa que $(x - 1)^3$ es x^3 con x reemplazada por $x - 1$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$, que tiene la forma $f(x — c)$, donde $c = 1$. Con base en la tabla 2.2, la gráfica de $y = (x - 1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha. (Vea la figura 2.36).

Ahora resuelva el problema 3 ◁

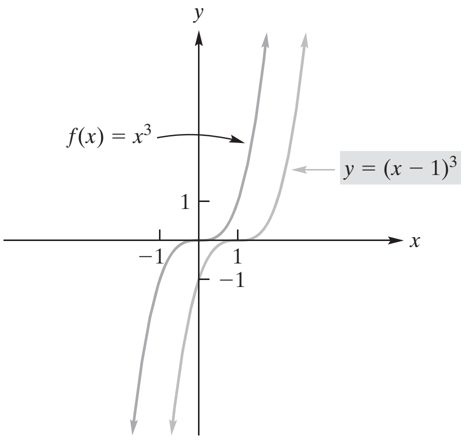


FIGURA 2.36 Gráfica de $y = (x - 1)^3$.

EJEMPLO 2 Contracción (alargamiento) y reflexión

Bosqueje la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: Este problema puede resolverse en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, donde $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verti-

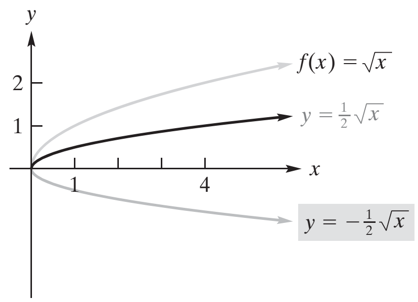


FIGURA 2.37 Para graficar $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

calmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 2.2; vea la figura 2.37). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 2.2; vea la figura 2.37).

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 2.7

En los problemas del 1 al 12, utilice las gráficas de las funciones de la figura 2.34 y las técnicas de transformación para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^3 - 1$

2. $y = -x^2$

3. $y = \frac{1}{x-2}$

4. $y = -\sqrt{x-2}$

5. $y = \frac{2}{3x}$

6. $y = |x| - 2$

7. $y = |x+1| - 2$

8. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$

9. $y = 2 + (x+3)^3$

10. $y = (x-1)^2 + 1$

11. $y = \sqrt{-x}$

12. $y = \frac{5}{2-x}$

En los problemas del 13 al 16, describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = -2f(x+3) + 2$

14. $y = 2(f(x-1) - 4)$

15. $y = f(-x) - 5$

16. $y = f(3x)$

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[5]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = kx^3$ para $k = 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe el alargamiento y la contracción verticales en comparación con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la obtenida por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = x^3$ con respecto al eje x.

Objetivo

Analizar funciones de varias variables y calcular valores funcionales. Analizar coordenadas en tres dimensiones y hacer bosquejos de superficies simples.

2.8 Funciones de varias variables

Cuando se definió una *función* $f : X \longrightarrow Y$ de X a Y en la sección 2.1, se hizo para los *conjuntos* X y Y sin el requisito de que se tratara de conjuntos de números. Todavía no se ha utilizado con frecuencia esa generalidad. La mayoría de los ejemplos presentados en este texto han sido funciones de $(-\infty, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$. También se vio en la sección 2.1 que, para los conjuntos X y Y, es posible construir la nueva serie $X \times Y$ cuyos elementos son pares ordenados (x, y) con x en X y y en Y. De ello se desprende que, para cualesquiera tres conjuntos X, Y y Z, la noción de una función $f : X \times Y \longrightarrow Z$ ya está contemplada en la definición básica. Tal f es simplemente una regla que asigna a cada elemento (x, y) presente en $X \times Y$ a lo sumo un elemento de Z, denotado por $f((x, y))$. Hay acuerdo general acerca de que, en esta situación, se debe eliminar una capa de paréntesis y escribir simplemente $f(x, y)$ para $f((x, y))$. Aquí tenga en cuenta que aún si X y Y son cada uno conjuntos de números, por ejemplo $X = (-\infty, \infty) = Y$, entonces $X \times Y$ definitivamente *no* es un conjunto de números. En otras palabras, *un par ordenado de números no es un número*.

La *gráfica* de una función $f : X \longrightarrow Y$ es el subconjunto de $X \times Y$ que consiste en todos los pares ordenados de la forma $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. De esto se deduce que la gráfica de una función $f : X \times Y \longrightarrow Z$ es el subconjunto de $(X \times Y) \times Z$ que consiste en todos los pares ordenados de la forma $((x, y), f(x, y))$, donde (x, y) está en el dominio de f.

En el par ordenado $((x, y), f(x, y))$, su primera coordenada está dada por (x, y), que es en sí mismo un par ordenado, mientras que su segunda coordenada es el elemento $f(x, y)$ en Z. La mayoría de las personas prefiere sustituir $(X \times Y) \times Z$ por $X \times Y \times Z$, uno de cuyos elementos es una **tripla ordenada** (x, y, z), con x en X, y en Y y z en Z. Estos elementos son más fáciles de leer que $((x, y), z)$, que son los elementos "oficiales" de $(X \times Y) \times Z$. De hecho, es posible *definir* una tripla ordenada (x, y, z) como una abreviatura de $((x, y), z)$ si así se desea.

Antes de seguir adelante, es importante darse cuenta de que estas consideraciones muy generales han sido motivadas por el deseo de volver aplicables las matemáticas. Muchas personas, cuando se enfrentan a modelos matemáticos construidos en torno a funciones y a las ecuaciones relacionadas con éstas, expresan a la vez un reconocimiento por la elegancia de las ideas y cierto escepticismo sobre su valor práctico. Una queja común es que en la práctica existen "factores" que no son tomados en cuenta por un modelo matemático particular. Traducido en el contexto que se está desarrollando aquí, con frecuencia esta queja significa que las funciones tratadas en un modelo matemático deben involucrar más variables de las que el modelador ha contemplado originalmente. Un aspecto importante de la solidez que un modelo matemático debe poseer es la capacidad de poder añadir nuevas variables para tomar en cuenta fenómenos que antes se pensaba eran insignificantes. Cuando se sabe cómo pasar de una variable a dos variables, donde las "dos variables" pueden interpretarse como un par ordenado y, por lo tanto, como una única variable de un nuevo tipo, entonces es posible repetir el procedimiento y hacer frente a funciones de tantas variables como se desee.

Para los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y Y, una función $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ en el sentido general proporciona la noción de una función valuada en Y de n variables. En este caso, un elemento del dominio de f es una n-**tupla ordenada** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, con x_i en X_i para $i = 1, 2, \cdots, n$, para la cual $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ está definida. La **gráfica** de f es el conjunto de todas las $n + 1$-tuplas ordenadas de la forma $(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$, donde $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ está en el dominio de f.

Suponga que un fabricante produce dos artículos, X y Y. Entonces, el costo total depende de los niveles de producción *tanto de* X *como de* Y. En la tabla 2.3 se presenta un programa que indica el costo total para diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se producen 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total c es 17. En esta situación, parece natural asociar el número 17 con el *par ordenado* (5, 6):

$$(5, 6) \mapsto 17$$

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X producidas, mientras que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades producidas de Y. Para las otras situaciones de producción mostradas, se tiene

$$(5, 7) \mapsto 19$$

$$(6, 6) \mapsto 18$$

y

$$(6, 7) \mapsto 20$$

Tabla 2.3

Número de unidades de X producidas, x	Número de unidades de Y producidas, y	Costo total de producción, c
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

Este listado puede considerarse como la definición de una función $c : X \times Y \longrightarrow (-\infty, \infty)$, donde $X = \{5, 6\}$ y $Y = \{6, 7\}$.

$$c(5, 7) = 19 \quad c(6, 7) = 20$$

$$c(5, 6) = 17 \quad c(6, 6) = 18$$

Se dice que el programa de costo total puede describirse mediante $c = c(x, y)$, que es una función de las dos variables independientes x y y. Aquí usamos la letra c como la variable independiente y también como el nombre de la regla que define la función. Por supuesto, el rango de c es el subconjunto $\{17, 18, 19, 20\}$ de $(-\infty, \infty)$. Debido a que es poco probable que los costos negativos tengan algún sentido, es posible refinar c y construirla como una función $c : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$.

La mayoría de las personas se han familiarizado con ciertas funciones de dos variables incluso mucho antes de haber escuchado acerca de las funciones, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1 Funciones de dos variables

a. $a(x, y) = x + y$ es una función de dos variables. Algunos valores funcionales son

$$a(1, 1) = 1 + 1 = 2$$

$$a(2, 3) = 2 + 3 = 5$$

Se tiene a: $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$.

b. $m(x, y) = xy$ es una función de dos variables. Algunos valores funcionales son

$$m(2, 2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$m(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

El dominio tanto de a como de m es todo $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Observe que si usted fuera a definir la división como una función d: $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$ con $d(x, y) = x \div y$, entonces el dominio de d es $(-\infty, \infty) \times ((-\infty, \infty) - \{0\})$, donde $(-\infty, \infty) - \{0\}$ es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

◁

Ahora consideremos otra función de dos variables, se observa que la ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a z como una función de x y y:

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación tiene sentido cuando el primero y segundo elementos de (x, y) se sustituyen por x y y, respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de f es $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) - \{(0, 0)\}$, el conjunto de todos los pares ordenados excepto $(0, 0)$. Por ejemplo, para encontrar $f(2, 3)$, se sustituye $x = 2$ y $y = 3$ en la expresión $2/(x^2 + y^2)$. Se obtiene, $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$.

APLÍQUELO ▶

15. El costo por día de fabricar tazas de 12 y 20 onzas para café está dado por $c = 160 + 2x + 3y$, donde x es el número de tazas de 12 onzas y y el de tazas de 20 onzas. ¿Cuál es el costo por día de la fabricación de

a. 500 tazas de 12 onzas y 700 tazas de 20 onzas?

b. 1000 tazas de 12 onzas y 750 tazas de 20 onzas?

EJEMPLO 2 Funciones de dos variables

a. $f(x, y) = \dfrac{x + 3}{y - 2}$ es una función de dos variables. Como el denominador es cero cuando $y = 2$, el dominio de f son todos los pares ordenados (x, y) tales que $y \neq 2$. Algunos valores funcionales son

$$f(0, 3) = \frac{0 + 3}{3 - 2} = 3$$

$$f(3, 0) = \frac{3 + 3}{0 - 2} = -3$$

Observe que $f(0, 3) \neq f(3, 0)$.

b. $h(x, y) = 4x$ define a h como función de x y y. El dominio son todos los pares ordenados de números reales. Algunos valores funcionales son

$$h(2, 5) = 4(2) = 8$$

$$h(2, 6) = 4(2) = 8$$

Observe que los valores de la función son independientes del valor de y.

c. Si $z^2 = x^2 + y^2$ y $x = 3$ y $y = 4$, entonces $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, $z = \pm 5$. Entonces, con el par ordenado (3, 4) *no es posible* asociar exactamente un solo número de salida. Por lo tanto, $z^2 = x^2 + y^2$ no define a z como una función de x y y.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 3 Índice de temperatura-humedad

En días húmedos y cálidos mucha gente tiende a sentirse incómoda. El grado de incomodidad está dado numéricamente por el índice de temperatura-humedad, ITH, que es una función de dos variables, t_d y t_w:

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w)$$

donde t_d es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit) y t_w es la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evalúe el ITH cuando $t_d = 90$ y $t_w = 80$.

Solución: Se desea encontrar $f(90, 80)$:

$$f(90, 80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83$$

Cuando el índice de temperatura-humedad es mayor que 75, la mayoría de la gente se siente incómoda. De hecho, el ITH solía llamarse antes "índice de incomodidad". Muchos dispositivos eléctricos responden a este índice y pueden anticipar la demanda de aire acondicionado en sus sistemas.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

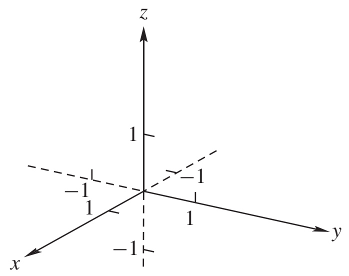


FIGURA 2.38 Sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones.

A partir del segundo párrafo de esta sección se deduce que una función $f: (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$, donde se escribe $z = f(x, y)$, tendrá una gráfica consistente en triplas ordenadas de números reales. El conjunto de todas las triplas de números reales puede representarse en un **sistema coordenado rectangular en *tres* dimensiones**. Tal sistema se forma cuando tres ejes de números reales mutuamente perpendiculares en el espacio se intersecan en el origen de cada eje, como en la figura 2.38. Las tres rectas numéricas se llaman eje x, eje y y eje z y su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema. Las flechas indican las direcciones positivas de los ejes, mientras que las porciones negativas de los ejes se muestran con líneas punteadas.

A cada punto P en el espacio se le puede asignar una tripla ordenada única de números, llamada *coordenadas* de P. Para hacerlo [vea la figura 2.39(a)], desde P se construye una recta perpendicular al plano xy —esto es, al plano determinado por lo ejes x y y—. Sea Q el punto donde la línea interseca este plano. Desde Q se trazan rectas perpendiculares a los ejes x y y, las cuales intersecan a los ejes x y y en x_0 y y_0, respectivamente. Desde P se traza una perpendicular al eje z, que lo interseca en z_0. De este modo, se ha asignado a P la tripla ordenada (x_0, y_0, z_0). Debe ser también evidente que a cada tripla ordenada se le puede asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio y triplas ordenadas, a una tripla ordenada se le puede llamar punto. En

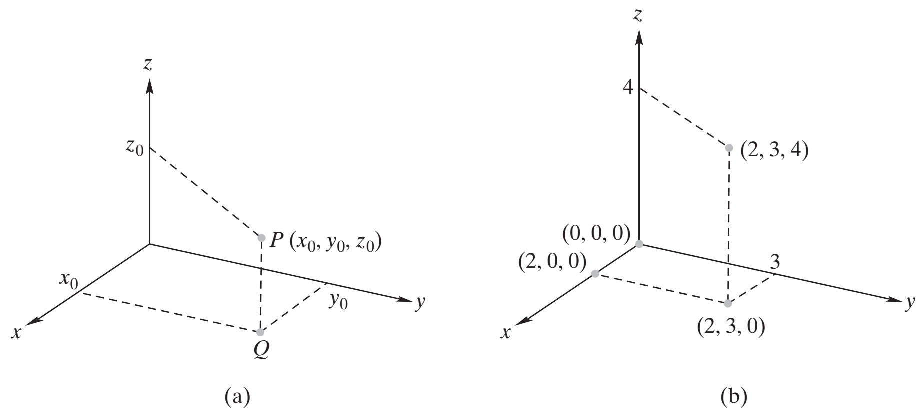


FIGURA 2.39 Puntos en el espacio.

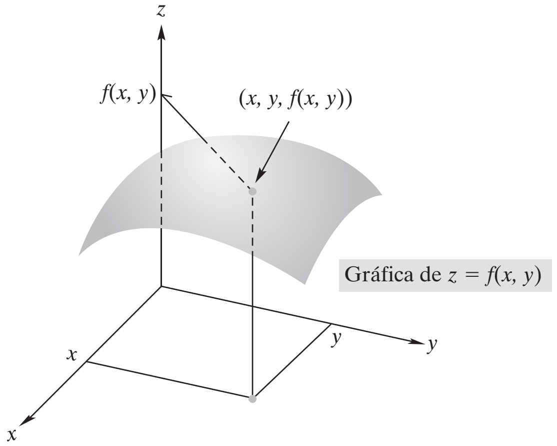


FIGURA 2.40 Gráfica de una función de dos variables.

la figura 2.39(b) se muestran los puntos (2, 0, 0), (2, 3, 0) y (2, 3, 4). Observe que el origen corresponde a (0, 0, 0). Por lo general, las porciones negativas de los ejes no se muestran a menos que sea necesario.

Es posible representar geométricamente una función de dos variables, $z = f(x, y)$ de la manera siguiente: a cada par ordenado (x, y) en el dominio de f, se le asigna el punto $(x, y, f(x, y))$. El conjunto de todos estos puntos se llama *gráfica* de f. Tal gráfica se muestra en la figura 2.40. Se puede considerar que $z = f(x, y)$ representa una *superficie en el espacio* de la misma forma que se ha considerado que $y = f(x)$ representa una *curva en el plano*. [No todas las funciones $y = f(x)$ describen curvas estéticamente agradables —de hecho, la mayoría no lo hace— y ocurre lo mismo con una superficie representada por funciones de este tipo].

Ahora se realizará un breve estudio acerca del bosquejo de superficies en el espacio. Iniciamos con planos que son paralelos a un plano coordenado. Por "plano coordenado" se entiende un plano que contiene dos ejes coordenados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes x y y es el **plano** xy. De manera similar, se habla del **plano** xz y del **plano** yz. Los planos coordenados dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. En particular, la parte que contiene todos los puntos (x, y, z), donde x, y y z son positivos, se llama **primer octante**.

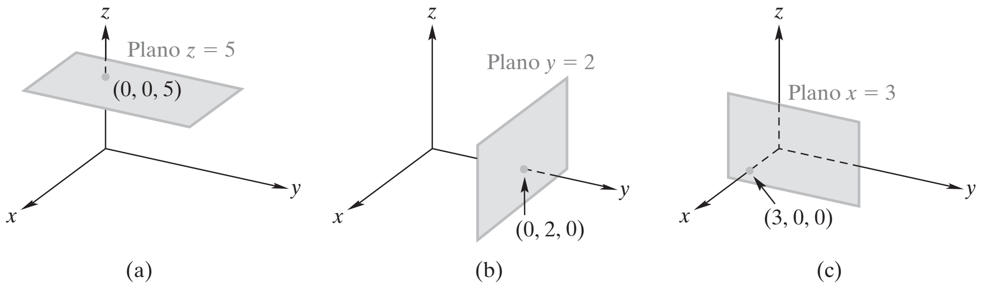
Por lo general, a los siete octantes restantes no se les asignan nombres.

Suponga que S es un plano paralelo al plano x, y y pasa por el punto (0, 0, 5). [Vea la figura 2.41(a)]. Entonces, el punto (x, y, z) estará en S si y solo si $z = 5$; esto es, x y y pueden ser cualesquiera números reales, pero z debe ser igual a 5. Por esta razón, se dice que $z = 5$ es una ecuación de S. En forma similar, una ecuación del plano paralelo al plano x, z y que pasa por el punto (0, 2, 0) es $y = 2$ [figura 2.41(b)]. La ecuación $x = 3$ es una ecuación del plano que pasa por (3, 0, 0) y es paralelo al plano y, z [figura 2.41(c)]. Ahora se verán los planos en general.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde D es una constante y A, B y C son constantes no todas iguales a cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos en la misma recta) determinan un plano, una manera



(a) (b) (c)

FIGURA 2.41 Planos paralelos a los planos coordenados.

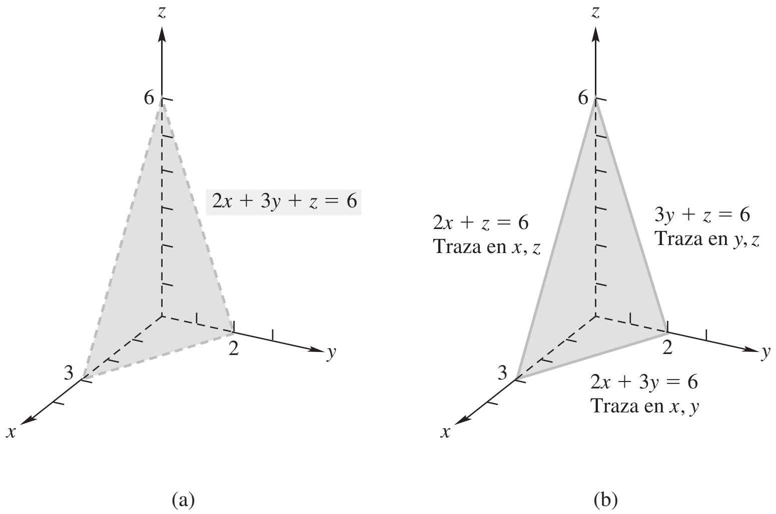
conveniente de esbozar un plano es encontrar primero los puntos, en caso de que existan, en que el plano interseca los ejes x, y y z. Esos puntos se llaman *intersecciones*.

EJEMPLO 4 Graficación de un plano

Bosqueje el plano $2x + 3y + z = 6$.

Solución: El plano interseca el eje x cuando $y = 0$ y $z = 0$. Así, $2x = 6$, lo cual da $x = 3$. De manera similar, si $x = z = 0$, entonces $y = 2$; si $x = y = 0$, entonces $z = 6$. Por lo tanto, las intersecciones son (3, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 6). Después de graficar estos puntos, se pasa un plano por ellos. La porción del plano situada en el primer octante se muestra en la figura 2.42(a); sin embargo, nótese que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

Ahora resuelva el problema 19 ◁



(a) (b)

FIGURA 2.42 El plano $2x + 3y + z = 6$ y sus trazas.

Una superficie puede bosquejarse con ayuda de sus **trazas**. Éstas son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. A modo de ilustración, para el plano $2x + 3y + z = 6$ del ejemplo 4, la traza en el plano x, y se obtiene haciendo $z = 0$. Esto da $2x + 3y = 6$, que es la ecuación de una *recta* en el plano x, y. En forma similar, al establecer $x = 0$ se obtiene la traza en el plano y, z; la recta $3y + z = 6$. La traza x, z es la recta $2x + z = 6$. [Vea la figura 2.42(b)].

EJEMPLO 5 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie $2x + z = 4$.

Solución: Esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones x y z son (2, 0, 0) y (0, 0, 4), no hay intersección y porque x y z no pueden ser cero al mismo tiempo. Haciendo $y = 0$ se obtiene la traza x, z $2x + z = 4$, que es una recta en el plano x, z. De hecho, la intersección de la superficie con *cualquier* plano $y = k$ es también $2x + z = 4$. Por consiguiente, el plano es como aparece en la figura 2.43.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

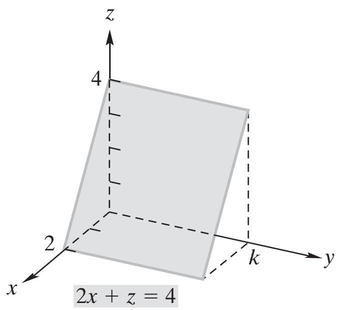


FIGURA 2.43 El plano $2x + z = 4$.

Los ejemplos finales tratan con superficies que no son planos, pero cuyas gráficas pueden obtenerse con facilidad.

EJEMPLO 6 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie $z = x^2$.

Solución: La traza *x, z* es la curva $z = x^2$, que es una parábola. De hecho, para *cualquier* valor fijo de y se obtiene $z = x^2$. Así, la gráfica es como en la figura 2.44.

Observe que esta ecuación no pone restricción sobre y.

Ahora resuelva el problema 25 ◁

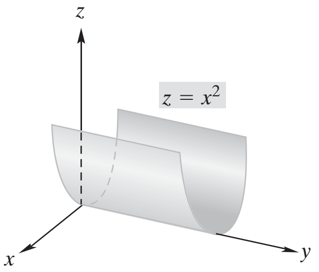


FIGURA 2.44 La superficie $z = x^2$.

EJEMPLO 7 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución: Haciendo $z = 0$ se obtiene la traza *x, y* $x^2 + y^2 = 25$, lo cual es un círculo de radio 5. De manera similar, las trazas *y, z* y *x, z* son los círculos $y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$, respectivamente. Observe también que como $x^2 + y^2 = 25 - z^2$, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, donde $-5 \leq k \leq 5$, es un círculo. Por ejemplo, si $z = 3$, la intersección es el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Si $z = 4$, la intersección es $x^2 + y^2 = 9$. Esto es, las secciones transversales de la superficie que son paralelas al plano *x, y* son círculos. La superficie se muestra en la figura 2.45; es una esfera.

Ahora resuelva el problema 27 ◁

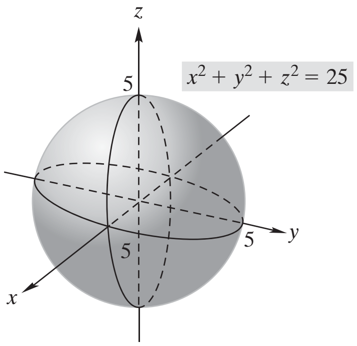


FIGURA 2.45 La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Para una función $f : X \times Y \longrightarrow Z$, se ha visto que la gráfica de f, al ser un subconjunto de $X \times Y \times Z$, es tridimensional para los ejemplos numéricos. Es cierto que la construcción de una gráfica de este tipo en papel puede resultar un reto. Existe otra presentación gráfica de una función $z = f(x, y)$, para $f : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$, que es totalmente bidimensional. Sea l un número en el rango de f. La *ecuación* $f(x, y) = l$ tiene un gráfico en el plano *x, y* que, en principio, puede construirse y etiquetarse. Si se repite esta construcción en el mismo plano para otros valores, por ejemplo l_i, en el rango de f se tiene entonces un conjunto de curvas, llamadas **curvas de nivel**, que pueden proporcionar una visualización útil de f.

Por lo menos existen dos ejemplos de esta técnica que representan una experiencia cotidiana para muchas personas. Primero, considere una región geográfica que es lo suficientemente pequeña como para ser considerada plana y trazarla en coordenadas. (Una ciudad con un entramado rectangular de avenidas y calles numeradas puede considerarse útil para trazarla en coordenadas). En cualquier momento dado, la temperatura T en grados Fahrenheit es una función del lugar (x, y). Podría escribirse $T = T(x, y)$. En un mapa de la región podrían conectarse todos los lugares que actualmente tienen una temperatura de 70 °F con una curva. Esta es la curva de $T(x, y) = 70$. Si se colocan otras diversas curvas, como $T(x, y) = 68$ y $T(x, y) = 72$, en el mismo mapa, entonces se tiene el tipo de mapa que aparece en los informes meteorológicos televisados. En este caso las curvas se llaman *isotermas*; el prefijo *iso* proviene del griego *isos* que significa "igual". Como siguiente ejemplo, de nuevo relacionado con la geografía, observe que cada lugar (x, y) tiene una altura definida $A = A(x, y)$. Un mapa de una región montañosa con puntos de igual altura conectados por lo que se denominan *líneas de contorno* se denomina *mapa topográfico*, y el término genérico *curvas de nivel* es particularmente oportuno en este caso.

En el capítulo 7 se presentará una serie de funciones *lineales* de varias variables. Si se tiene $P = ax + by$, expresando el beneficio P como una función de la producción x de un producto X y la producción y de un producto Y, entonces las curvas de nivel $ax + by = l$ se llaman *líneas de isobeneficio*.

EJEMPLO 8 Curvas de nivel

Bosqueje una familia de al menos cuatro curvas de nivel para la función $z = x^2 + y^2$.

Solución: Para cualquier par (x, y), $x^2 + y^2 \geq 0$, por lo que el rango de $z = x^2 + y^2$ está contenido en $[0, \infty)$. Por otra parte, para cualquier $l \geq 0$ se puede escribir $l = (\sqrt{l})^2 + 0^2$, la cual muestra que el rango de $z = x^2 + y^2$ es el intervalo $[0, \infty)$. Para $l \geq 0$, se reconoce la gráfica de $x^2 + y^2 = l$ como un círculo de radio $\sqrt{l}$ con centro en el origen (0, 0). Si l toma los valores 4, 9, 16 y 25, las curvas de nivel correspondientes son círculos concéntricos de radios 2, 3, 4 y 5, respectivamente. Vea la figura 2.46. Note que la "curva" de nivel $x^2 + y^2 = 0$ consiste en el punto (0, 0) y en ningún otro.

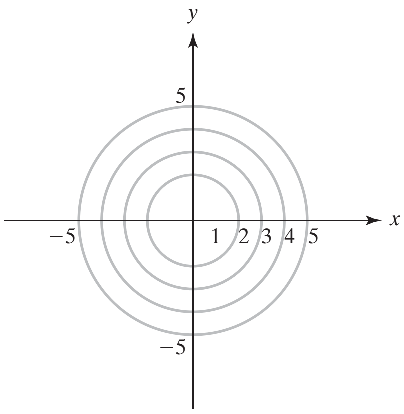


FIGURA 2.46 Curvas de nivel para $z = x^2 + y^2$.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

Un ejemplo de una función de tres variables es $v = v(x, y, z) = xyz$, la cual proporciona el volumen de un "ladrillo" con longitudes laterales x, y y z si x, y y z tienen valores positivos.

Un *elipsoide* es una superficie que en su "posición estándar" está dada por una ecuación de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, donde a, b y c son números positivos llamados radios. Ninguna de las variables es una función de las otras dos. Si dos de los números a, b y c son iguales y el tercero es más grande, entonces el tipo especial de elipsoide que resulta se llama *esferoide alargado*, del cual son ejemplos tanto un balón de fútbol americano como una pelota de rugby. En cualquier caso, el volumen del espacio encerrado por un elipsoide con radios a, b y c está dado por $V = V(a, b, c) = \dfrac{4}{3}\pi abc$; y este es otro ejemplo de una función de tres variables (positivas).

En el contexto de las funciones de varias variables, también es interesante considerar funciones cuyos *valores* son pares ordenados. Para cualquier conjunto X, una de las más sencillas es la función *diagonal*   : $X \longrightarrow X \times X$ dada por $(x) = (x, x)$. En el ejemplo 1(b) se mencionó que la multiplicación ordinaria es una función $m : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$. Si   denota la función diagonal para $(-\infty, \infty)$, entonces se tiene que la composición $m \circ$ es de las funciones más simples de imaginar   y m y que m es la función más interesante $y = x^2$.

PROBLEMAS 2.8

En los problemas 1 a 12, determine los valores funcionales indicados para las funciones dadas.

1. $f(x, y) = 4x - y^2 + 3; \quad f(1, 2)$

2. $f(x, y) = 3x^2y - 4y; \quad f(2, -1)$

3. $g(x, y, z) = 2x(3y + z); \quad g(3, 0, -1)$

4. $g(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2; \quad g(3, 1, -2)$

5. $h(r, s, t, u) = \dfrac{rs}{t^2 - u^2}; \quad h(-3, 3, 5, 4)$

6. $h(r, s, t, u) = ru; \quad h(1, 5, 3, 1)$

7. $g(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}) = 2p_{\mathrm{A}}(p_{\mathrm{A}}^2 - 5); \quad g(4, 8)$

8. $g(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}) = p_{\mathrm{A}}^2\sqrt{p_{\mathrm{B}}} + 9; \quad g(4, 9)$

9. $F(x, y, z) = 3; \quad F(2, 0, -1)$

10. $F(x, y, z) = \dfrac{2x}{(y + 1)z}; \quad F(1, 0, 3)$

11. $f(x, y) = (x + y)^2; \quad f(a + h, b)$

12. $f(x, y) = x^2y - 3y^3; \quad f(r + t, r)$

13. Ecología Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones de animales en un área dada implica marcar primero todos los animales obtenidos en una muestra de R animales del área y luego soltarlos de manera que puedan mezclarse con animales no marcados. En fecha posterior, se toma una segunda muestra de M animales y se anota el número de aquellos que ya están marcados, S. Con base en R, M y S, una estimación de la población total N de animales en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}$$

Encuentre $f(200, 200, 50)$. Este método se llama *procedimiento de marcaje y recaptura.*[6]

14. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen exactamente k hijos, la probabilidad de que haya exactamente entre los hijos r individuos con ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k - r)!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, k$$

Encuentre la probabilidad de que de un total de cuatro hijos, exactamente tres tengan ojos azules.

En los problemas 15 a 18, encuentre las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones dadas.

15. Paralelo al plano x, z que pasa por el punto (0, 2, 0).

16. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto (−2, 0, 0).

17. Paralelo al plano x, y que pasa por el punto (2, 7, 6).

18. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto (96, −2, 2).

En los problemas 19 a 28, bosqueje las superficies dadas.

19. $x + y + z = 1$

20. $2x + y + 2z = 6$

21. $3x + 6y + 2z = 12$

22. $2x + 3y + 5z = 1$

23. $3x + y = 6$

24. $y = 3z + 2$

25. $z = 4 - x^2$

26. $y = z^2$

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

28. $x^2 + 4y^2 = 1$

En los problemas 29 y 30, bosqueje al menos tres curvas de nivel para la función dada.

29. $z = 5x + 8y$

30. $z = x^2 - y^2$

---

[6] E. P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1966).

Repaso del capítulo 2

Términos y símbolos importantes

Sección 2.1 **Funciones**
función dominio rango variable independiente
variable dependiente valor funcional, $f(x)$
cociente de diferencias, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
función de demanda función de oferta

Sección 2.2 **Funciones especiales**
función constante función polinomial (lineal y cuadrática)
función racional función definida por partes
valor absoluto, $|x|$ factorial, $r!$

Sección 2.3 **Combinaciones de funciones**
$f+g$ $f-g$ fg f/g función composición, $f \circ g$

Sección 2.4 **Funciones inversas**
función inversa, f^{-1} función uno a uno

Sección 2.5 **Gráficas en coordenadas rectangulares**
sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas origen plano x, y
par ordenado (x, y) coordenadas de un punto cuadrante gráfica de una ecuación
intersección x intersección y
gráfica de una función eje de valores funcionales ceros de una función
prueba de la recta vertical prueba de la recta horizontal

Sección 2.6 **Simetría**
simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y
simetría con respecto al origen simetría con respecto a $y = x$

Sección 2.7 **Traslaciones y reflexiones**
traslaciones horizontales y verticales
contracción (alargamiento) y reflexión

Sección 2.8 **Funciones de varias variables**
$z = f(x, y)$
gráfica de $z = f(x, y)$
curvas de nivel

Resumen

Una función f es una regla que asigna cuando mucho una salida $f(x)$ a cada posible entrada x. Por lo general, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para obtener un valor particular $f(a)$ de la función, se reemplaza cada x presente en la ecuación por a.

El dominio de una función $f: X \longrightarrow Y$ consiste en todas las entradas x para las cuales la regla define $f(x)$ como un elemento de Y; el rango consiste en todos los elementos de Y que tienen la forma $f(x)$.

Algunos tipos especiales de funciones son: funciones constantes, funciones polinomiales y funciones racionales. Una función que está definida por medio de más de una expresión, dependiendo del tipo de entrada, se denomina función definida por partes.

Una función tiene una inversa si y solo si es uno a uno.

En economía, las funciones de oferta (y demanda) dan una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\
(fg)(x) &= f(x)g(x)\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\\
(f \circ g)(x) &= f(g(x))
\end{aligned}$$

Un sistema de coordenadas rectangulares permite representar de manera geométrica ecuaciones en dos variables (en particular aquellas que surgen de funciones). La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Se grafica un número suficiente de puntos y se conectan (donde sea apropiado) de modo que la forma básica de la gráfica sea evidente. Los puntos donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al hacer y igual a 0 y resolver para x; una intersección y se encuentra al hacer x igual a 0 y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Los ceros de f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar el dominio y el rango.

Para verificar que una gráfica representa a una función se utiliza la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

Para verificar que una función es uno a uno se utiliza la prueba de la recta horizontal. Una recta horizontal no puede cortar a la gráfica de una función uno a uno en más de un punto. Cuando una función pasa la prueba de la recta horizontal, puede obtenerse la gráfica de la inversa al reflejar la gráfica original en la recta $y = x$.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto de imagen de espejo permite bosquejar la gráfica con menos puntos que de otra forma serían necesarios. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto a $y = x$	Intercambie x y y en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien mediante un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 2.2 de la sección 2.7.

Una función de dos variables es una función cuyo dominio consiste en pares ordenados. Una función de n variables es una función cuyo dominio consiste en n-tuplas ordenadas. La gráfica de una función de dos variables con valores reales requiere un sistema de coordenadas tridimensional. Las curvas de nivel proporcionan otra técnica útil para visualizar funciones de dos variables.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 6, proporcione el dominio de cada función.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 5}$

2. $g(x) = x^2 + 3|x + 2|$

3. $F(t) = 7t + 4t^2$

4. $G(x) = 18$

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s - 5}}{4}$

En los problemas del 7 al 14, encuentre los valores funcionales para la función dada.

7. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5;\ f(0),\ f(-2),\ f(5),\ f(\pi)$

8. $h(x) = 7;\ h(4),\ h\left(\dfrac{1}{100}\right),\ h(-156),\ h(x + 4)$

9. $G(x) = \sqrt[4]{x - 3};\ G(3),\ G(19),\ G(t + 1),\ G(x^3)$

10. $F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4};\ F(-1),\ F(0),\ F(5),\ F(x + 3)$

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u + 4}}{u};\ h(5),\ h(-4),\ h(x),\ h(u - 4)$

12. $H(t) = \dfrac{(t - 2)^3}{5};\ H(-1),\ H(0),\ H\left(\dfrac{1}{3}\right),\ H(x^2)$

13. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ 4 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases};$

$f(4),\ f(-2),\ f(0),\ f(1)$

14. $f(q) = \begin{cases} -q + 1 & \text{si } -1 \le q < 0 \\ q^2 + 1 & \text{si } 0 \le q < 5 \\ q^3 - 99 & \text{si } 5 \le q \le 7 \end{cases};$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(5), f(6)$

En los problemas del 15 al 18, encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$

16. $f(x) = 11x^2 + 4$

17. $f(x) = 3x^2 + x - 2$

18. $f(x) = \dfrac{7}{x + 1}$

19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, encuentre lo siguiente:

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)(4)$ **(c)** $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(1)$ **(f)** $\dfrac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(5)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

20. Si $f(x) = -x^2$ y $g(x) = 3x + 2$, determine lo siguiente:

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)(-3)$

(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\dfrac{f}{g}(x)$ **(f)** $\dfrac{f}{g}(2)$

(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(-4)$

En los problemas 21 al 24, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ g(x) = x + 1$

22. $f(x) = \dfrac{x - 2}{3},\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

23. $f(x) = \sqrt{x + 2},\ g(x) = x^3$

24. $f(x) = 2,\ g(x) = 3$

En los problemas 25 y 26, encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a y = x. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 3x - x^3$

26. $\dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 4$

En los problemas 27 y 28, encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 4 + x^2$

28. $y = 3x - 7$

En los problemas del 29 al 32, trace la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u+4}$

30. $f(x) = |x| + 1$

31. $y = g(t) = \dfrac{2}{|t-4|}$

32. $v = \phi(u) = \sqrt{-u}$

33. Grafique la siguiente función definida por partes y proporcione su dominio y rango:

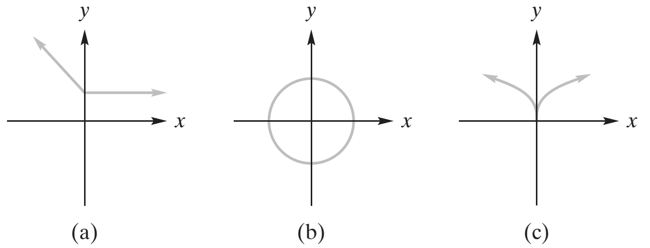
$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x-2} - 1$.

35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

36. Ecuación de tendencia Las ventas anuales proyectadas de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150\,000 + 3000t$, donde t es el tiempo en años contados a partir de 2005. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Encuentre las ventas anuales proyectadas para 2010. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 2.47, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?



(a) (b) (c)

FIGURA 2.47 Diagrama para el problema 37.

38. *Si* $f(x) = (x^2 - x + 7)^3$, encuentre (a) $f(2)$ y (b) $f(1.1)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Encuentre todos los ceros reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4 & \text{si } x < 0 \\ 6 + 4.1x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+5}(x^2 - 4)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todos los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^2 + x^k$, para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

46. Bosqueje la gráfica de $x + 2y + 3z = 6$.

47. Bosqueje la gráfica de $3x + y + 5z = 10$.

48. Construya tres curvas de nivel para $P = 5x + 7y$.

49. Construya tres curvas de nivel para $C = 2x + 10y$.

EXPLORE Y AMPLÍE Una experiencia con los impuestos

De manera ocasional, usted escuchará a algún ciudadano estadounidense quejarse de que una fuente de ingresos inesperada lo *empujará* a la *siguiente clasificación en los impuestos*, con la subsecuente especulación de que esto significará una reducción en los *ingresos retenibles*. Es verdad que el impuesto federal sobre el ingreso se determina en Estados Unidos mediante funciones por partes (estas partes son llamadas frecuentemente *clasificaciones*), pero veremos que no hay *saltos* en el pago de impuestos como una función del ingreso. La creencia de que un incremento en el ingreso antes de impuestos significará una reducción en el ingreso retenido es una leyenda urbana.

Examinaremos las tasas de impuestos federales aplicadas en 2008 en Estados Unidos para un matrimonio que está llenando una solicitud de devolución. El documento relevante es la forma Y-1, que está disponible en `http://www.irs.gov/` y se presenta parcialmente en la figura 2.48

Forma Y-1 — Úsela si su clasificación en 2008 es Casado clasificado en conjunto o Viudo(a) calificado(a)

Si la línea 5 es:		**El impuesto es:**	
Mayor que	*Pero no mayor que*		*del monto sobre*
$0	$16 050	.... 10%	$0
16 050	65 100	$1 605.00 + 15%	16 050
65 100	131 450	8 962.50 + 25%	65 100
131 450	200 300	25 550.00 + 28%	131 450
200 300	357 700	44 828.00 + 33%	200 300
357 700	....	96 770.00 + 35%	357 700

FIGURA 2.48 Internal Revenue Service (oficina recaudadora de impuestos en Estados Unidos) 2008, forma Y-1.

La forma Y-1 define una función, llámela f, de ingreso x, para $x \geq 0$. De hecho, para cualquier $x \geq 0$, x pertenece a exactamente uno de los intervalos

$$\begin{aligned}&[0, 16\,050]\\&(16\,050, 65\,100]\\&(65\,100, 131\,450]\\&(131\,450, 200\,300]\\&(200\,300, 357\,700]\\&(357\,700, \infty)\end{aligned}$$

y en cuanto se determina el intervalo, existe una regla simple que se aplica para calcular un valor único $f(x)$.

Por ejemplo, para calcular $f(83\,500)$, los impuestos sobre un ingreso de \$83 500, observe primero que 83 500 pertenece al intervalo (65 100, 131 450] y para dicha x la fórmula de impuestos es $f(x) = 8962.50 + 0.25(x - 65\,100)$, dado que $x - 65\,100$ es el ingreso por encima de \$65 100 y se graba a la tasa del 25% = 0.25.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f(83{,}500) &= 8\,962.50 + 0.25(83\,500 - 65\,100)\\&= 8\,962.50 + 0.25(18\,400)\\&= 8\,962.50 + 4\,600\\&= 13\,562.50\end{aligned}$$

Con propósitos de ilustración, escribimos la forma Y-1 en una notación genérica para una función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 0.10x & \text{si } 0 \leq x \leq 16\,050 \\ 1\,605 + 0.15(x - 16\,050) & \text{si } 16\,050 < x \leq 65\,100 \\ 8\,962.50 + 0.25(x - 65\,100) & \text{si } 65\,100 < x \leq 131\,450 \\ 25\,550 + 0.28(x - 131\,450) & \text{si } 131\,450 < x \leq 200\,300 \\ 44\,828 + 0.33(x - 200\,300) & \text{si } 200\,300 < x \leq 357\,700 \\ 96\,770 + 0.35(x - 357\,700) & \text{si } x > 357\,700 \end{cases}$$

Con estas fórmulas, es posible representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 2.49.

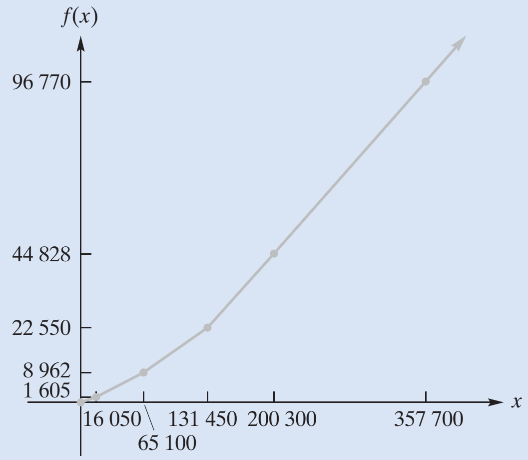


FIGURA 2.49 Función del impuesto con respecto al ingreso.

Problemas

Use la función anterior de impuesto al ingreso para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable en 2008.

1. \$27 000

2. \$89 000

3. \$350 000

4. \$560 000

5. Busque la forma X más reciente en `http://www.irs.gov/` y repita los problemas del 1 al 4 para una sola persona.

6. ¿Por qué es significativo que $f(16\,050) = \$1605$, $f(65\,100) = \$8962.50$, etcétera?

7. Defina la función g por $g(x) = x - f(x)$. Así que $g = I - f$, donde I es la función identidad presentada en la sección 2.3. La función g da, para cada ingreso antes de impuestos, la cantidad que el contribuyente retiene de su ingreso y es, como f, una función definida por partes. Escriba una descripción completa para g, en términos de las clasificaciones, como se hizo para f.

8. Grafique la función g definida en el problema 7. Observe que si $a < b$, entonces $g(a) < g(b)$. Esto muestra que si se incrementa el ingreso antes de impuestos, entonces el ingreso retenible aumenta, sin importar cualquier salto a una clasificación más alta (con lo cual se derrumba una leyenda urbana).

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3

De la misma forma que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadora se propagan cuando las computadoras interactúan vía Internet. Los científicos computacionales estudian cómo pelear contra los virus de computadora, que causan mucho daño por la forma en que borran o alteran archivos. Una de las cosas que hacen los científicos es diseñar modelos matemáticos de la rapidez con que se propagan los virus. Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo, Melissa había alcanzado a más de 100 000 computadoras.

Las funciones exponenciales, que se estudian con detalle en este capítulo, proporcionan un modelo recomendable. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico y que, una vez que el archivo se descarga o baja de Internet, de manera automática se envía un mensaje con un archivo adjunto similar a todas las direcciones registradas en la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si una libreta de direcciones típica contiene 20 direcciones, y si el usuario común de computadora revisa su correo electrónico una vez por día, entonces un virus descargado en una sola máquina habrá infectado a 20 máquinas en un día, $20^2 = 400$ máquinas al cabo de dos días, $20^3 = 8000$ máquinas después de tres días y, en general, después de t días, el número N de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial $N(t) = 20^t$.

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras, a través de su libreta de direcciones, en un solo grupo bien conectado. Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de t, este modelo en particular no toma en cuenta el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos comienzan a ir a computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede cuando pasan varios días. Por ejemplo, el modelo desarrollado aquí indica que después de ocho días se infectará a $20^8 = 25.6$ mil millones de computadoras —¡más computadoras de las que existen en la actualidad!—. Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales explican el porqué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

3.1 Funciones exponenciales

Objetivo

Estudiar las funciones exponenciales y sus aplicaciones en temas como interés compuesto, crecimiento poblacional y decaimiento radiactivo.

Las funciones que tienen la forma $f(x) = b^x$, para una b constante, son importantes en matemáticas, administración, economía y otras áreas de estudio. Un excelente ejemplo es $f(x) = 2^x$. Las funciones de este tipo se llaman *funciones exponenciales*. De manera más precisa,

Definición

La función f definida por

$$f(x) = b^x$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama ***función exponencial*** con base b.[1]

¡ADVERTENCIA!

No confunda la función exponencial $y = 2^x$ con la *función potencia* $y = x^2$, que tiene una base variable y un exponente constante.

Como en b^x el exponente puede ser cualquier número real, el lector podría desear saber cómo se le asigna un valor a algo como $2^{\sqrt{2}}$, donde el exponente es un número irracional. Simplemente se utilizan aproximaciones. Como $\sqrt{2} = 1.41421\ldots, 2^{\sqrt{2}}$ es aproximadamente $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$, que *sí* está definido. Las mejores aproximaciones son $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$, y así sucesivamente. De esta manera, el significado de $2^{\sqrt{2}}$ se vuelve claro. El valor que da una calculadora para $2^{\sqrt{2}}$ es (aproximadamente) 2.66514.

Cuando se trabaja con funciones exponenciales, puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, donde x y y son números reales y b y c son positivos.

Reglas de los exponentes

1. $b^x b^y = b^{x+y}$

2. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

3. $(b^x)^y = b^{xy}$

4. $(bc)^x = b^x c^x$

5. $\left(\dfrac{b}{c}\right)^x = \dfrac{b^x}{c^x}$

6. $b^1 = b$

7. $b^0 = 1$

8. $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial b^x pueden ponerse en esa forma aplicando las reglas anteriores. Por ejemplo, $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$ y $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$.

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por

$$N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^t$$

Observe que $N(t)$ es un múltiplo constante de la función exponencial $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t$.

APLÍQUELO ▶

1. En un cultivo que duplica su número cada hora, el número de bacterias está dado por $N(t) = A \cdot 2^t$, donde A es el número presente al inicio y t es el número de horas que las bacterias se han estado duplicando. Utilice una calculadora para graficar esta función con diferentes valores de $A > 1$. ¿En qué se parecen las gráficas? ¿Cómo altera a la gráfica el valor de A?

---

[1] Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función ya se ha estudiado antes y se conoce como función constante.

a. ¿Cuántas bacterias están presentes al inicio?

Solución: Aquí se quiere determinar $N(t)$ cuando $t = 0$. Se tiene

$$N(0) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300$$

Así que al inicio hay 300 bacterias presentes.

b. Aproximadamente, ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?

Solución:

$$N(3) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 300\left(\frac{64}{27}\right) = \frac{6400}{9} \approx 711$$

Por lo que, después de 3 minutos, hay aproximadamente 711 bacterias presentes.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

APLÍQUELO ▶

2. Suponga que una inversión aumenta 10% cada año. Haga una tabla del factor por el cual aumenta la inversión a partir de la cantidad original desde los 0 hasta los 4 años. Para cada año, construya una expresión que describa el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función del número de años; luego, utilice su gráfica para determinar cuándo se duplica la inversión.

Gráficas de funciones exponenciales

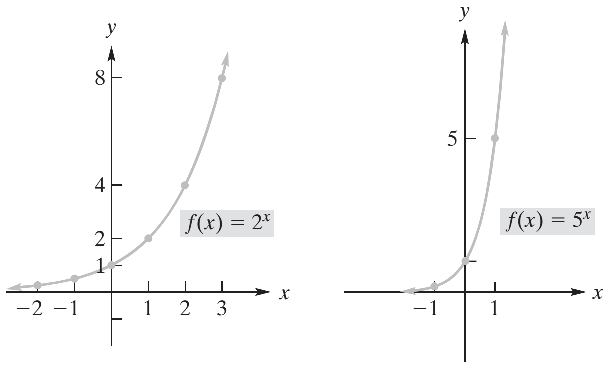
EJEMPLO 2 Trazar funciones exponenciales con $b > 1$

Grafique las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Solución: Al graficar puntos y conectarlos se obtienen las gráficas de la figura 3.1. Para la gráfica de $f(x) = 5^x$, debido a la unidad de distancia seleccionada sobre el eje y, no se muestran los puntos $(-2, \frac{1}{25})$, (2, 25) y (3, 125).

Pueden hacerse algunas observaciones acerca de estas gráficas. El dominio de cada función es el conjunto de todos los números reales y el rango consiste en todos los números reales positivos. Cada gráfica tiene intersección y (0, 1). Además, estas gráficas tienen la misma forma general. Cada una *asciende* de izquierda a derecha. Conforme aumenta x, $f(x)$ también aumenta. De hecho, $f(x)$ aumenta sin límite. Sin embargo, en el cuadrante I, la gráfica de $f(x) = 5^x$ asciende más rápido que $f(x) = 2^x$ porque la base en 5^x es *mayor* que la base en 2^x (esto es, $5 > 2$). En el cuadrante II, se observa que cuando x se hace más negativa, las gráficas de ambas funciones se aproximan al eje x.[2] Esto implica que los valores de las funciones se vuelvan muy cercanos a 0.

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



(a) (b)

x	5^x
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25
3	125

FIGURA 3.1 Gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

---

[2] Se dice que el eje x es una *asíntota* para cada gráfica.

Las observaciones hechas en el ejemplo 2 son ciertas para todas las funciones exponenciales cuya base b es mayor que 1. En el ejemplo 3 se examinará el caso de una base entre 0 y 1 ($0 < b < 1$).

EJEMPLO 3 Trazar funciones exponenciales con $0 < b < 1$

Grafique la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución: Al graficar puntos y conectarlos, se obtiene la gráfica de la figura 3.2. Observe que el dominio equivale a todos los números reales y el rango a todos los números reales positivos. La gráfica tiene intersección y (0, 1). Comparando con las gráficas del ejemplo 2, se observa que aquí la gráfica *desciende* de izquierda a derecha. Esto es, conforme x aumenta $f(x)$ disminuye. Note que cuando x toma valores positivos cada vez más grandes, $f(x)$ toma valores muy cercanos a 0 y la gráfica se aproxima al eje x. Sin embargo, cuando x se vuelve muy negativa, los valores de la función no están acotados.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

1. Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% cada año. Haga una tabla del factor por el cual disminuye a partir de su monto original desde los 0 hasta los 3 años. Para cada año, escriba una expresión para la disminución como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizó? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice su tabla para graficar la disminución multiplicativa como una función del número de años; luego, utilice su gráfica para determinar cuándo el automóvil disminuye su valor a la mitad del valor original.

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales y dependen de la base involucrada.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

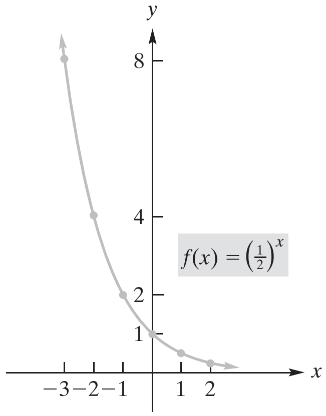


FIGURA 3.2 Gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

En general, existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales y dependen del valor de la base b. Lo anterior se ilustra en la figura 3.3. Es importante observar que en cualquier caso la gráfica pasa la prueba de la línea horizontal. Por ende, todas las funciones exponenciales son uno a uno. Las propiedades básicas de una función exponencial y su gráfica se resumen en la tabla 3.1.

Recuerde de la sección 2.7 que la gráfica de una función puede ser relacionada con otra por medio de cierta transformación. El ejemplo siguiente se refiere a este concepto.

Tabla 3.1 Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

1. El dominio de cualquier función exponencial es $(-\infty, \infty)$.
El rango de cualquier función exponencial es $(0, \infty)$.

2. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección y (0, 1).
No hay intersección x.

3. Si $b > 1$, la gráfica *asciende* de izquierda a derecha.
Si $0 < b < 1$, la gráfica *desciende* de izquierda a derecha.

4. Si $b > 1$, la gráfica se acerca al eje x conforme x se vuelve más y más negativa.
Si $0 < b < 1$, la gráfica se acerca al eje x conforme x se vuelve más y más positiva.

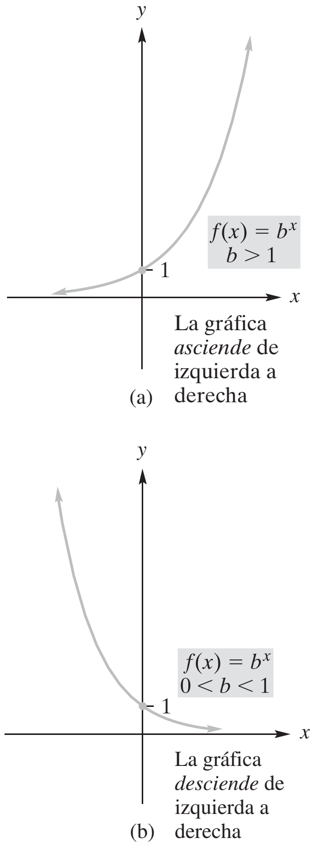


FIGURA 3.3 Formas generales de $f(x) = b^x$.

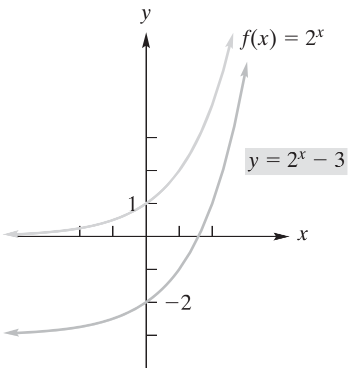


FIGURA 3.4 Gráfica de $y = 2^x - 3$.

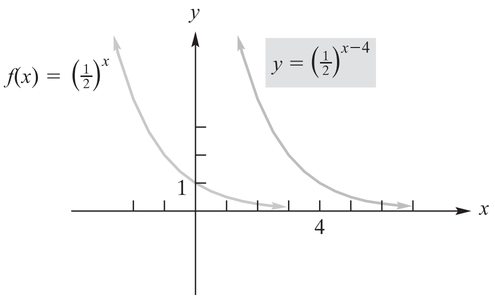
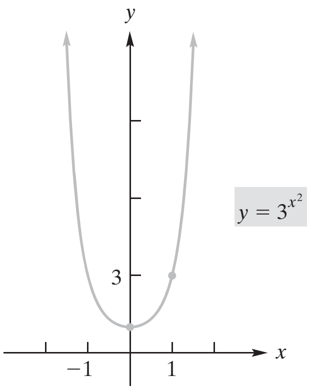


FIGURA 3.5 Gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.



x	0	1	2
y	1	3	81

FIGURA 3.6 Gráfica de $y = 3^{x^2}$.

En el ejemplo 4 se hace uso de las transformaciones de la tabla 2.2. presentada en la sección 2.7.

APLÍQUELO ▶

4. Después de observar el crecimiento del dinero de su hermana durante tres años en un plan con tasa de interés de 8% anual, George abrió una cuenta de ahorros con el mismo plan. Si $y = 1.08^t$ representa el aumento multiplicativo en la cuenta de la hermana de George, escriba una ecuación que represente el aumento multiplicativo en la cuenta de George utilizando la misma referencia de tiempo. Si George tiene una gráfica de aumento multiplicativo del dinero de su hermana en el tiempo t desde que ella inició su ahorro, ¿cómo podría utilizarla él para proyectar el incremento en su dinero?

EJEMPLO 4 Transformaciones de funciones exponenciales

a. Use la gráfica de $y = 2^x$ para graficar $y = 2^x - 3$.

Solución: La función tiene la forma $f(x) — c$, donde $f(x) = 2^x$ y $c = 3$. Así que su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades hacia abajo. (Vea la figura 3.4).

b. Use la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para trazar $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.

Solución: La función tiene la forma $f(x - c)$, donde $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $c = 4$. Por lo tanto, su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ cuatro unidades hacia la derecha. (Vea la figura 3.5).

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 5 Gráfica de una función con base constante

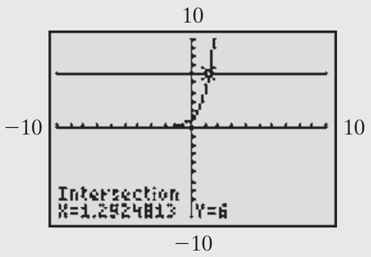
Grafique $y = 3^{x^2}$.

Solución: Aunque ésta no es una función exponencial, tiene una base constante. Se observa que al reemplazar x por $-x$ resulta la misma ecuación. Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Al graficar algunos puntos y utilizar la simetría se obtiene la gráfica de la figura 3.6.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

TECNOLOGÍA

Si $y = 4^x$, considere el problema de encontrar x cuando $y = 6$. Una forma de resolverlo es encontrar la intersección de las gráficas de $y = 6$ y $y = 4^x$. En la figura 3.7 se muestra que x es aproximadamente igual a 1.29.



```
Intersection
X=1.2924813  Y=6
```

FIGURA 3.7 Resolución de la ecuación $6 = 4^x$.

Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el **interés compuesto**, en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (o **capital**), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Esto es, el interés se convierte (o *compone*) en capital y, por lo tanto, hay "interés sobre interés".

Por ejemplo, suponga que se invierten \$100 (dólares estadounidenses) a una tasa de 5% compuesto anualmente. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100) más el interés sobre este capital [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.05) = \$105$$

Esta es la cantidad sobre la cual se genera el interés para el segundo año. Al final del segundo año, el valor de la inversión es el capital del final del primer año (\$105) más el interés sobre esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25$$

Así, cada año el capital se incrementa en 5%. Los \$110.25 representan el capital original más todo el interés acumulado; esta cantidad se denomina **monto acumulado** o **monto compuesto**. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se conoce como **interés compuesto**. Aquí, el interés compuesto es $110.25 - 100 = 10.25$.

De manera más general, si un capital P se invierte a una tasa de $100r$ por ciento compuesto anualmente (por ejemplo, a 5%, r es 0.05), la cantidad compuesta después de un año es $P + Pr$ o, factorizando, $P(1 + r)$. Al final del segundo año, la cantidad compuesta es

$$\begin{aligned} P(1+r) + [P(1+r)]r &= P(1+r)[1+r] \qquad \text{factorizando} \\ &= P(1+r)^2 \end{aligned}$$

En realidad, el cálculo anterior que usa factorización no es necesario para mostrar que el monto compuesto después de dos años es $P(1 + r)^2$. Como *cualquier* monto P vale $P(1 + r)$ un año después, se deduce que el monto $P(1 + r)$ vale $P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$ un año más tarde y que, luego de otro año, el monto $P(1 + r)^2$ valdrá $P(1 + r)^2(1 + r) = P(1 + r)^3$.

Este patrón continúa. Después de cuatro años la cantidad compuesta es $P(1 + r)^4$. En general, el **monto compuesto S del capital P al final de n años a una tasa de r compuesta anualmente** está dado por

$$\boxed{S = P(1+r)^n} \qquad \textbf{(1)}$$

Dada la ecuación (1), observe que para un capital y una tasa dados, S es una función de n. De hecho, S es un múltiplo constante de la función exponencial con base $1 + r$.

APLÍQUELO ▶

5. Suponga que se invierten \$2000 al 13% compuesto anualmente. Encuentre el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés ganado durante los primeros cinco años.

EJEMPLO 6 Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que se invierten \$1000 durante 10 años al 6% compuesto anualmente.

a. Encuentre el monto compuesto.

Solución: Se utiliza la ecuación (1) con $P = 1000$, $r = 0.06$ y $n = 10$:

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85$$

En la figura 3.8 se muestra la gráfica de $S = 1000(1.06)^n$. Observe que conforme pasa el tiempo, el monto compuesto crece en forma impresionante.

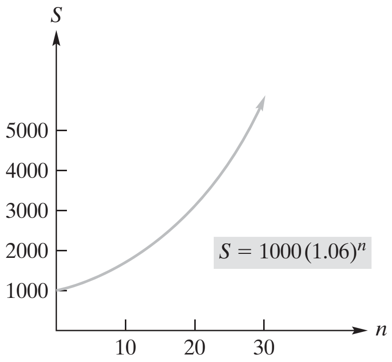


FIGURA 3.8 Gráfica de $S = 1000(1.06)^n$.

b. Encuentre el interés compuesto.

Solución: Usando los resultados del inciso (a), se tiene

$$\begin{aligned} \text{interés compuesto} &= S - P \\ &= 1790.85 - 1000 = \$790.85 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

Suponga que el capital de \$1000 indicado en el ejemplo 6 se invierte durante 10 años, como se hizo antes, pero esta vez se compone cada tres meses (esto es, *cuatro veces al año*) a una tasa de $1\frac{1}{2}\%$ *por trimestre*. Entonces hay cuatro **periodos de interés** por año y en 10 años son $10(4) = 40$ periodos de interés. Así, el monto compuesto con $r = 0.015$ ahora es

$$1000(1.015)^{40} \approx \$1814.02$$

y el interés compuesto es \$814.02. En general, la tasa de interés por periodo de capitalización se establece como una tasa anual. Aquí se hablaría de una tasa anual de 6% compuesta trimestralmente, de modo que la tasa del interés en cada periodo, o **tasa periódica**, es de $6\%/4 = 1.5\%$. Esta tasa anual *cotizada* de 6% se llama **tasa nominal** o **tasa de porcentaje anual (TPA)**. A menos que se indique algo distinto, todas las tasas de interés se supondrán tasas anuales (nominales). Así, una tasa de 15% compuesta mensualmente corresponde a una tasa periódica de $15\%/12 = 1.25\%$.

La abreviatura TPA es de uso común y se encuentra en los contratos de tarjetas de crédito y en la publicidad.

Con base en el análisis anterior, puede generalizarse la ecuación (1). La fórmula

$$\boxed{S = P(1 + r)^n} \qquad (2)$$

proporciona **el monto acumulado S de un capital P al final de n periodos de interés a una tasa periódica de r.**

¡ADVERTENCIA!

Una tasa nominal de 6% no significa necesariamente que una inversión aumente en 6% cada año. El incremento depende de la frecuencia de la capitalización.

Se ha visto que un capital de \$1000, a una tasa nominal de 6% en un periodo de 10 años, compuesto anualmente tiene como resultado un interés compuesto de \$790.85 y compuesto trimestralmente da un interés de \$814.02. Es común que para una tasa nominal dada, entre más frecuentemente se componga, mayor será el interés compuesto. Sin embargo, a medida que aumenta la frecuencia compuesta, siempre aumenta la cantidad del interés ganado y el efecto no está acotado. Por ejemplo, con una composición semanal el interés compuesto es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49$$

y compuesto diariamente es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{10(365)} - 1000 \approx \$822.03$$

En ocasiones, la frase “valor del dinero” se usa para expresar una tasa de interés anual. Por ende, al decir que el dinero vale 6% compuesto trimestralmente, se hace referencia a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto cada trimestre.

Crecimiento poblacional

La ecuación (2) puede aplicarse no solo al aumento del dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de la población. Por ejemplo, suponga que la población P de un pueblo con 10 000 habitantes crece a una tasa de 2% por año. Entonces P es una función del tiempo t, en años. Es común indicar esta dependencia funcional mediante

$$P = P(t)$$

Aquí la letra P se utiliza en dos formas: en el lado derecho, P representa la función; en el lado izquierdo, P representa la variable dependiente. A partir de la ecuación (2), se tiene

$$P(t) = 10\,000(1 + 0.02)^t = 10\,000(1.02)^t$$

APLÍQUELO ▶

6. Una compañía nueva con cinco empleados espera que el número de empleados crezca a una tasa de 120% anual. Determine el número de empleados dentro de cuatro años.

EJEMPLO 7 Crecimiento poblacional

La población de un pueblo de 10 000 habitantes crece a razón de 2% anual. Encuentre la población dentro de tres años.

Solución: Del análisis anterior,

$$P(t) = 10\,000(1.02)^t$$

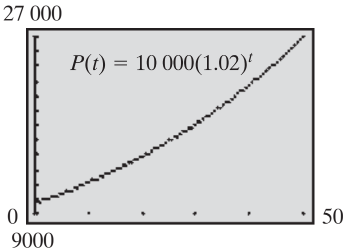


FIGURA 3.9 Gráfica de la función de población $P(t) = 10\,000(1.02)^t$.

Para $t = 3$ se tiene

$$P(3) = 10\,000(1.02)^3 \approx 10\,612$$

Por lo tanto, dentro de 3 años la población será de 10 612 habitantes. (Vea la figura 3.9).

Ahora resuelva el problema 15 ◁

El número *e*

Es útil realizar un "experimento de razonamiento", con base en el análisis que siguió al ejemplo 6, para presentar un número importante. Suponga que se invierte un solo dólar durante un año con una TPA de 100% compuesto anualmente (recuerde que este es un experimento de razonamiento). Entonces, el monto compuesto S al final del año está dado por

$$S = 1(1+1)^1 = 2^1 = 2$$

Sin cambiar ninguno de los otros datos, ahora se considerará el efecto de aumentar el número de periodos de interés por año. Si hay n periodos de interés por año, entonces el monto compuesto está dado por

$$S = 1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

En la tabla 3.2 se proporcionan valores aproximados de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ para algunos valores de n.

Tabla 3.2 Aproximaciones de *e*

n	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
1	$\left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2.00000$
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25000$
3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2.37037$
4	$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.44141$
5	$\left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2.48832$
10	$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \approx 2.59374$
100	$\left(\frac{101}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$
1000	$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$
10 000	$\left(\frac{10\,001}{10\,000}\right)^{10\,000} \approx 2.71815$
100 000	$\left(\frac{100\,001}{100\,000}\right)^{100\,000} \approx 2.71827$
1 000 000	$\left(\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} \approx 2.71828$

Resulta evidente que los números $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ aumentan conforme lo hace n. Sin embargo, no se incrementan en forma no acotada. Por ejemplo, es posible demostrar que para cualquier entero positivo n, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$. En términos del experimento de razonamiento, esto significa que si se inicia con una inversión de \$1.00 al 100%, no importa cuántos periodos de interés haya por año, siempre se tendrán menos de \$3.00 al final del año. Existe un mínimo número real que es mayor que todos los números $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Se denota mediante la letra

e, en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). El número e es irracional porque su expansión decimal no se repite, como en π y $\sqrt{2}$. Sin embargo, cada uno de los valores numéricos de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ puede considerarse como una aproximación decimal de e. El valor aproximado $(\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000})^{1\,000\,000} \approx 2.71828$ proporciona una aproximación de e que es correcta hasta el quinto decimal. La aproximación correcta de e hasta 12 decimales es $e \approx 2.718281828459$.

Función exponencial con base *e*

El número e proporciona la base más importante para una función exponencial. De hecho, la función exponencial con base e *se* conoce como **función exponencial natural** e incluso se le llama ***la* función exponencial** para enfatizar su importancia.

Aunque e puede parecer una base extraña, la función exponencial natural tiene una propiedad importante en cálculo, lo cual justifica el nombre. También surge en el análisis económico y en problemas que implican crecimiento o decaimiento, como estudios poblacionales, interés compuesto y decaimiento radiactivo. En la mayoría de las calculadoras pueden encontrarse valores aproximados de e^x con solo presionar una tecla. La gráfica de $y = e^x$ se muestra en la figura 3.10. La tabla adjunta a la figura indica los valores de y con dos decimales. Por supuesto, la gráfica tiene la forma general de una función exponencial con base mayor que 1.

La gráfica de la función exponencial natural de la figura 3.10 es importante.

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

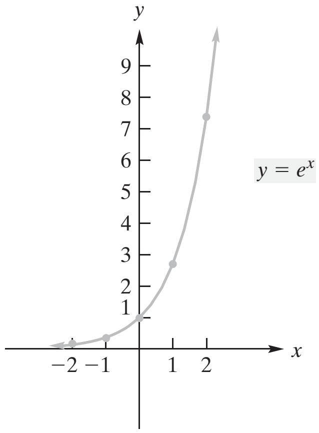


FIGURA 3.10 Gráfica de la función exponencial natural.

APLÍQUELO ▶

7. La disminución multiplicativa en el poder de compra P después de t años de inflación al 6% puede modelarse mediante $P = e^{-0.06t}$. Grafique la disminución del poder de compra como una función de t años.

EJEMPLO 8 Gráficas de funciones que incluyen a *e*

a. Grafique $y = e^{-x}$.

Solución: Como $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ y $0 < \frac{1}{e} < 1$, la gráfica es la de una función exponencial que desciende de izquierda a derecha. (Vea la figura 3.11). En forma alternativa, puede considerarse la gráfica de $y = e^{-x}$ como una transformación de la gráfica de $f(x) = e^x$. Como $e^{-x} = f(-x)$, la gráfica de $y = e^{-x}$ solo es la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje y. (Compare las gráficas de las figuras 3.10 y 3.11).

b. Grafique $y = e^{x+2}$.

Solución: La gráfica de $y = e^{x+2}$ está relacionada con la de $f(x) = e^x$. Como e^{x+2} es $f(x + 2)$, puede obtenerse la gráfica de $y = e^{x+2}$ mediante un desplazamiento horizontal de la gráfica de $f(x) = e^x$ dos unidades a la izquierda. (Vea la figura 3.12).

x	y
-2	7.39
-1	2.72
0	1
1	0.37
2	0.14

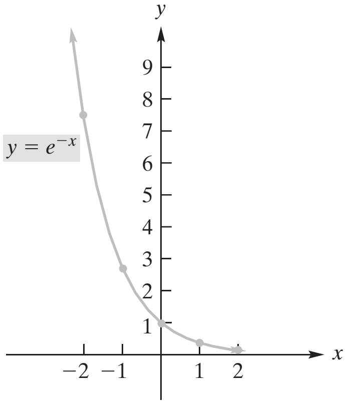


FIGURA 3.11 Gráfica de $y = e^{-x}$.

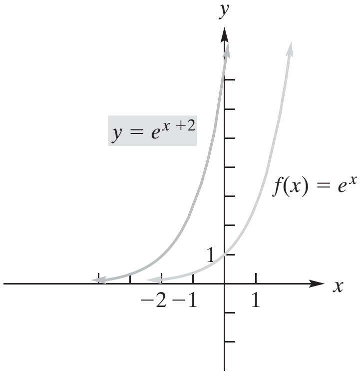


FIGURA 3.12 Gráfica de $y = e^{x+2}$.

EJEMPLO 9 Crecimiento poblacional

La población proyectada, P, de una ciudad está dada por

$$P = 100\,000e^{0.05t}$$

donde t es el número de años después de 1990. Prediga la población para 2010.

Solución: El número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que se establece $t = 20$. Entonces

$$P = 100\,000e^{0.05(20)} = 100\,000e^{1} = 100\,000e \approx 271\,828$$

Ahora resuelva el problema 35 ◁

En estadística, una función importante que se utiliza como modelo para describir la ocurrencia de eventos en la naturaleza es la **función de distribución de Poisson**:

$$f(n) = \frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

El símbolo μ (que se lee "mu") es una letra griega. En ciertas situaciones $f(n)$ da la probabilidad de que exactamente n eventos ocurran en un intervalo de tiempo o espacio. La constante μ es el promedio, también llamado *media*, del número de eventos que tienen lugar en dicho intervalo. El ejemplo siguiente ilustra la distribución de Poisson.

EJEMPLO 10 Hemocitómetro y células

Un hemocitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados que se utiliza para estudiar el número de estructuras microscópicas presentes en un líquido. En un experimento muy conocido,[3] células de levadura se diluyeron y mezclaron completamente en un líquido y la mezcla se colocó en un hemocitómetro. Con ayuda de un microscopio se contaron las células de levadura existentes en cada cuadrado. Se encontró que la probabilidad de que hubiera exactamente n células en cada cuadrado del hemocitómetro se ajustaba a una distribución de Poisson con $\mu = 1.8$. Encuentre la probabilidad de hallar exactamente cuatro células en un cuadrado en particular.

Solución: Se usa la función de distribución de Poisson con $\mu = 1.8$ y $n = 4$:

$$f(n) = \frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!}$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^{4}}{4!} \approx 0.072$$

---

[3] R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973).

Por ejemplo, esto significa que en 400 cuadrados se *esperaría* que $400(0.072) \approx 29$ cuadrados contuvieran exactamente 4 células. (En el experimento, en 400 cuadrados el número real observado fue de 30).

◁

Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen la particularidad de que su cantidad disminuye con respecto al tiempo. Se dice que un elemento radiactivo *decae*. Si N es la cantidad en el tiempo t, entonces puede demostrarse que

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

donde N_0 y λ (una letra griega que se lee “lambda”) son constantes positivas. Observe que N incluye una función exponencial de t. Se dice que N sigue una **ley de decaimiento exponencial**. Si $t = 0$, entonces $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 representa la cantidad del elemento presente en el tiempo $t = 0$ y se le llama la **cantidad inicial**. La constante λ depende del elemento particular involucrado y se llama **constante de decaimiento**.

Como N disminuye conforme pasa el tiempo, suponga que T es el tiempo que tarda el elemento en disminuir a la mitad de su cantidad inicial. Entonces en el tiempo $t = T$, se tiene $N = N_0/2$. La ecuación (3) implica que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Ahora se utilizará este hecho para demostrar que en *cualquier* intervalo de longitud T, la mitad de la cantidad del elemento decae. Considere el intervalo desde el tiempo t hasta $t + T$, que tiene longitud T. En el tiempo t, la cantidad de elemento es $N_0 e^{-\lambda t}$, y en el tiempo $t + T$ es

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda(t+T)} &= N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t} \\ &= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(N_0 e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

que es la mitad de la cantidad presente en el tiempo t. Esto significa que si la cantidad inicial presente N_0 fuera de 1 gramo, en el tiempo T habría $\frac{1}{2}$ gramo, en el tiempo $2T$ habría $\frac{1}{4}$ de gramo, y así sucesivamente. Este valor de T se conoce como la **vida media** del elemento radiactivo. En la figura 3.13 se muestra una gráfica de decaimiento radiactivo.

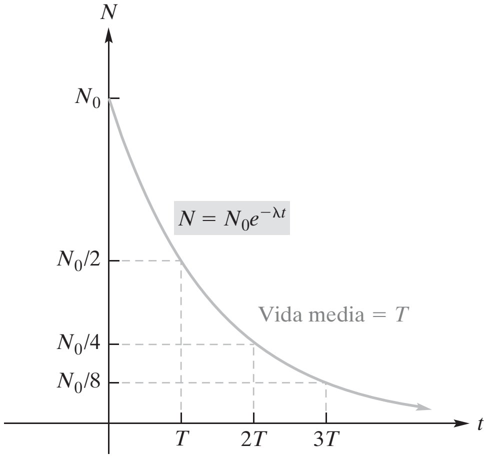


FIGURA 3.13 Decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 11 Decaimiento radiactivo

Un elemento radiactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos presentes está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}$$

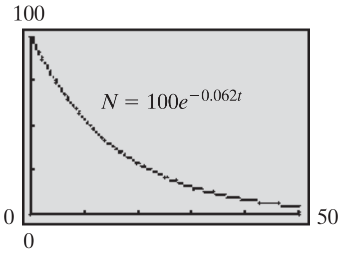


FIGURA 3.14 Gráfica de la función de decaimiento radiactivo $N = 100e^{-0.062t}$.

a. ¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?

Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3), $N = N_0e^{-\lambda t}$, donde $N_0 = 100$ y $\lambda = 0.062$. N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Así que, en un inicio, están presentes 100 miligramos. (Vea la figura 3.14).

b. ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

Solución: Cuando $t = 10$,

$$N = 100e^{-0.062t(10)} = 100e^{-0.62} \approx 53.8$$

Por lo tanto, después de 10 días están presentes aproximadamente 53.8 miligramos.

Ahora resuelva el problema 47 ◁

PROBLEMAS 3.1

En los problemas del 1 al 12, grafique cada función.

1. $y = f(x) = 4^x$

2. $y = f(x) = 3^x$

3. $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4. $y = f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

5. $y = f(x) = 2^{(x-1)^2}$

6. $y = f(x) = 3(2)^x$

7. $y = f(x) = 3^{x+2}$

8. $y = f(x) = 2^{x-1}$

9. $y = f(x) = 3^x - 2$

10. $y = f(x) = 3^{x-1} - 1$

11. $y = f(x) = 3^{-x}$

12. $y = f(x) = \frac{1}{2}(2^{x/2})$

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 3.15, que muestra las gráficas de $y = 0.4^x$, $y = 2^x$ y $y = 5^x$.

13. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 5^x$?

14. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 2^x$?

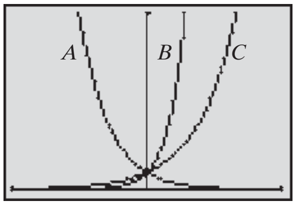


FIGURA 3.15

15. Población La población proyectada de una ciudad está dada por $P = 125\,000(1.11)^{t/20}$, donde t es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población proyectada para 2015?

16. Población Para cierta ciudad, la población P crece a una tasa de 1.5% por año. La fórmula $P = 1\,527\,000(1.015)^t$ determina la población t años después de 1998. Encuentre la población en (a) 1999 y (b) 2000.

17. Aprendizaje por asociación de pares En un experimento psicológico sobre aprendizaje,[4] se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo fue un par de letras y cada respuesta era un dígito, 1 o 2. Después de cada respuesta se le decía al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje, denominado *asociación de pares*, la probabilidad teórica P de que el sujeto dé la respuesta correcta en la n-ésima prueba está dada por

$$P = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < c < 1$$

donde c es una constante. Tome $c = \frac{1}{2}$ y encuentre P cuando $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.

18. Exprese $y = 2^{3x}$ como una función exponencial de base 8.

En los problemas del 19 al 27, encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y la tasa anual dadas.

19. \$2000 durante 5 años a 3% compuesto anualmente.

20. \$5000 durante 20 años a 5% compuesto anualmente.

21. \$700 durante 15 años a 7% compuesto semestralmente.

22. \$4000 durante 12 años a $7\frac{1}{2}$% compuesto semestralmente.

23. \$3000 durante 16 años a $8\frac{3}{4}$% compuesto trimestralmente.

24. \$6000 durante 2 años a 8% compuesto trimestralmente.

25. \$5000 durante $2\frac{1}{2}$ años a 9% compuesto mensualmente.

26. \$500 durante 5 años a 11% compuesto semestralmente.

27. \$8000 durante 3 años a $6\frac{1}{4}$% compuesto diariamente. (Suponga el año de 365 días).

28. Inversiones Suponga que \$900 se colocan en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa de 4.5% compuesto semestralmente. (a) ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de cinco años? (b) Si la cuenta hubiera generado intereses a una tasa de 4.5% compuesto anualmente, ¿cuál sería su valor después de cinco años?

29. Inversión Un certificado de depósito se compra por \$6500 y se conserva durante tres años. Si el certificado gana 2% compuesto trimestralmente, ¿cuál es su valor al cabo de tres años?

30. Crecimiento poblacional La población de un pueblo de 5000 habitantes crece a razón de 3% anual. (a) Determine una ecuación que proporcione la población después de t años a partir de ahora. (b) Determine la población que habrá dentro de 3 años. Obtenga la respuesta para (b) al entero más cercano.

31. Crecimiento de bacterias En un cultivo crecen bacterias cuyo número se incrementa a razón de 5% cada hora. Al inicio estaban presentes 400 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias presentes después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de 1 hora? (c) ¿Después de 4 horas? Proporcione sus respuestas a (b) y (c) al entero más cercano.

32. Reducción de bacterias Cierta medicina reduce las bacterias presentes en una persona en 10% cada hora. Actualmente, están presentes 100 000 bacterias. Construya una tabla de valores para el

---

[4] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

número de bacterias presentes en cada hora, desde 0 hasta 4 horas. Para cada hora, escriba una expresión para el número de bacterias como un producto de 100 000 y una potencia de $\frac{9}{10}$. Utilice las expresiones para construir una entrada en su tabla para el número de bacterias después de t horas. Escriba una función N para el número de bacterias después de t horas.

33. Reciclaje Suponga que la cantidad de plástico a ser reciclado aumenta 30% cada año. Haga una tabla del factor por el cual aumenta el reciclaje sobre la cantidad original desde 0 hasta 3 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizó? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función de los años; use su gráfica para determinar cuándo se triplica el reciclaje.

34. Crecimiento poblacional En la actualidad, las ciudades A y B tienen poblaciones de 270 000 y 360 000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 6% anual y B crece a razón de 4% anual. Determine cuál es la mayor población al final de cinco años y por cuánto difiere de la otra población. Redondee su respuesta al entero más cercano.

Los problemas 35 y 36 involucran una población que decae. Si una población disminuye a una tasa de r por periodo, entonces la población P después de t periodos está dada por

$$P = P_0(1 - r)^t$$

donde P_0 *es la población inicial (la población cuando* $t = 0$*).*

35. Población A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1.5% anual. Al inicio, la población era de 350 000 habitantes. ¿Cuál es la población después de tres años? Redondee su respuesta al entero más cercano.

36. Inscripciones Después de un cuidadoso análisis demográfico, una universidad pronostica que las inscripciones de estudiantes se reducirán a una tasa de 3% anual durante los próximos 12 años. Si en la actualidad la universidad tiene 14 000 estudiantes, ¿cuántos estudiantes tendrá dentro de 12 años?

En los problemas del 37 al 40, utilice una calculadora para encontrar el valor (redondeado a cuatro decimales) de cada expresión.

37. $e^{1.5}$ **38.** $e^{3.4}$ **39.** $e^{-0.8}$ **40.** $e^{-2/3}$

En los problemas 41 y 42 grafique las funciones.

41. $y = -e^{-(x+1)}$ **42.** $y = 2e^x$

43. Llamadas telefónicas La probabilidad de que un operador de teléfonos reciba exactamente x llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$$

Encuentre la probabilidad de que el operador reciba exactamente tres llamadas. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

44. Distribución normal Una función importante utilizada en economía y decisiones de negocios es *la función de densidad de la distribución normal*, cuya forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)x^2}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

45. Exprese e^{kt} en la forma b^t. **46.** Exprese $\frac{1}{e^x}$ en la forma b^x.

47. Decaimiento radiactivo De cierto elemento radiactivo se conservan N gramos después de t horas, donde

$$N = 12e^{-0.031t}$$

(a) ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente? (b) A la décima de gramo más cercana, ¿cuántos gramos permanecen después de 10 horas? (c) ¿Y de 44 horas? (d) Con base en su respuesta al inciso (c), ¿cuál es su estimación de la vida media del elemento?

48. Decaimiento radiactivo A cierto tiempo, hay 75 miligramos de una sustancia radiactiva. Ésta decae de modo que después de t años el número de miligramos presentes, N, está dado por

$$N = 75e^{-0.045t}$$

¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

49. Decaimiento radiactivo Si una sustancia radiactiva tiene vida media de 9 años, ¿cuánto tiempo es necesario para que un gramo de la sustancia decaiga a $\frac{1}{8}$ de gramo?

50. Marketing Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista de circulación nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente x personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson con $\mu = 0.5$. ¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede esperar la compañía que respondan exactamente dos personas? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

51. Admisión en la sala de emergencias Suponga que el número de pacientes admitidos en una sala de emergencias de un hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson con media igual a 4. Encuentre la probabilidad de que durante esa hora haya exactamente dos pacientes de urgencia. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Grafique $y = 17^x$ y $y = \left(\frac{1}{17}\right)^x$ en la misma pantalla. Determine el punto de intersección.

53. Sea $a > 0$ una constante. Grafique $y = 2^x$ y $y = 2^a \cdot 2^x$ en la misma pantalla para valores constantes $a = 2$ y $a = 3$. Parece que la gráfica de $y = 2^a \cdot 2^x$ es la gráfica de $y = 2^x$ recorrida a unidades hacia la izquierda. Pruebe algebraicamente que esto es cierto.

54. Para $y = 5^x$, encuentre x si $y = 3$. Redondee su respuesta a dos decimales.

55. Para $y = 2^x$, determine x si $y = 9$. Redondee su respuesta a dos decimales.

56. Crecimiento de células En un cultivo de células, su número se incrementa a razón de 7% por hora. Al inicio están presentes 1000 células. ¿Después de cuántas horas completas habrá al menos 3000 células?

57. Crecimiento de bacterias Con referencia al ejemplo 1, ¿cuánto tiempo es necesario para que estén presentes 1000 bacterias? Redondee su respuesta a la décima de minuto más cercana.

58. Ecuación de demanda La ecuación de demanda para un juguete nuevo es

$$q = 10\,000(0.95123)^p$$

(a) Evalúe q al entero más cercano cuando $p = 10$.

(b) Convierta la ecuación de demanda a la forma

$$q = 10\,000e^{-xp}$$

(*Sugerencia:* Encuentre un número x tal que $0.95123 \approx e^{-x}$).

(c) Utilice la ecuación del inciso (b) para evaluar q al entero más cercano cuando $p = 10$. Sus respuestas en los incisos (a) y (c) deben ser iguales.

59. Inversión Si se invierten $2000 en una cuenta de ahorros que genera interés a 9.9% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

3.2 Funciones logarítmicas

Objetivo

Introducir las funciones logarítmicas y sus gráficas. Las propiedades de los logaritmos se estudiarán en la sección 3.3.

Debido a que todas las funciones exponenciales pasan la prueba de la recta horizontal, todas son funciones uno a uno. De esto se deduce que cada función exponencial tiene una inversa. Estas funciones inversas a las funciones exponenciales se llaman *funciones logarítmicas*.

De manera más precisa, si $f(x) = b^x$, que es la función exponencial base b (donde $0 < b < 1$ o $1 < b$), entonces la función inversa $f^{-1}(x)$ se llama *función logarítmica base b* y se denota como $\log_b x$. A partir del comentario general acerca de las funciones inversas presentado en la sección 2.4, resulta que

PARA REPASAR las funciones inversas, vaya a la sección 2.4.

$$y = \log_b x \quad \text{si y solo si} \quad b^y = x$$

y se tienen las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\log_b b^x = x \tag{1}$$

y

$$b^{\log_b x} = x \tag{2}$$

donde la ecuación (1) se aplica para toda x en $(-\infty, \infty)$ y la ecuación (2) se aplica para toda x en $(0, \infty)$. Recuerde que $(-\infty, \infty)$ es el dominio de la función exponencial base b y que $(0, \infty)$ es el rango de la función exponencial base b. De aquí se deduce que $(0, \infty)$ es el dominio de la función logarítmica base b y que $(-\infty, \infty)$ es el rango de la función logarítmica base b.

Dicho de otra forma, dada x positiva, $\log_b x$ es el número único con la propiedad de que $b^{\log_b x} = x$. Las generalidades sobre las funciones inversas también permiten deducir de inmediato cómo se ve una función logarítmica.

En la figura 3.16 se muestra la gráfica de la función exponencial particular $y = f(x) = 2^x$, cuya forma general es típica de las funciones exponenciales $y = b^x$ para las cuales la base b satisface $1 < b$. Se ha agregado una copia (punteada) de la recta $y = x$. La gráfica de $y = f^{-1}(x) = \log_2 x$ se obtiene como la imagen de espejo de $y = f(x) = 2^x$ en la línea $y = x$.

En la tabla 3.3 se han tabulado los valores funcionales que aparecen como las coordenadas y de los puntos en la figura 3.16.

Tabla 3.3 Valores seleccionados de la función

x	2^x	x	$\log_2 x$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

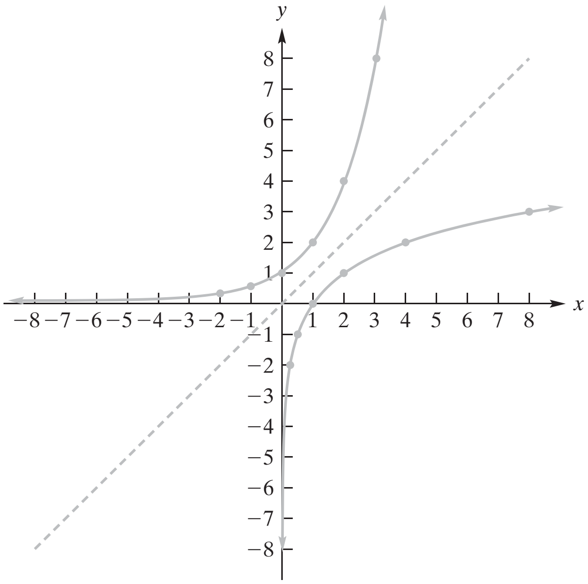


FIGURA 3.16 Gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$.

Resulta claro que la función exponencial base 2 y la función logarítmica base 2 “deshacen” sus efectos entre sí. Entonces, para toda x en el dominio de 2^x [que es $(-\infty, \infty)$], se tiene

$$\log_2 2^x = x$$

y, para toda x en el dominio de $\log_2 x$ [que es el rango de 2^x, el cual es $(0, \infty)$], se tiene

$$2^{\log_2 x} = x$$

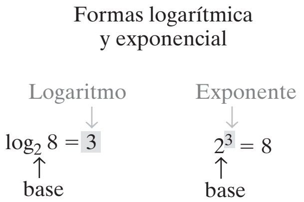


FIGURA 3.17 Un logaritmo puede considerarse como un exponente.

A menudo se dice que

$$y = \log_b x \quad \text{significa} \quad b^y = x$$

y de manera inversa

$$b^y = x \quad \text{significa} \quad y = \log_b x$$

En este sentido, el *logaritmo de un número*: $\log_b x$ es la potencia a la cual debe elevarse b para obtener x. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

Se dice que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$. (Vea la figura 3.17).

APLÍQUELO ▶

8. Si ciertas bacterias se han estado duplicando cada hora y la cantidad actual es 16 veces la cantidad contada al inicio, entonces la situación puede representarse por $16 = 2^t$. Represente esta ecuación en forma logarítmica. ¿Qué representa t?

EJEMPLO 1 Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

	Forma exponencial		*Forma logarítmica*
a. Como	$5^2 = 25$	se deduce que	$\log_5 25 = 2$
b. Como	$3^4 = 81$	se deduce que	$\log_3 81 = 4$
c. Como	$10^0 = 1$	se deduce que	$\log_{10} 1 = 0$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

9. Un terremoto que midió 8.3 en la escala Richter puede representarse mediante $8.3 = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del sismo e I_0 es la intensidad de un sismo de nivel cero. Represente esta ecuación en forma exponencial.

EJEMPLO 2 Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Forma logarítmica		*Forma exponencial*
a. $\log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000$
b. $\log_{64} 8 = ½$	significa	$64^{1/2} = 8$
c. $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

10. Suponga que una planta de reciclaje encontró que la cantidad de material para reciclar ha aumentado 50% cada año desde el primer año de operación de la planta. Haga la gráfica de cada año como una función del aumento multiplicativo en el reciclado desde el primer año. Etiquete la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Examine de nuevo la gráfica de $y = \log_2 x$ en la figura 3.16. Esta gráfica es típica para una función logarítmica con $b > 1$.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

APLÍQUELO ▶

11. Suponga que un barco se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que se conserva el barco como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Grafique $y = \log_{1/2} x$.

Solución: Para graficar los puntos, se usa la forma exponencial equivalente $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y se refleja la gráfica en la recta $y = x$. (Vea la figura 3.18).

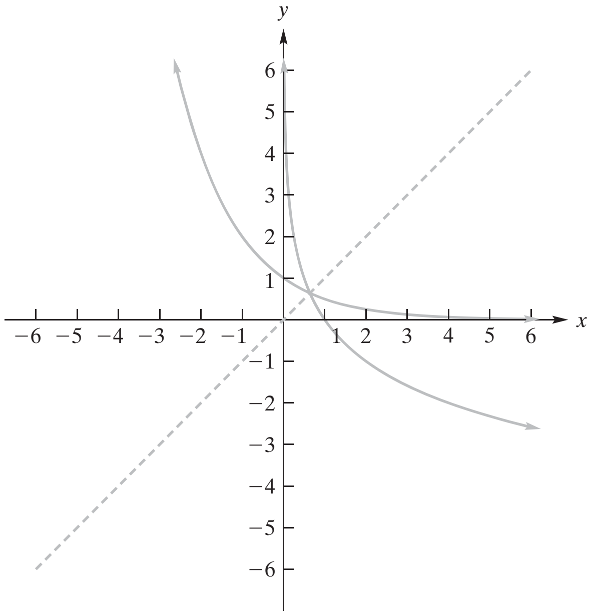
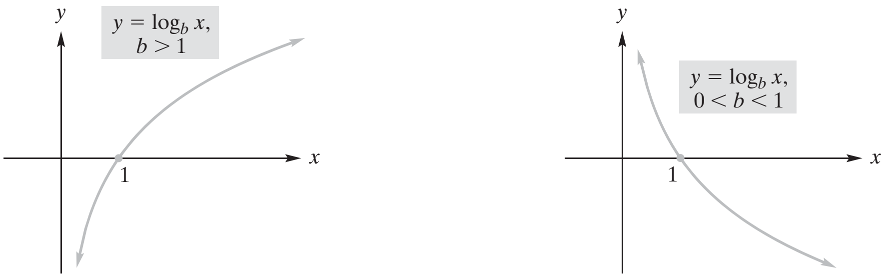


FIGURA 3.18 Gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$

A partir de la gráfica, puede verse que el dominio de $y = \log_{1/2} x$ es el conjunto de todos los números reales positivos, que es el rango de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, y que el rango de $y = \log_{1/2} x$ es el conjunto de todos los números reales, el cual a su vez es el dominio de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. La gráfica desciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos base $\frac{1}{2}$ positivos y, entre más cerca están del 0, mayor es su logaritmo base $\frac{1}{2}$. Los números mayores que 1 tienen logaritmos base $\frac{1}{2}$ negativos. El logaritmo de 1 es 0, *sin importar la base b*, y corresponde a la intersección x (1, 0). Esta gráfica es típica para una función logarítmica con $0 < b < 1$.

Ahora resuelva el problema 11 ◁



(a) (b)

FIGURA 3.19 Formas generales de $y = \log_b x$.

En resumen, a partir de los resultados de los ejemplos 3 y 4, puede decirse que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo de si $b > 1$ o $0 < b < 1$. (Vea la figura 3.19). Para $b > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función disminuyen sin una cota y la gráfica se aproxima cada vez más al eje y. Para $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función crecen sin cota y la gráfica se acerca al eje y. En cada caso, observe que:

1. El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$. Por lo tanto, el logaritmo de un número no positivo no existe.
2. El rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
3. El logaritmo de 1 es 0, lo cual corresponde a la intersección x $(1, 0)$.

Los logaritmos de base 10 son llamados **logaritmos comunes**. Se utilizaban con frecuencia con propósitos computacionales antes de la época de las calculadoras. En general, se omite el subíndice 10 de la notación:

$$\log x \quad \text{significa} \quad \log_{10} x$$

Los logaritmos de base e son importantes en el cálculo y se conocen como **logaritmos naturales**. Para estos logaritmos se usa la notación "ln":

$$\ln x \quad \text{significa} \quad \log_e x$$

El símbolo ln x puede leerse como "logaritmo natural de x". La mayoría de las calculadoras dan valores aproximados para los logaritmos naturales y comunes. Por ejemplo, compruebe que $\ln 2 \approx 0.69315$. Esto significa que $e^{0.69315} \approx 2$. En la figura 3.20 se muestra la gráfica de $y = \ln x$. Como $e > 1$, la gráfica tiene la forma general de una función logarítmica con $b > 1$ [vea la figura 3.19 (a)] y asciende de izquierda a derecha. Aunque las convenciones acerca de log, sin subíndice, y ln están bien establecidas en los libros elementales, debe tenerse cuidado al leer textos avanzados. En ese tipo de libros, por lo general log x significa $\log_e x$ y no se utiliza 1n, mientras que los logaritmos base 10 se escriben de manera explícita como $\log_{10} x$.

La gráfica del logaritmo natural mostrada en la figura 3.20 es también importante.

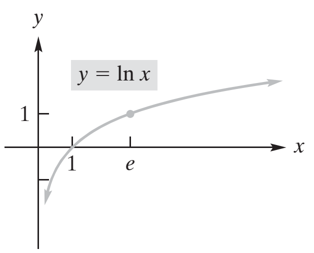


FIGURA 3.20 Gráfica de la función logaritmo natural.

APLÍQUELO ▶

12. El número de años que le toma a una cantidad invertida a una tasa anual de r, compuesta de manera continua, cuadruplicar su valor es una función de la tasa anual r dada por $t(r) = \frac{\ln 4}{r}$. Use una calculadora y encuentre la tasa necesaria para cuadruplicar una inversión en 10 años.

EJEMPLO 5 Cálculo de logaritmos

a. Encuentre log 100.

Solución: Aquí la base es 10. Así que log 100 es el exponente al que debe elevarse 10 para obtener 100. Como $10^2 = 100$, $\log 100 = 2$.

b. Encuentre ln 1.

Solución: Aquí la base es e. Como $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. Encuentre log 0.1.

Solución: Como $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\log 0.1 = -1$.

Recuerde la forma en que un logaritmo es un exponente.

d. Encuentre ln e^{-1}.

Solución: Como $\ln e^{-1}$ es el exponente al que debe elevarse e para obtener e^{-1}, es claro que $\ln e^{-1} = -1$.

e. Encuentre $\log_{36} 6$.

Solución: Como $36^{1/2}$ $(=\sqrt{36})$ es 6, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Muchas ecuaciones que incluyen formas logarítmica o exponencial pueden resolverse para una cantidad desconocida transformando primero desde la forma logarítmica a la exponencial o viceversa. El ejemplo 6 ilustra esta acción.

APLÍQUELO ▶

13. El aumento multiplicativo m de un monto invertido a una tasa anual de r, capitalizable de manera continua durante un tiempo t, está dado por $m = e^n$. ¿Qué tasa anual es necesaria para triplicar la inversión en 12 años?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a. Resuelva $\log_2 x = 4$.

Solución: Puede obtenerse una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma exponencial. Resulta

$$2^4 = x$$

de modo que $x = 16$.

b. Resuelva $\ln(x + 1) = 7$.

Solución: La forma exponencial da $e^7 = x + 1$. Así, $x = e^7 - 1$.

c. Resuelva $\log_x 49 = 2$.

Solución: En la forma exponencial, $x^2 = 49$, de modo que $x = 7$. Se rechaza $x = -7$ porque un número negativo no puede ser base de una función logarítmica.

d. Resuelva $e^{5x} = 4$.

Solución: Puede obtenerse una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma logarítmica. Se tiene

$$\begin{aligned} \ln 4 &= 5x \\ x &= \frac{\ln 4}{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 49 ◁

Decaimiento radiactivo y vida media

A partir del estudio sobre decaimiento de un elemento radiactivo presentado, se sabe que la cantidad del elemento presente en el instante t está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

donde N_0 es la cantidad inicial (la cantidad en el instante $t = 0$) y λ es la constante de decaimiento. Ahora se determinará la vida media T del elemento. En el instante T, está presente la mitad de la cantidad inicial. Esto es, cuando $t = T$, $N = N_0/2$. Así, de la ecuación (3), se tiene

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Resolviendo para T se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T} \\ 2 &= e^{\lambda T} \qquad \text{tomando recíprocos de ambos lados} \end{aligned}$$

Con el fin de obtener una expresión explícita para T, se convierte a la forma logarítmica. Esto resulta en

$$\begin{aligned} \lambda T &= \ln 2 \\ T &= \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$

En resumen, se tiene lo siguiente:

Si un elemento radiactivo tiene una constante de decaimiento λ, entonces la vida media del elemento está dada por

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{4}$$

EJEMPLO 7 Determinación de la vida media

Una muestra de 10 miligramos de polonio radiactivo 210 (que se denota por ^{210}Po) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 10e^{-0.00501t}$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t días. (Vea la figura 3.21). Determine la vida media del ^{210}Po.

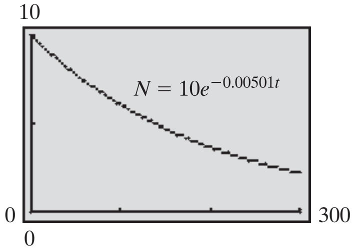


FIGURA 3.21 Función de decaimiento radiactivo $N = 10e^{-0.00501t}$.

Solución: Aquí la constante de decaimiento λ es 0.00501. Según la ecuación (4), la vida media está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días}$$

Ahora resuelva el problema 63 ◁

PROBLEMAS 3.2

En los problemas del 1 al 8, exprese cada forma logarítmica de manera exponencial y cada forma exponencial de manera logarítmica.

1. $10^4 = 10\,000$ **2.** $2 = \log_{12} 144$
3. $\log_2 1024 = 10$ **4.** $8^{2/3} = 4$
5. $e^3 \approx 20.0855$ **6.** $e^{0.33647} \approx 1.4$
7. $\ln 3 \approx 1.09861$ **8.** $\log 7 \approx 0.84509$

En los problemas del 9 al 16, grafique las funciones.

9. $y = f(x) = \log_3 x$ **10.** $y = f(x) = \log_4 2x$
11. $y = f(x) = \log_{1/4} x$ **12.** $y = f(x) = \log_{1/5} x$
13. $y = f(x) = \log_2 (x + 4)$ **14.** $y = f(x) = \log_2 (-x)$
15. $y = f(x) = -2 \ln x$ **16.** $y = f(x) = \ln (x + 2)$

En los problemas del 17 al 28, evalúe la expresión.

17. $\log_6 36$ **18.** $\log_2 512$ **19.** $\log_3 27$
20. $\log_{16} 4$ **21.** $\log_7 7$ **22.** $\log 10\ 000$
23. $\log 0.0001$ **24.** $\log_2 \sqrt[3]{2}$ **25.** $\log_5\ 1$
26. $\log_5 \frac{1}{25}$ **27.** $\log_2 \frac{1}{8}$ **28.** $\log_3 \sqrt[7]{3}$

En los problemas del 29 al 48, encuentre x.

29. $\log_3 x = 4$ **30.** $\log_2 x = 8$
31. $\log_5 x = 3$ **32.** $\log_4 x = 0$
33. $\log x = -3$ **34.** $\ln x = 1$
35. $\ln x = -3$ **36.** $\log_x 25 = 2$
37. $\log_x 8 = 3$ **38.** $\log_x 4 = \frac{1}{3}$
39. $\log_x \frac{1}{6} = -1$ **40.** $\log_x y = 1$
41. $\log_3 x = -3$ **42.** $\log_x (2x - 3) = 1$
43. $\log_x (12 - x) = 2$ **44.** $\log_8 64 = x - 1$
45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$ **46.** $\log_3 (x + 2) = -2$
47. $\log_x (2x + 8) = 2$ **48.** $\log_x (16 - 4x - x^2) = 2$

En los problemas del 49 al 52, encuentre x y exprese su respuesta en términos de logaritmos naturales.

49. $e^{3x} = 2$ **50.** $0.1e^{0.1x} = 0.5$
51. $e^{2x-5} + 1 = 4$ **52.** $6e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$

En los problemas del 53 al 56, utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

53. $\ln 11$ **54.** $\ln 4.27$
55. $\ln 7.39$ **56.** $\ln 9.98$

57. Apreciación Suponga que cierta antigüedad gana en valor 10% cada año. Haga una gráfica del número de años que se retiene como una función del aumento multiplicativo de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

58. Ecuación de costo Para una compañía, el costo por producir q unidades de un producto está dado por la ecuación

$$c = (5q \ln q) + 15$$

Evalúe el costo cuando $q = 12$. (Redondee su respuesta a dos decimales).

59. Ecuación de oferta La ecuación de oferta de un fabricante es

$$p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right)$$

donde q es el número de unidades ofrecidas con el precio p por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

60. Terremoto La magnitud, M, de un terremoto y su energía, E, están relacionadas por la ecuación[5]

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right)$$

donde M está dada en términos de la escala de Richter de 1958 y E está en ergios. Resuelva la ecuación para E.

61. Biología Para cierta población de células, el número de células en el instante t está dado por $N = N_0(2^{t/k})$, donde N_0 es el número de células en $t = 0$ y k es una constante positiva. (a) Encuentre N cuando $t = k$. (b) ¿Cuál es el significado de k? (c) Demuestre que el tiempo necesario para tener una población de N_1 puede escribirse como

$$t = k \log_2 \frac{N_1}{N_0}$$

62. Bienes secundarios En un análisis de bienes secundarios, Persky[6] resuelve una ecuación de la forma

$$u_0 = A \ \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

para x_1, donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, u_0 es una medida de la utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

63. Decaimiento radiactivo Una muestra de un gramo de plomo 211 radiactivo (^{211}Pb) decae de acuerdo con la ecuación $N = e^{-0.01920t}$, donde N es el número de gramos presentes después de t minutos. ¿Cuánto tiempo tomará para que solo queden 0.25 gramos? Exprese su respuesta a la décima de minuto más cercana.

---

[5] K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge at the University Press, 1963).

[6] A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist,* XXIX, núm. 1 (primavera de 1985).

64. Decaimiento radiactivo Una muestra de 100 miligramos de actinio 277 radiactivo (^{227}Ac) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 100e^{-0.03194t}$$

donde N *es* el número de miligramos presentes después de t años. Encuentre la vida media del ^{227}Ac a la décima de año más cercana.

65. Si $\log_y x = 3$ y $\log_z x = 2$, encuentre una fórmula para z como una función explícita que dependa solo de y.

66. Despeje a y como una función explícita de x si

$$x + 3e^{2y} - 8 = 0$$

67. Suponga que $y = f(x) = x \ln x$. (a) ¿Para qué valores de x es $y < 0$? (*Sugerencia:* Determine cuándo está la gráfica por debajo del eje x). (b) Determine el rango de f.

68. Encuentre la intersección con el eje x de $y = x^3 \ln x$.

69. Use la gráfica de $y = e^x$ para estimar ln 3. Redondee su respuesta a dos decimales.

70. Utilice la gráfica de $y = \ln x$ para estimar e^2. Redondee su respuesta a dos decimales.

71. Determine los valores en x de los puntos de intersección de las gráficas de $y = (x - 2)^2$ y $y = \ln x$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

3.3 Propiedades de los logaritmos

Objetivo

Estudiar las propiedades básicas de las funciones logarítmicas.

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo,

1. $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$

la cual dice que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de esos números. Esta propiedad puede probarse deduciendo la forma exponencial a partir de la ecuación:

$$b^{\log_b m + \log_b n} = mn$$

Usando primero una regla conocida para los exponentes, se tiene

$$\begin{aligned} b^{\log_b m + \log_b n} &= b^{\log_b m} b^{\log_b n} \\ &= mn \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad usa dos instancias de la ecuación fundamental (2). Las dos propiedades siguientes no se probarán, porque sus demostraciones son similares a las de la propiedad 1.

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

Esto es, el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

3. $\log_b m^r = r \log_b m$

Esto es, el logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Tabla 3.4 Logaritmos comunes

x	$\log x$	x	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	e	0.4343

En la tabla 3.4 se dan los valores de algunos logaritmos comunes. La mayoría de las entradas son aproximadas. Por ejemplo, $\log 4 \approx 0.6021$, que significa $10^{0.6021} \approx 4$. Para ilustrar el uso de las propiedades de los logaritmos, se usará esta tabla en algunos de los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Determinación de logaritmos utilizando la tabla 3.4

a. Encuentre log 56.

Solución: Log 56 no está en la tabla. Pero puede escribirse 56 como el producto de $8 \cdot 7$. Así, por la propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482$$

Aunque los logaritmos del ejemplo 1 pueden encontrarse con una calculadora, se hará uso de las propiedades de los logaritmos.

b. Encuentre $\log \frac{9}{2}$.

Solución: Por la propiedad 2,

$$\log \frac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532$$

c. Encuentre log 64.

Solución: Como $64 = 8^2$, por la propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062$$

d. Encuentre $\log \sqrt{5}$.

Solución: Por la propiedad 3, se tiene

$$\log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \frac{1}{2} \log 5 \approx \frac{1}{2}(0.6990) = 0.3495$$

e. Encuentre $\log \frac{16}{21}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7) \\ &= 2\ \log 4 - [\log 3 + \log 7] \\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones logarítmicas

a. Exprese $\log \frac{1}{x^2}$ en términos de $\log x$.

Solución:

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{Propiedad 3}$$

Aquí se ha supuesto que $x > 0$. Aunque $\log(1/x^2)$ está definido para $x \neq 0$, la expresión $-2 \log x$ solo está definida si $x > 0$. Observe que se tiene

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log |x|$$

para toda $x \neq 0$.

b. Exprese $\log \frac{1}{x}$ en términos de $\log x$, para $x > 0$.

Solución: Por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

A partir del ejemplo 2(b), se observa que $\log(1/x) = -\log x$. Generalizando se obtiene la propiedad siguiente:

4. $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$

Esto es, el logaritmo del recíproco de un número es el negativo del logaritmo del número.

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

Manipulaciones como las del ejemplo 3 se utilizan con frecuencia en cálculo.

a. Escriba $\ln \frac{x}{zw}$ en términos de $\ln x$, $\ln z$ y $\ln w$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln (zw) && \text{Propiedad 2} \\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) && \text{Propiedad 1} \\ &= \ln x - \ln z - \ln w \end{aligned}$$

b. Escriba $\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ en términos de $\ln x$, $\ln(x-2)$ y $\ln(x-3)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} &= \ln \left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3} \ln \frac{x^5(x-2)^8}{x-3} \\ &= \frac{1}{3}\{\ln [x^5(x-2)^8] - \ln (x-3)\} \\ &= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln (x-2)^8 - \ln (x-3)] \\ &= \frac{1}{3}[5 \ln x + 8 \ln (x-2) - \ln (x-3)] \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 29 ◁

APLÍQUELO ▶

14. La medida de un terremoto en la escala Richter está dada por $R = \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala Richter, un terremoto con intensidad de 900 000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero que un terremoto con intensidad de 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión combinando logaritmos y después evalúe la expresión resultante.

EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos

a. Escriba $\ln x - \ln (x+3)$ como un solo logaritmo.

Solución:

$$\ln x - \ln (x+3) = \ln \frac{x}{x+3} \qquad \text{Propiedad 2}$$

b. Escriba $\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2 \ln 4$ como un solo logaritmo.

Solución:

$$\begin{aligned} &\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2 \ln 4 \\ &\quad = \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln (4^2) && \text{Propiedad 3} \\ &\quad = \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln (4^2)] \\ &\quad = \ln (3 \cdot 7) - \ln (2 \cdot 4^2) && \text{Propiedad 1} \\ &\quad = \ln 21 - \ln 32 \\ &\quad = \ln \frac{21}{32} && \text{Propiedad 2} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 37 ◁

Como $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, al convertir a formas logarítmicas se tienen las propiedades siguientes:

5. $\log_b 1 = 0$
6. $\log_b b = 1$

APLÍQUELO ▶

15. Si un terremoto es 10 000 veces más intenso que un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela. (Para obtener la fórmula, vea el recuadro anterior de Aplíquelo).

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones logarítmicas

a. Encuentre $\ln e^{3x}$.

Solución: Por la ecuación fundamental (1) de la sección 3.2 con $b = e$, se tiene $\ln e^{3x} = 3x$.

b. Encuentre $\log 1 + \log 1000$.

Solución: Por la propiedad 5, $\log 1 = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\log 1 + \log 1000 &= 0 + \log 10^3\\ &= 0 + 3 && \text{Ecuación fundamental (1) de}\\ &= 3 && \text{la sección 4.2 con } b = 10\end{aligned}$$

c. Encuentre $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

Solución:

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \frac{8}{9}$$

d. Encuentre $\log_3 \left(\frac{27}{81}\right)$.

Solución:

$$\log_3 \left(\frac{27}{81}\right) = \log_3 \left(\frac{3^3}{3^4}\right) = \log_3 (3^{-1}) = -1$$

e. Encuentre $\ln e + \log \frac{1}{10}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\ln e + \log \frac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1}\\ &= 1 + (-1) = 0\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

No confunda $\ln x^2$ con $(\ln x)^2$. Se tiene

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x)$$

pero

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x)$$

Algunas veces $(\ln x)^2$ se escribe como $\ln^2 x$. Ésta no es una nueva fórmula sino solo una notación. Más generalmente, algunas personas escriben $f^2(x)$ para $(f(x))^2$. Se recomienda evitar la notación $f^2(x)$.

EJEMPLO 6 Uso de la ecuación (2) de la sección 3.2

a. Encuentre $e^{\ln x^2}$.

Solución: Por la ecuación (2) con $b = e$, $e^{\ln x^2} = x^2$.

b. Resuelva $10^{\log x} = 25$ para x.

Solución:

$$\begin{aligned}10^{\log x^2} &= 25\\ x^2 &= 25 && \text{Por la ecuación (2) de la sección 4.2}\\ x &= \pm 5\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 45 ◁

EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos de base 5

Utilice una calculadora para encontrar $\log_5 2$.

Solución: Las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos de base 10 y base e, pero no para base 5. Sin embargo, es posible convertir logaritmos de una base a otra. Ahora se convertirá de base 5 a base 10. Primero, se hace $x = \log_5 2$. Entonces $5^x = 2$. Tomando los logaritmos comunes de ambos lados de $5^x = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \log 5^x &= \log 2 \\ x \log 5 &= \log 2 \\ x &= \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307 \end{aligned}$$

Si se hubieran tomado logaritmos naturales de ambos lados, el resultado sería $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.4307$, igual que antes.

◁

Generalizando el método utilizado en el ejemplo 7, se obtiene la llamada fórmula de *cambio de base*:

Fórmula de cambio de base

7. $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Algunos estudiantes encuentran la fórmula para el cambio de base más fácil de recordar cuando se expresa en la forma

$$(\log_a b)(\log_b m) = \log_a m$$

en la cual aparentemente se cancelan las dos instancias de b. Ahora se verá cómo probar esta identidad, porque la capacidad para ver la verdad de dichos enunciados mejora la habilidad de usarlos en aplicaciones prácticas. Como $\log_a m = y$ precisamente si $a^y = m$, esta tarea equivale a mostrar que

$$a^{(\log_a b)(\log_b m)} = m$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} a^{(\log_a b)(\log_b m)} &= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b m} \\ &= b^{\log_b m} \\ &= m \end{aligned}$$

usando una regla para exponentes y la ecuación fundamental (2) dos veces.

La fórmula de cambio de base permite la conversión de logaritmos de base a a base b.

EJEMPLO 8 Fórmula de cambio de base

Exprese $\log x$ en términos de logaritmos naturales.

Solución: Debe transformarse de base 10 a base e, por lo que se utiliza la fórmula de cambio de base (propiedad 7) con $b = 10$, $m = x$ y $a = e$.

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Ahora resuelva el problema 49 ◁

TECNOLOGÍA

Problema: Despliegue la gráfica de $y = \log_2 x$.

Solución: Para introducir la función, primero se convierte a la base e o a la base 10. Se elige la base e. Por la propiedad 7,

$$y = \log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Ahora se grafica $y = (\ln x)/(\ln 2)$, lo cual se muestra en la figura 3.22.

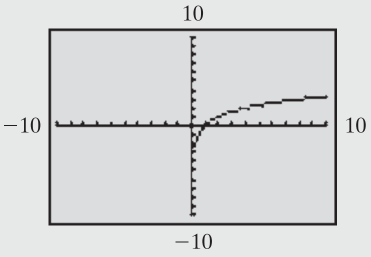


FIGURA 3.22 Gráfica de $y = \log_2 x$.

PROBLEMAS 3.3

En los problemas del 1 al 10, sean $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ y $\log 5 = c$. Exprese el logaritmo indicado en términos de a, b y c.

1. $\log 30$ **2.** $\log 1024$ 3. $\log \frac{2}{3}$ **4.** $\log \frac{5}{2}$

5. $\log \frac{8}{3}$ **6.** $\log \frac{6}{25}$ **7.** $\log 100$ **8.** $\log 0.00003$

9. $\log_2 3$ **10.** $\log_3 5$

En los problemas del 11 al 20, determine el valor de la expresión sin usar una calculadora.

11. $\log_7 7^{48}$ **12.** $\log_{11} (11\sqrt[3]{11})^7$ **13.** $\log 0.0000001$

14. $10^{\log 3.4}$ **15.** $\ln e^{5.01}$ **16.** $\ln e$ **17.** $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

18. $\log_3 81$ 19. $\log \frac{1}{10} + \ln e^3$ **20.** $e^{\ln \pi}$

En los problemas del 21 al 32, escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln (x + 1)$ y $\ln (x + 2)$.

21. $\ln (x(x + 1)^2)$ **22.** $\ln \frac{\sqrt[5]{x}}{(x+1)^3}$

23. $\ln \frac{x^2}{(x+1)^3}$ **24.** $\ln (x(x + 1))^3$

25. $\ln \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4$ **26.** $\ln \sqrt{x(x+1)(x+2)}$

27. $\ln \frac{x(x+1)}{x+2}$ **28.** $\ln \frac{x^2(x+1)}{x+2}$

29. $\ln \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2(x+2)^3}$ **30.** $\ln \frac{x}{(x+1)(x+2)}$

31. $\ln \left(\frac{1}{x+2}\sqrt[5]{\frac{x^2}{x+1}}\right)$ **32.** $\ln \sqrt[4]{\frac{x^2(x+2)^3}{(x+1)^5}}$

En los problemas del 33 al 40, exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.

33. $\log 6 + \log 4$ **34.** $\log_3 10 - \log_3 5$

35. $\log_2 (2x) - \log_2 (x + 1)$ **36.** $2\log x - \frac{1}{2}\log (x - 2)$

37. $7\log_3 5 + 4\log_3 17$ **38.** $5(2\log x + 3\log y - 2\log z)$

39. $2 + 10\log 1.05$

40. $\frac{1}{2}(\log 215 + 8\log 6 - 3\log 169)$

En los problemas del 41 al 44, determine los valores de las expresiones sin utilizar una calculadora.

41. $e^{4\ln 3 - 3\ln 4}$

42. $\log_3 (\ln (\sqrt{7 + e^3} + \sqrt{7}) + \ln (\sqrt{7 + e^3} - \sqrt{7}))$

43. $\log_6 54 - \log_6 9$

44. $\log_3 \sqrt{3} - \log_2 \sqrt[3]{2} - \log_5 \sqrt[4]{5}$

En los problemas del 45 al 48, encuentre x.

45. $e^{\ln (2x)} = 5$ **46.** $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$

47. $10^{\log (x^2 + 2x)} = 3$ **48.** $e^{3\ln x} = 8$

En los problemas del 49 al 53, escriba cada expresión en términos de logaritmos naturales.

49. $\log_2 (2x + 1)$ **50.** $\log_3 (x^2 + 2x + 2)$

51. $\log_3 (x^2 + 1)$ **52.** $\log_7 (x^2 + 1)$

53. Si $e^{\ln z} = 7e^y$, resuelva para y en términos de z.

54. Estadística En estadística, la ecuación de regresión $y = ab^x$ se reduce a una forma lineal tomando logaritmos en ambos lados. Exprese $\log y$ en términos de x, $\log a$ y $\log b$ y explique el significado de que la expresión resultante sea lineal.

55. Remuneración militar En un estudio sobre reclutamiento militar, Brown[7] considera la remuneración militar total C como la suma de la remuneración militar básica B (que incluye el valor de la asignación para gastos, las exenciones fiscales y el salario base) y las prestaciones de educación E. Así, $C = B + E$. Brown establece que

$$\ln C = \ln B + \ln \left(1 + \frac{E}{B}\right)$$

Verifique esto.

---

[7] C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), pp. 228-234.

56. Terremoto De acuerdo con Richter,[8] la magnitud M de un terremoto que ocurre a 100 km de cierto tipo de sismógrafo está dada por $M = \log(A) + 3$, donde A es la amplitud del trazo registrado (en milímetros) por causa del terremoto. (a) Encuentre la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de trazo de 10 mm. (b) Si un terremoto tiene amplitud A_1 y magnitud M_1, determine la magnitud de un temblor con amplitud de $10A_1$ en términos de M_1.

57. Muestre la gráfica de $y = \log_4 x$.

58. Muestre la gráfica de $y = \log_4 (x + 2)$.

59. Muestre las gráficas de $y = \log x$ y $y = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ en la misma pantalla. Parecen ser idénticas. ¿Por qué?

60. En la misma pantalla, despliegue las gráficas de $y = \ln x$ y $y = \ln (4x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln (4x)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia arriba. Determine de manera algebraica el valor de este desplazamiento.

61. En la misma pantalla, exhiba las gráficas de $y = \ln (2x)$ y $y = \ln (6x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln (6x)$ es la de $y = \ln (2x)$ recorrida hacia arriba. Determine algebraicamente el valor de este desplazamiento.

Objetivo

Desarrollar técnicas para la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

3.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Aquí se resolverán *ecuaciones logarítmicas* y *exponenciales.* Una **ecuación logarítmica** es una ecuación que incluye al logaritmo de una expresión que contiene una incógnita. Por ejemplo, $2 \ln (x + 4) = 5$ es una ecuación logarítmica. Por otro lado, una **ecuación exponencial** tiene una incógnita que aparece en un exponente, como en $2^{3x} = 7$.

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, es conveniente usar el hecho de que para cualquier base b, la función $y = \log_b x$ es uno a uno. Por supuesto, esto significa que

$$\text{si} \quad \log_b m = \log_b n, \quad \text{entonces} \quad m = n$$

Esto proviene del hecho de que la función $y = \log_b x$ tiene una inversa y resulta evidente de manera visual cuando se inspeccionan las dos formas posibles de $y = \log_b x$ que se muestran en la figura 3.19. En cualquiera de los casos, es claro que la función pasa la prueba de la línea horizontal de la sección 2.5. Para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales, también son útiles las ecuaciones fundamentales (1) y (2) de la sección 3.2.

EJEMPLO 1 Composición de oxígeno

Un experimento sobre cierto tipo particular de animal pequeño fue llevado a cabo.[9] En dicho experimento se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora por distintos animales y se gráfico en comparación con el logaritmo de su peso. Se encontró que

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x$$

donde y fue el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora y x el peso del animal (en gramos). Resuelva para y.

Solución: Primero se combinan los términos del lado derecho en un solo logaritmo:

$$\begin{aligned} \log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} && \text{Propiedad 3 de la sección 4.3} \\ \log y &= \log (5.934x^{0.885}) && \text{Propiedad 1 de la sección 4.3} \end{aligned}$$

Como los logaritmos son uno a uno, se tiene

$$y = 5.934x^{0.885}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

16. Greg escogió un número y lo multiplicó por una potencia de 32. Jean inició con el mismo número y llegó al mismo resultado cuando multiplicó por 4 elevando a un número nueve veces menor que tres veces el exponente utilizado por Greg. ¿Qué potencia de 32 utilizó Greg?

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación exponencial

Determine x si $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$.

Solución: Como $25 = 5^2$, ambos lados de la ecuación pueden expresarse como potencias de 5:

$$\begin{aligned} (25)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ (5^2)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ 5^{2x+4} &= 5^{3x-4} \end{aligned}$$

---

[8] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1958).

[9] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill, 1974).

Como 5^x es una función uno a uno,

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 3x - 4 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Algunas ecuaciones exponenciales pueden resolverse tomando el logaritmo de ambos lados después que la ecuación se escribe en una forma adecuada. El ejemplo siguiente lo ilustra.

APLÍQUELO ▶

17. El gerente de ventas de una cadena de comida rápida determina que las ventas del desayuno empiezan a disminuir al terminar una campaña promocional. Las ventas líquidas como una función del número de días d después de que termina la campaña están dadas por $S = 800\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1d}$. Si el gerente no quiere que las ventas caigan por debajo de 450 diarias antes de iniciar una nueva campaña, ¿cuándo debe iniciar esa nueva campaña?

EJEMPLO 3 Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resuelva $5 + (3)4^{x-1} = 12$.

Solución: Primero se aísla la expresión exponencial 4^{x-1} en un lado de la ecuación:

$$\begin{aligned} 5 + (3)4^{x-1} &= 12 \\ (3)4^{x-1} &= 7 \\ 4^{x-1} &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ahora se toma el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 4^{x-1} = \ln 7 - \ln 3$$

Al simplificar se obtiene

$$\begin{aligned} (x-1)\ln 4 &= \ln 7 - \ln 3 \\ x - 1 &= \frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln 4} \\ x &= \frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln 4} + 1 \approx 1.61120 \end{aligned}$$

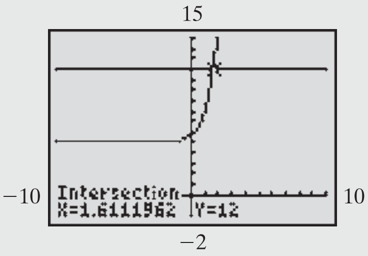
Ahora resuelva el problema 13 ◁

En el ejemplo 3, se utilizaron logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, pueden emplearse logaritmos de cualquier base. Si se utilizaran logaritmos comunes se obtendría

$$x = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 4} + 1 \approx 1.61120$$

TECNOLOGÍA

En la figura 3.23 se muestra una solución gráfica de la ecuación $5 + (3)4^{x-1} = 12$ del ejemplo 3. Esta solución ocurre en la intersección de las gráficas de $y = 5 + (3)4^{x-1}$ y $y = 12$.



```
Intersection
X=1.6111962   Y=12
```

FIGURA 3.23 La solución de $5 + (3)4^{x-1} = 12$ es aproximadamente igual a 1.61120.

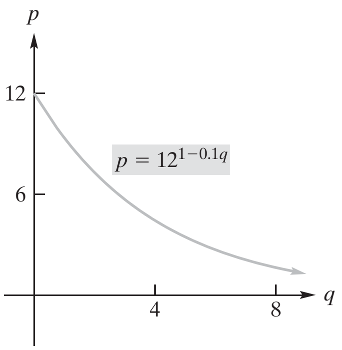


FIGURA 3.24 Gráfica de la ecuación de demanda $p = 12^{1-0.1q}$.

EJEMPLO 4 Ecuación de demanda

La ecuación de demanda para un producto es $p = 12^{1-0.1q}$. Utilice logaritmos comunes para expresar q en términos de p.

Solución: En la figura 3.24 se muestra la gráfica de esta ecuación de demanda para $q \geq 0$. Como es típico para una ecuación de demanda, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Es necesario resolver la ecuación para q. Tomando los logaritmos comunes de ambos lados de $p = 12^{1-0.1q}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\log p &= \log(12^{1-0.1q}) \\ \log p &= (1-0.1q)\log 12 \\ \frac{\log p}{\log 12} &= 1-0.1q \\ 0.1q &= 1-\frac{\log p}{\log 12} \\ q &= 10\left(1-\frac{\log p}{\log 12}\right)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 43 ◁

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que incluyen la base e o la base 10, como $10^{2x} = 3$, el proceso de tomar logaritmos de ambos lados puede combinarse con la identidad $\log_b b^r = r$ [ecuación fundamental (1) de la sección 3.2] para transformar la ecuación en una forma logarítmica. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}10^{2x} &= 3 \\ 2x &= \log 3 && \text{forma logarítmica} \\ x &= \frac{\log 3}{2} \approx 0.2386\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Relación depredador-presa

En un artículo que concierne a presas y depredadores, Holling[10] hace referencia a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax})$$

donde x es la densidad de presas, y es el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verifique la afirmación de Holling de que

$$\ln\frac{K}{K-y} = ax$$

Solución: Para encontrar ax, primero se resuelve la ecuación dada para e^{-ax}:

$$\begin{aligned}y &= K(1-e^{-ax}) \\ \frac{y}{K} &= 1-e^{-ax} \\ e^{-ax} &= 1-\frac{y}{K} \\ e^{-ax} &= \frac{K-y}{K}\end{aligned}$$

---

[10] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), pp. 385-398.

Ahora se convierte a la forma logarítmica:

$$\ln \frac{K-y}{K} = -ax$$

$$-\ln \frac{K-y}{K} = ax$$

$$\ln \frac{K}{K-y} = ax \qquad \text{Propiedad 4 de la sección 4.3}$$

tal como se quería demostrar.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse al escribirlas nuevamente en formas exponenciales.

APLÍQUELO ▶

18. La medida en la escala Richter para un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Un terremoto que es 675 000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, tiene una magnitud en la escala Richter que es 4 veces mayor que otro terremoto. ¿Cuál es la intensidad de este otro terremoto?

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva $\log_2 x = 5 - \log_2(x + 4)$.

Solución: Aquí, primero debe suponerse que x y $x + 4$ son positivos, de modo que sus logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se satisfacen cuando $x > 0$. Para resolver la ecuación, primero se colocan todos los logaritmos en un lado de la ecuación para que puedan combinarse:

$$\log_2 x + \log_2 (x + 4) = 5$$

$$\log_2 [x(x + 4)] = 5$$

En la forma exponencial, se tiene

$$x(x + 4) = 2^5$$

$$x^2 + 4x = 32$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \qquad \text{ecuación cuadrática}$$

$$(x - 4)(x + 8) = 0$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -8$$

Ya que debemos tener $x > 0$, la única solución es 4, tal como puede verificarse sustituyendo en la ecuación original. De hecho, al reemplazar x por 4 en $\log_2 x$ se obtiene $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$, mientras que al reemplazar x por 4 en $5 - \log_2 (x + 4)$ se obtiene $5 - \log_2 (4 + 4) = 5 - \log_2 (8) = 5 - \log_2 2^3 = 5 - 3 = 2$. Como los resultados son iguales, 4 es una solución de la ecuación.

Al resolver una ecuación logarítmica, es una buena idea verificar las soluciones extrañas.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 3.4

En los problemas del 1 al 36, encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $\log (5x + 1) = \log (4x + 2)$
2. $\log x - \log 5 = \log 7$
3. $\log 7 - \log (x - 1) = \log 4$
4. $\log_2 x + 3 \log_2 2 = \log_2 \frac{2}{x}$
5. $\ln (-x) = \ln (x^2 - 6)$
6. $\ln (x + 3) + \ln 4 = 2 \ln x$
7. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$
8. $(e^{3x-2})^3 = e^3$
9. $(81)^{4x} = 9$
10. $(27)^{2x+1} = \frac{1}{3}$
11. $e^{5x} = 7$
12. $e^{4x} = \frac{3}{4}$
13. $2e^{5x+2} = 17$
14. $5e^{2x-1} - 2 = 23$
15. $10^{4/x} = 6$
16. $\frac{2(10)^{0.3x}}{7} = 5$
17. $\frac{5}{10^{2x}} = 7$
18. $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$
19. $2^x = 5$
20. $7^{2x+3} = 9$
21. $5^{7x+5} = 2$
22. $4^{x/2} = 20$
23. $2^{-2x/3} = \frac{4}{5}$
24. $5(3^x - 6) = 10$
25. $(4)5^{3-x} - 7 = 2$
26. $\frac{5}{2^x} = 11$
27. $\log (x - 3) = 3$
28. $\log_2 (x + 1) = 4$
29. $\log_4 (9x - 4) = 2$
30. $\log_4 (2x + 4) - 3 = \log_4 3$
31. $\ln (x - 2) + \ln (2x + 1) = 5$
32. $\log (x - 3) + \log (x - 5) = 1$
33. $\log_2 (5x + 1) = 4 - \log_2 (3x - 2)$
34. $\log (x + 2)^2 = 2$, donde $x > 0$
35. $\log_2 \left(\frac{2}{x}\right) = 3 + \log_2 x$
36. $\log (x+5) = \log (3x+2)+1$

37. Plantas arraigadas En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica,[11] se determinó que en terrenos de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas era S. Cuando $\log S$ fue graficada como una función de $\log A$, se obtuvo una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A$$

Resuelva para S.

38. Producto nacional bruto En un artículo, Taagepera y Hayes hacen referencia a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 (\log P)^2$$

Aquí T es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país correspondiente al comercio exterior (exportaciones más importaciones) y P es la población del país (en unidades de 100 000).[12] Verifique la afirmación de que

$$T = 50P^{(0.2068 - 0.1334 \log P)}$$

Puede suponer que $\log 50 = 1.7$. También verifique si, para cualquier base b, $(\log_b x)^2 = \log_b (x^{\log_b x})$.

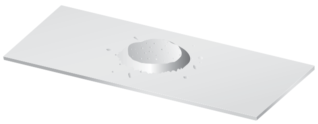
39. Radiactividad El número de miligramos presentes de una sustancia radiactiva después de t años está dado por

$$Q = 100e^{-0.035t}$$

(a) ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 0 años?

(b) ¿Después de cuántos años estarán presentes 20 miligramos? Dé su respuesta al año más cercano.

40. Muestra de sangre En la superficie de un portaobjetos está una retícula que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Suponga que una muestra de sangre que contiene N células rojas se esparce en el portaobjetos y las células se distribuyen aleatoriamente. El número de cuadrados que no tienen células está dado (de manera aproximada) por $225e^{-N/225}$. Si 100 de los cuadrados no tienen células, estime el número de células que contenía la muestra.



41. Población En Springfield, la población P crece a razón de 3% por año. La ecuación $P = 1\,500\,000(1.03)^t$ da la población t años después de 2009. Encuentre el valor de t para el que la población es de 2 000 000. Redondee su respuesta a la décima más cercana.

42. Penetración de mercado En un estudio sobre penetración en el mercado de nuevos productos, Hurter y Rubenstein[13] hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]}$$

donde p, q y C son constantes. Ellos aseguran que si $F(0) = 0$, entonces

$$C = -\frac{1}{p+q} \ln \frac{q}{p}$$

Demuestre que su afirmación es cierta.

43. Ecuación de demanda La ecuación de demanda para un producto es $q = 80 - 2^p$. Resuelva para p y exprese su respuesta en términos de logaritmos comunes como en el ejemplo 4. Evalúe p con dos decimales cuando $q = 60$.

44. Inversión La ecuación $A = P(1.105)^t$ da el valor A al final de t años de una inversión P compuesta anualmente a una tasa de interés de 10.5%. ¿Cuántos años tomará para que una inversión se duplique? Dé su respuesta al año más cercano.

45. Ventas Después de t años, el número de unidades de un producto vendidas por año está dado por $q = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{0.8^t}$. Tal ecuación se llama *ecuación de Gompertz*, la cual describe el crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Resuelva esta ecuación para t en la misma forma que en el ejemplo 4 y muestre que

$$t = \frac{\log\left(\dfrac{3 - \log q}{\log 2}\right)}{\log 0.8}$$

También, para cualquier A y alguna b y a apropiadas, resuelva $y = Ab^{a^x}$ para x y explique por qué la solución previa es un caso especial.

46. Ecuación de aprendizaje Suponga que la producción diaria de unidades de un nuevo producto en el t-ésimo día de una corrida de producción está dada por

$$q = 100(1 + e^{-0.1t})$$

Tal ecuación se llama *ecuación de aprendizaje* e indica que conforme pase el tiempo, la producción por día aumentará. Esto puede deberse a un aumento en la habilidad de los trabajadores. Determine a la unidad completa más cercana la producción en (a) el primer día y (b) en el décimo día después del inicio de una producción. (c) ¿Después de cuántos días se alcanzará una producción diaria de 80 unidades? Redondee sus respuestas al día más cercano.

47. Verifique si 4 es la única solución de la ecuación logarítmica del ejemplo 6 graficando la función

$$y = 5 - \log_2(x + 4) - \log_2 x$$

y observando cuándo $y = 0$.

48. Resuelva $2^{3x+0.5} = 17$. Redondee su respuesta a dos decimales.

49. Resuelva $\ln (x + 2) = 5 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

50. Grafique la ecuación $3(2)^y + 4x = 5$. (*Sugerencia:* Despeje y como una función de x).

---

[11] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill, 1974).

[12] R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research,* 6 (1977), pp. 108-132.

[13] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein *et al.*, "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change,* 11 (1978), pp. 197-221.

Repaso del capítulo 3

Términos y símbolos importantes

Sección 3.1 **Funciones exponenciales**
función exponencial, b^x, para $b > 1$ y para $0 < b < 1$
interés compuesto   capital   monto compuesto
periodo de interés   tasa periódica   tasa nominal
e función exponencial natural, e^x
ley de decaimiento exponencial   cantidad inicial
constante de decaimiento   vida media

Sección 3.2 **Funciones logarítmicas**
función logarítmica, $\log_b x$ logaritmo común, $\log x$
logaritmo natural, $\ln x$

Sección 3.3 **Propiedades de los logaritmos**
fórmula de cambio de base

Sección 3.4 **Ecuaciones logarítmicas y exponenciales**
ecuación logarítmica   ecuación exponencial

Resumen

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$. La gráfica de $y = b^x$ tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base b. (Vea la figura 3.3). La fórmula de interés compuesto:

$$\boxed{S = P(1 + r)^n}$$

expresa el monto futuro compuesto S de un capital P, a la tasa periódica r, como una función exponencial del número n de periodos de interés.

El número irracional $e \approx 2.71828$ proporciona la base más importante para una función exponencial. Esta base aparece en el análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento de poblaciones o decaimiento de elementos radiactivos. Los elementos radiactivos siguen la ley de decaimiento exponencial,

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

donde N es la cantidad presente en el tiempo t, N_0 la cantidad inicial y λ la constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad de la cantidad del elemento decaiga se conoce como vida media.

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa. La función logarítmica de base b se denota por $\log_b$ y $y = \log_b x$ si y solo si $b^y = x$. La gráfica de $y = \log_b x$ tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base b. (Vea la figura 3.19). Los logaritmos de base e se llaman logaritmos naturales y se denotan por ln, los de base 10 se llaman logaritmos comunes y se denotan por log. La vida media T de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y de la constante de decaimiento: $T = (\ln 2)/\lambda$.

Algunas propiedades importantes de los logaritmos son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\log_b (mn) &= \log_b m + \log_b n \\
\log_b \frac{m}{n} &= \log_b m - \log_b n \\
\log_b m^r &= r \log_b m \\
\log_b \frac{1}{m} &= -\log_b m \\
\log_b 1 &= 0 \\
\log_b b &= 1 \\
\log_b b^r &= r \\
b^{\log_b m} &= m \\
\log_b m &= \frac{\log_a m}{\log_a b}
\end{aligned}$$

Además, si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$. De manera similar, si $b^m = b^n$, entonces $m = n$. Muchas de estas propiedades se utilizan en la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 6, escriba cada una de las formas exponenciales de manera logarítmica y cada forma logarítmica de manera exponencial.

1. $3^5 = 243$ **2.** $\log_5 625 = 4$ **3.** $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

4. $10^5 = 100\,000$ **5.** $e^7 \approx 1096.63$ **6.** $\log_9 9 = 1$

En los problemas del 7 al 12, determine el valor de la expresión sin utilizar una calculadora.

7. $\log_5 125$ **8.** $\log_4 16$ **9.** $\log_3 \frac{1}{81}$

10. $\log_{1/5} \frac{1}{625}$ **11.** $\log_{1/3} 9$ **12.** $\log_4 2$

En los problemas del 13 al 18, encuentre x sin utilizar una calculadora.

13. $\log_5 625 = x$ **14.** $\log_x \frac{1}{81} = -4$ **15.** $\log_2 x = -10$

16. $\ln \frac{1}{e} = x$ **17.** $\ln (2x + 3) = 0$ **18.** $e^{\ln (x+4)} = 7$

En los problemas 19 y 20, sean $\log 2 = a$ *y* $\log 3 = b$. *Exprese el logaritmo dado en términos de a y de b.*

19. $\log 8000$ **20.** $\log \dfrac{1024}{\sqrt[5]{3}}$

En los problemas del 21 al 26, escriba cada expresión como un solo logaritmo.

21. $3 \log 7 - 2 \log 5$ **22.** $5 \ln x + 2 \ln y + \ln z$

23. $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$ **24.** $\log_6 2 - \log_6 4 - 9 \log_6 3$

25. $\frac{1}{3} \ln x + 3 \ln (x^2) - 2 \ln (x - 1) - 3 \ln (x - 2)$

26. $4 \log x + 2 \log y - 3(\log z + \log w)$

En los problemas del 27 al 32, escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln y$ *y* $\ln z$.

27. $\ln \dfrac{x^3 y^2}{z^{-5}}$ **28.** $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$ **29.** $\ln \sqrt[3]{xyz}$

30. $\ln \left(\dfrac{x^4 y^3}{z^2}\right)^5$ **31.** $\ln \left[\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right]$ **32.** $\ln \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \left(\dfrac{x}{z}\right)^3\right]$

33. Escriba $\log_3 (x + 5)$ en términos de logaritmos naturales.
34. Escriba $\log_2 (7x^3 + 5)$ en términos de logaritmos comunes.
35. Se tiene $\log_2 37 \approx 5.20945$ y $\log_2 7 \approx 2.80735$. Encuentre $\log_7 37$.
36. Utilice logaritmos naturales para determinar el valor de $\log_4 5$.
37. Si $\ln 3 = x$ y $\ln 4 = y$, exprese $\ln (16 \sqrt{3})$ en términos de x y de y.

38. Exprese $\log \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x^2+2}}$ en términos de $\log x$, $\log (x + 1)$ y $\log (x^2 + 2)$.
39. Simplifique $10^{\log x} + \log 10^x + \log 10$.

40. Simplifique $\log \dfrac{1}{1000} + \log 1000$.

41. Si $\ln y = x^2 + 2$, despeje y.
42. Bosqueje las gráficas de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$.
43. Bosqueje la gráfica de $y = 2^{x+3}$.
44. Bosqueje la gráfica de $y = -2 \log_2 x$.

En los problemas del 45 al 52, despeje x.

45. $\log (6x - 2) = \log (8x - 10)$ **46.** $\log 3x + \log 3 = 2$

47. $3^{4x} = 9^{x+1}$ **48.** $4^{3-x} = \frac{1}{16}$

49. $\log x + \log (10x) = 3$ **50.** $\ln \left(\frac{x-5}{x-1}\right) = \ln 6$

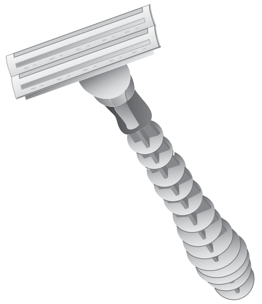
51. $\ln (\log_x 3) = 2$ **52.** $\log_2 x + \log_4 x = 3$

En los problemas del 53 al 58, encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

53. $e^{3x} = 14$ **54.** $10^{3x/2} = 5$ **55.** $5(e^{x+2} - 6) = 10$

56. $7e^{3x-1} - 2 = 1$ **57.** $4^{x+3} = 7$ **58.** $3^{5/x} = 2$

59. Inversiones Si $2600 se invierten durante $6\frac{1}{2}$ años a 6% compuesto trimestralmente, determine (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.
60. Inversiones Encuentre el monto compuesto de una inversión de $2000 durante cinco años a una tasa de 12% compuesto mensualmente.
61. Encuentre la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de $1\frac{1}{6}$% mensual.
62. Crecimiento de bacterias En un cultivo de bacterias su número aumenta a razón de 5% por hora. Al inicio, había 600 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de una hora? (c) ¿Después de cinco horas? Dé la respuesta del inciso (c) al entero más cercano.
63. Crecimiento poblacional La población de un pequeño pueblo *crece* a razón de -0.5% anual porque la emigración de la gente a ciudades cercanas en busca de trabajo excede la tasa de natalidad. En 2006 la población era de 6000. (a) Determine una ecuación que dé la población, P, después de t años a partir de 2006. (b) Encuentre la población en el año 2016 (tenga cuidado de expresar su respuesta como un número entero).
64. Ingreso Debido a una campaña de publicidad ineficaz, la compañía de rasuradoras Kleer-Kut encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una reducción drástica. Por otra parte, el ingreso anual R al final de t años de negocios satisface la ecuación $R = 200\,000e^{-0.2t}$. Encuentre el ingreso anual al final de dos y tres años.



65. Radiactividad Una sustancia radiactiva decae de acuerdo con la fórmula

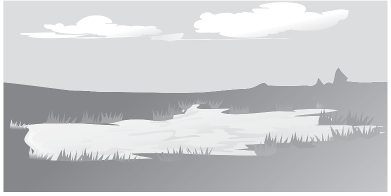
$$N = 10e^{-0.41t}$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t horas: (a) Determine la cantidad de sustancia presente en un inicio. (b) Al décimo de miligramo más cercano, determine la cantidad presente después de 1 hora y (c) después de 5 horas. (d) Al décimo de hora más cercana, determine la vida media de la sustancia y (e) el número de horas para que queden 0.1 miligramos.
66. Radiactividad Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 días, ¿en cuántos días habrá $\frac{1}{8}$ de la cantidad inicial?
67. Mercadotecnia Una compañía de investigación de mercado necesita determinar cuántas personas se adaptan al sabor de unas nuevas pastillas para la tos. En un experimento, a una persona se le dio una pastilla para la tos y se le pidió que periódicamente asignara un número, en escala de 0 a 10, al sabor percibido. Este número fue llamado *magnitud de la respuesta*. El número 10 fue asignado al sabor inicial. Después de llevar a cabo el experimento varias veces, la compañía estimó que la magnitud de la respuesta, R, está dada por

$$R = 10e^{-t/40}$$

donde t es el número de segundos después que la persona tomó la pastilla para la tos. (a) Encuentre la magnitud de la respuesta después de 20 segundos. Redondee su respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos la persona tiene una magnitud de respuesta de 5? Aproxime su respuesta al segundo más cercano.
68. Sedimento en el agua En un lago del Medio Oeste estadounidense, el agua contiene un sedimento cuya presencia reduce la

transmisión de la luz a través del líquido. Los experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce en 10% al pasar a través de 20 cm de agua. Suponga que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimento contenido. Un instrumento de medición puede detectar luz hasta una intensidad de 0.17% de la luz solar total. Este instrumento se sumerge en el lago. ¿A qué profundidad dejará inicialmente de registrar la presencia de luz? Aproxime su respuesta a los 10 cm más cercanos.



69. Enfriamiento de cuerpos En un estudio sobre la velocidad de enfriamiento de partes aisladas de un cuerpo cuando se expone a bajas temperaturas, aparece la siguiente ecuación[14]

$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at}$$

donde T_t es la temperatura de la parte del cuerpo en el instante t, T_e es la temperatura del medio ambiente, el subíndice o se refiere a la diferencia de temperaturas iniciales y a es una constante. Muestre que

$$a = \frac{1}{t}\ln\frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}$$

70. Depreciación Una alternativa para la depreciación lineal es la depreciación por *saldo decreciente*. Este método supone que un artículo pierde su valor más rápido al inicio de su vida que posteriormente. Un porcentaje fijo del valor se resta cada año. Suponga que el costo inicial de un artículo es C y su vida útil es de N meses. Entonces el valor V del artículo al final de n meses está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donde cada mes acumula una depreciación de $\frac{100}{N}$ por ciento. (Esto se denomina *depreciación sencilla por saldo decreciente*: si la depreciación anual fuera de $\frac{200}{N}$ por ciento, sería depreciación doble por saldo decreciente). Si una computadora portátil nueva se compró en $1500, tiene vida útil de 36 meses y acumula depreciación por saldo decreciente, ¿después de cuántos meses su valor cae por debajo de $500?

71. Si $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, determine el rango de f. Redondee los valores a dos decimales.

72. Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = \ln(x + 2)$ y $y = x^2 - 7$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

73. Resuelva $\ln x = 6 - 2x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

74. Resuelva $6^{3-4x} = 15$. Redondee su respuesta a dos decimales.

75. Bases Se ha visto que existen dos tipos de bases b para las funciones exponenciales y logarítmicas: aquellas con b en $(0, 1)$ y las de b en $(1, \infty)$. Podría suponerse que hay *más* del segundo tipo, pero este no es el caso. Considere la función $f\colon (0, 1) \longrightarrow (1, \infty)$ dada por $f(x) = 1/x$.

(a) Muestre que el dominio de f puede tomarse como $(0, 1)$.

(b) Muestre que con el dominio $(0, 1)$, el rango de f es $(1, \infty)$.

(c) Muestre que f tiene una inversa g y determine una fórmula para $g(x)$.

El ejercicio muestra que los números comprendidos en $(0, 1)$ están en correspondencia de uno a uno con los números incluidos en $(1, \infty)$, por lo que cualquier *base* de cualquier tipo corresponde exactamente a una base del otro tipo. ¿Quién lo hubiera pensado? "$(1, \infty)$ —tantos números; $(0, 1)$— tan poco espacio".

76. Despliegue la gráfica de la ecuación $(6)5^y + x = 2$. (*Sugerencia:* Despeje y como una función explícita de x).

77. Grafique $y = 3^x$ y $y = \dfrac{3^x}{9}$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = \dfrac{3^x}{9}$ es la gráfica de $y = 3^x$ recorrida dos unidades a la derecha. Pruebe de manera algebraica que esto es realmente cierto.

EXPLORE Y AMPLÍE Dosis de medicamento[15]

La determinación y prescripción de la dosis de medicamento son aspectos extremadamente importantes en la profesión médica. Con mucha frecuencia se debe tener precaución acerca de posibles efectos secundarios o tóxicos de las medicinas.

Muchas medicinas son utilizadas por el cuerpo humano de tal manera que la cantidad presente sigue una *ley de decaimiento exponencial* como se estudió en la sección 3.1. Esto es, si $N(t)$ es la cantidad de medicamento presente en el cuerpo en el instante t, entonces

$$N = N_0 e^{-kt} \tag{1}$$

donde k es una constante positiva y N_0 es la cantidad presente en el instante $t = 0$. Si H es la *vida media* del medicamento, que significa el tiempo H para el cual $N(H) = N_0/2$, entonces nuevamentea partir de la sección 3.2,

$$H = (\ln 2)/k \tag{2}$$

Observe que H determina por completo la constante k puesto que la ecuación (2) puede escribirse de nuevo como $k = (\ln 2)/H$.

Suponga que usted quiere analizar el caso en que se administran dosis iguales a un paciente cada I unidades de tiempo hasta que se alcance un nivel terapéutico y después reducir la dosis lo suficiente como para mantener dicho nivel. La razón para mantener dosis *reducidas* se relaciona frecuentemente con los efectos tóxicos de las medicinas.

---

[14] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

[15] Este estudio está adaptado de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley, "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages", *The Mathematics Teacher*, 80, núm. 3 (febrero de 1987), pp. 110-113. Con permiso del National Council of Teachers of Mathematics.

En particular, suponga que

(i) Hay d dosis de P unidades cada una;
(ii) Una dosis se da en los tiempos $t = 0, I, 2I, \dots$ y $(d - 1)I$; y que
(iii) El nivel terapéutico, T, se alcanza en $t = dI$ (el cual ocurre un intervalo de tiempo después de administrar la última dosis).

Ahora se determinará una fórmula que proporciona el nivel terapéutico, T. En el instante $t = 0$ el paciente recibe las primeras P unidades, de modo que la cantidad de medicamento presente en su cuerpo es P. En el instante $t = I$, la cantidad presente de la primera dosis es Pe^{-kI} [por la ecuación (1)]. Además, en $t = I$ se suministran las segundas P unidades. Así que la cantidad *total* de medicamento presente es

$$P + Pe^{-kI}$$

En el instante $t = 2I$, la cantidad que queda de la primera dosis es Pe^{-2kI}; de la segunda dosis, que ha estado en el sistema solo durante un intervalo de tiempo, la cantidad presente es Pe^{-kI}. También, en $t = 2I$ se suministra la tercera dosis de P unidades, de modo que la cantidad total presente es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI}$$

Continuando de esta manera, la cantidad de medicamento presente en el sistema en el tiempo $(d - 1)I$, el instante de la última dosis, es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-(d-1)\cdot kI}$$

Así que para un intervalo de tiempo después, en el instante dI, cuando no se administra una dosis de P pero es cuando se alcanza el nivel terapéutico, se tiene

$$T = Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-dkI} \tag{3}$$

ya que cada término de la expresión anterior decae en un factor de e^{-kI}. Ésta es una buena oportunidad de usar la *notación de suma* presentada en la sección 1.5 y volver a escribir la ecuación (3) como

$$T = P\sum_{i=1}^{d} e^{-ikI} \tag{4}$$

La suma es en realidad la de los primeros d términos de una sucesión geométrica como las estudiadas en la sección 1.6. Tanto el primer término de la sucesión geométrica como su razón común están dados por e^{-kI}. A partir de la ecuación 16 de la sección 1.6, se deduce que la ecuación (4) se convierte en

$$T = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}} \tag{5}$$

la cual, al multiplicar el numerador y el denominador por e^{kI}, resulta en

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI} - 1} \tag{6}$$

La ecuación (6) expresa el nivel terapéutico, T, en términos de la dosis, P; los intervalos de tiempo de longitud I; el número de dosis, d, y la vida media, H, de la medicina [ya que $k = (\ln 2)/H$]. Es fácil resolver la ecuación (6) para P si se conocen T, H, I y d. También es posible resolver la ecuación para d si T, H, I y P son conocidas. [La resolución de la ecuación (6) para H o I en términos de las otras cantidades puede resultar bastante complicada].

Ahora el objetivo es mantener el nivel terapéutico en el paciente. Para hacer esto, se suministra una dosis reducida R en los instantes $t = dI$, $(d + 1)I$, $(d + 2)I$ y así sucesivamente. Puede determinarse una fórmula para R de la manera siguiente.

En el instante $t = (d + 1)I$, pero antes de suministrar la segunda dosis reducida, la cantidad de medicamento en el sistema proveniente de la primera dosis reducida es Re^{-kI}, y la cantidad que permanece del nivel terapéutico es Te^{-kI}. Suponga que se requiere que la suma de estas cantidades sea el nivel terapéutico, T; esto es,

$$T = Re^{-kI} + Te^{-kI}$$

Al resolver para R se obtiene

$$Re^{-kI} = T - Te^{-kI}$$
$$R = T(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

Al reemplazar T por el lado derecho de la ecuación (5) se obtiene

$$R = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

que se simplifica como,

$$R = P(1 - e^{-dkI}) \tag{7}$$

Al continuar administrando las dosis reducidas a intervalos de tiempo de longitud I, se asegura que el nivel terapéutico nunca esté por debajo de T después del tiempo $(d + 1)$ I. Además, dado que $-dkI < 0$, entonces $0 < e^{-dkI} < 1$. En consecuencia, el factor $1 - e^{-dkI}$ en la ecuación (7) está entre 0 y 1. Esto asegura que R sea menor que P; de modo que R es en realidad una dosis *reducida.*

Es interesante observar que Armstrong y Midgley establecen que “la cantidad terapéutica T debe seleccionarse a partir de un rango de valores determinados de manera empírica. El juicio y la experiencia médica son necesarios para seleccionar los intervalos apropiados y su duración al administrar un medicamento. Incluso la vida media de este puede variar un poco entre pacientes”. En `www.fda.gov/cder` puede encontrarse información adicional sobre drogas médicas y su uso seguro.

Problemas

1. De la ecuación (6), despeje (a) P y (b) d.
2. Muestre que si I es igual a la vida media del medicamento, la ecuación (6) puede escribirse como

$$T = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right)P$$

Observe que $0 < 1 - (1/2^d) < 1$ para $d > 0$. Esta ecuación implica que cuando se administran dosis de P unidades a intervalos de tiempo iguales a la vida media de la droga, en un intervalo de tiempo después de que cualquier dosis es administrada, pero antes de que se suministre la siguiente dosis, el nivel total de medicamento en el sistema del paciente es menor que P.

3. La Teofilina es un medicamento utilizado en el tratamiento del asma bronquial, tiene vida media de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que tal paciente alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 horas cuando se le suministran 100 miligramos cada 4 horas. Aquí $d = 3$. A causa de la toxicidad, la dosis debe reducirse más adelante. Al miligramo más cercano, determine (a) el nivel terapéutico y (b) la dosis reducida.

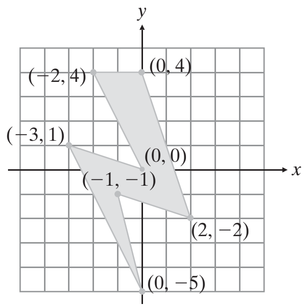
4. Utilice una calculadora gráfica para generar una gráfica de la concentración de medicamento y verifique si la ecuación (7) proporciona de manera correcta la dosis de mantenimiento. Introduzca en la calculadora 0.5 $\longrightarrow$ K, 3 $\longrightarrow$ D, 1 $\longrightarrow$ I y 1 $\longrightarrow$ P. Después introduzca Y1 = P(1 − e^ − (D*K*I)) para representar R. Por último, introduzca Y2 = P e^(− K X) + P e^(−K(X − I))*(X ≥ I) + P e^(− K(X − 2I))*(X ≥ 2I) + Y1 e^(− K(X − 3I))*(X ≥ 3I) + Y1 e^(− K(X − 4I))*(X ≥ 4I). Después, solo seleccione Y2 para que sea graficada y grafique la función. Experimente con diferentes valores para K, D, I y P. ¿Qué ajuste es necesario en la expresión para Y2 a medida que cambia D?

ÁLGEBRA MATRICIAL

4

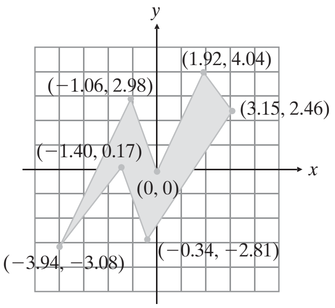
Las matrices, el tema de este capítulo, son simplemente arreglos de números. Las matrices y el álgebra matricial tienen una aplicación potencial siempre que la información numérica pueda acomodarse de manera significativa en bloques rectangulares.

Un área de aplicación del álgebra matricial son las gráficas por computadora. En un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse utilizando una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina. Por ejemplo, podría configurarse un esquema de conexión por puntos en el que el rayo mostrado en la gráfica esté representado mediante la matriz incluida a su derecha.



$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Las gráficas trazadas por computadora con frecuencia muestran objetos que giran en el espacio. De manera computacional, la rotación se realiza por medio de una multiplicación de matrices. El rayo gira 52 grados en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen por multiplicación de matrices, lo cual implica una matriz cuyas entradas son las funciones t_{11}, t_{12}, t_{21} y t_{22}[1] del ángulo de rotación:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}\,(52°) & t_{12}\,(52°) \\ t_{21}\,(52°) & t_{22}\,(52°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.92 & 4.04 \\ 3.15 & 2.46 \\ -0.34 & -2.81 \\ -1.40 & 0.17 \\ -3.94 & -3.08 \\ -1.06 & 2.98 \end{bmatrix}$$

---

[1] En realidad, $t_{11} = t_{22}$ y $t_{12} = -t_{21}$, pero no se pretende entrar en detalles.

4.1 Matrices

Objetivo

Introducir el concepto de matriz y considerar tipos especiales de matrices.

En matemáticas y economía, la determinación de formas útiles para describir muchas situaciones conduce al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 9x - 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

Si la notación está organizada y se mantienen las x en la primera columna, las y en la segunda columna, etc., entonces lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos involucrados en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse mediante los arreglos rectangulares

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uno para cada *lado* de las ecuaciones; a cada arreglo se le denomina *matriz* (en plural: *matrices*). Tales arreglos rectangulares se consideran objetos en sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, aunque también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices se usarán letras mayúsculas como A, B, C, etcétera.

¡ADVERTENCIA!

Las barras verticales, ||, que encierran un arreglo rectangular no tienen el mismo significado que los corchetes o los paréntesis.

En economía, a menudo resulta conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para desplegar datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos X, Y y Z podría representar las unidades de mano de obra y material involucradas en una semana de producción de estos artículos, como se muestra en la tabla 4.1. De manera más sencilla, estos datos pueden representarse por medio de la matriz

Tabla 4.1

	Producto		
	X	Y	Z
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Los renglones horizontales de una matriz se numeran en forma consecutiva de arriba hacia abajo y las columnas verticales se numeran de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, se tiene

$$\begin{array}{r} \\ \text{renglón 1} \\ \text{renglón 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \quad 10 \quad & \quad 12 \quad & \quad 16 \quad \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Como A tiene dos renglones y tres columnas, se dice que A tiene *tamaño* 2×3 (se lee "2 por 3") o que A *es* de 2×3, donde el número de renglones se especifica primero. De manera similar, las matrices

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

tienen tamaño 3×3 y 4×2, respectivamente.

Los números presentes en una matriz se conocen como sus **entradas**. Para denotar las entradas de una matriz A de tamaño 2×3, se utiliza el nombre de la matriz, con *subíndices dobles* para indicar *posición*, en forma consistente con las convenciones anteriores:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

¡ADVERTENCIA!

El subíndice del renglón aparece a la izquierda del subíndice de la columna. En general, A_{ij} y A_{ji} son muy diferentes.

Para la entrada A_{12} (se lee "A sub uno-dos" o solo "A uno-dos"), el primer subíndice, 1, especifica el renglón y el segundo, 2, la columna en que aparece la entrada. De manera similar, la entrada A_{23} (se lee "A dos-tres") es la que se encuentra en el segundo renglón y la tercera columna. En general, se dice que el símbolo A_{ij} denota la entrada que aparece en el renglón i y en la columna j. De hecho, una matriz A es una función de dos variables con $A(i, j) = A_{ij}$. Si A es una función $m \times n$, se escribe $\bar{m}$ para el conjunto $\{1, 2, \dots m\}$. Entonces el dominio de A es de $\bar{m} \times \bar{n}$, el conjunto de todos los pares ordenados (i, j) con i en $\bar{m}$ y j en $\bar{n}$, mientras que el rango es un subconjunto del conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$.

La atención en este capítulo se concentra en la manipulación y aplicación de varios tipos de matrices. Para completar la exposición, enseguida se da una definición formal de matriz.

Definición

Un arreglo rectangular de números A que consiste en m renglones y n columnas como el siguiente,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

se conoce como una ***matriz*** de $m \times n$ y $m \times n$ es el ***tamaño*** de A. Para la entrada A_{ij}, el subíndice del renglón es i y el subíndice de la columna es j.

¡ADVERTENCIA!

La *matriz* $[A_{ij}]$ tiene A_{ij} como su *entrada general*.

El número de entradas en una matriz de $m \times n$ es mn. Por brevedad, una matriz de $m \times n$ puede denotarse por el símbolo $[A_{ij}]_{m \times n}$ o, de manera más simple, como $[A_{ij}]$, cuando el tamaño se entiende a partir del contexto.

Una matriz que tiene exactamente un renglón, como la matriz de 1×4

$$A = [1 \quad 7 \quad 12 \quad 3]$$

se llama **vector renglón**. Una matriz que consiste en una sola columna, como la matriz de 5×1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

se llama **vector columna**. Observe que una matriz es 1×1 si y solo si es al mismo tiempo un vector renglón y un vector columna. Es seguro tratar a las matrices 1×1 como simples números. En otras palabras, puede escribirse $[7] = 7$ y, de manera más general, $[a] = a$, para cualquier número real a.

APLÍQUELO ▶

1. Un fabricante que utiliza las materias primas A y B está interesada en rastrear los costos de estos materiales que provienen de tres fuentes diferentes. ¿Cuál es el tamaño de la matriz que ella podría usar?

EJEMPLO 1 Tamaño de una matriz

a. La matriz $[1 \quad 2 \quad 0]$ tiene tamaño 1×3.

b. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ tiene tamaño 3×2.

c. La matriz $[7]$ tiene tamaño 1×1.

d. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene tamaño 3×5 y $(3)(5) = 15$ entradas.

Ahora resuelva el problema 1a ◁

APLÍQUELO ▶

2. Un análisis de un lugar de trabajo utiliza una matriz de 3 × 5 para describir el tiempo usado en cada una de las tres fases de cinco proyectos diferentes. El proyecto 1 necesita 1 hora en cada fase, el proyecto 2 requiere el doble de tiempo que el proyecto 1, el proyecto 3 necesita el doble de tiempo que el proyecto 2, … , y así sucesivamente. Construya esta matriz de análisis de tiempo.

EJEMPLO 2 Construcción de matrices

a. Construya una matriz columna A de tres entradas tal que a $A_{21} = 6$ y $A_{i1} = 0$ en los demás casos.

Solución: Como $A_{11} = A_{31} = 0$, la matriz es

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Si $[A_{ij}]$ es de 3×4 y $A_{ij} = i + j$, encuentre A.

Solución: Aquí $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$, y A tiene $(3)(4) = 12$ entradas. Como $A_{ij} = i + j$, la entrada del renglón i y la columna j se obtiene sumando los números i y j. Entonces, $A_{11} = 1 + 1 = 2$, $A_{12} = 1 + 2 = 3$, $A_{13} = 1 + 3 = 4$, etc. Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

c. Construya la matriz I de 3×3, dado que $I_{11} = I_{22} = I_{33} = 1$ e $I_{ij} = 0$ en los demás casos.

Solución: La matriz está dada por:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Igualdad de matrices

Ahora se define lo que significa decir que dos matrices son *iguales*.

Definición

Las matrices A y B son ***iguales*** si y solo si tienen el mismo tamaño y $A_{ij} = B_{ij}$ para cada i y cada j (esto es, las entradas correspondientes son iguales).

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

pero

$$[1 \quad 1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1] \qquad \text{diferentes tamaños}$$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Al igualar las entradas correspondientes, se debe tener

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 7 \\ 2z = 4 \\ 5w = 2 \end{cases}$$

Al resolver se obtiene $x = 2$, $y = 6$, $z = 2$ y $w = \frac{2}{5}$.

Transpuesta de una matriz

Si A es una matriz, la matriz que se forma a partir de A mediante el intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como *transpuesta* de A.

Definición

La ***transpuesta*** de una matriz A de $m \times n$, denotada como A^T, es la matriz de $n \times m$ cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de A.

EJEMPLO 3 Transpuesta de una matriz

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, encuentre A^T.

Solución: La matriz A es de 2×3, de modo que A^T es de 3×2. La columna 1 de A se convierte en el renglón 1 de A^T, la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por lo tanto,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

Observe que las columnas de A^T son los renglones de A. Asimismo, si se toma la transpuesta de esta respuesta, se obtendrá la matriz original A. Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que

$$(A^T)^T = A$$

Matrices especiales

Cierto tipo de matrices desempeñan funciones importantes en la teoría de matrices. Ahora se considerarán algunos de estos tipos especiales.

Una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son todas iguales a 0 se conoce como **matriz cero** de $m \times n$ y se denota por $0_{m \times n}$ o, de manera más simple, por 0 si se sobreentiende su tamaño. Así, la matriz cero de 2×3 es

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, en general, se tiene

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones —por ejemplo n renglones y n columnas— se llama **matriz cuadrada** de orden n. Esto es, una matriz $m \times n$ es cuadrada si y solo si $m = n$. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [3]$$

son cuadradas con órdenes 3 y 1, respectivamente.

En una matriz cuadrada A de orden n, las entradas $A_{11}, A_{22}, A_{33}, \ldots, A_{nn}$, están sobre la diagonal que se extiende desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha de la matriz y se dice que constituyen la **diagonal principal**. Así, en la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

la diagonal principal (vea la región sombreada) consiste en $A_{11} = 1, A_{22} = 5$ y $A_{33} = 9$.

Una matriz cuadrada A se denomina **matriz diagonal** si todas las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero —esto es, si $A_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Ejemplos de matrices diagonales son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Se dice que una matriz cuadrada A es una **matriz triangular superior** si todas las entradas que están *debajo* de la diagonal principal son cero —esto es, si $A_{ij} = 0$ para $i > j$. De manera similar, se dice que una matriz A es una **matriz triangular inferior** si todas las entradas ubicadas *por arriba* de la diagonal principal son cero —esto es, si $A_{ij} = 0$ para $i < j$. Cuando una matriz es triangular superior o triangular inferior se conoce como una **matriz triangular**. Así, las matrices

Se deduce que una matriz es diagonal si y solo si es tanto triangular superior como triangular inferior.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices triangular superior y triangular inferior, respectivamente, y por lo tanto son matrices triangulares.

PROBLEMAS 4.1

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J = [4]$$

(a) Establezca el tamaño de cada matriz.
(b) ¿Cuáles matrices son cuadradas?
(c) ¿Cuáles matrices son triangulares superiores?, ¿triangulares inferiores?
(d) ¿Cuáles son vectores renglón?
(e) ¿Cuáles son vectores columna?

Para los problemas del 2 al 9, sea

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ¿Cuál es el orden de A?

Encuentre las entradas siguientes.

3. A_{21} **4.** A_{42} **5.** A_{32} **6.** A_{34} **7.** A_{44} **8.** A_{55}

9. ¿Cuáles son las entradas del tercer renglón?

10. Escriba la matriz triangular superior de orden 4, dado que todas las entradas que no se requiere sean 0 son iguales a la suma de sus subíndices. (Por ejemplo, $A_{23} = 2 + 3 = 5$).

11. **(a)** Construya una matriz $A = [A_{ij}]$ si A es 2×3 y $A_{ij} = -i + 2j$.
(b) Construya la matriz C de $2 \times 4 = [(i + j)^2]$.

12. **(a)** Construya la matriz $B = [B_{ij}]$ si B es de 2×2 y $B_{ij} = (-1)^{i-j}(i^2 - j^2)$.
(b) Construya la matriz D de $2 \times 3 = [(-1)i(j^3)]$.

13. Si $A = [A_{ij}]$ es de 12×10, ¿cuántas entradas tiene A? Si $A_{ij} = 1$ para $i = j$ y $A_{ij} = 0$ para $i \neq j$, encuentre A_{33}, A_{52}, $A_{10,10}$ y $A_{12,10}$.

14. Liste la diagonal principal de

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 9 \\ 7 & 5 & 0 & -1 \\ -4 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} x^2 & 1 & 2y \\ 9 & \sqrt{y} & 3 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$

15. Escriba la matriz cero de orden (a) 4 y (b) 6.

16. Si A es una matriz de 7×9, ¿cuál es el tamaño de A^T?

En los problemas del 17 al 20, encuentre A^{T}.

17. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

21. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuáles son matrices diagonales?

(b) ¿Cuáles son matrices triangulares?

22. Una matriz es *simétrica* si $A^{\mathrm{T}} = A$. ¿La matriz del problema 19 es simétrica?

23. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

verifique la propiedad general de que $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$ encontrando A^{T} y después $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

En los problemas del 24 al 27, resuelva la ecuación matricial.

24. $\begin{bmatrix} 3x & 2y-1 \\ z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$

28. Inventario Una tienda vendió 125 latas de sopa de tomate, 275 latas de frijoles y 400 latas de atún. Escriba un vector renglón que proporcione el número de artículos vendidos de cada tipo. Si cada uno de los artículos se vende a \$0.95, \$1.03 y \$1.25, respectivamente, escriba esta información como un vector columna.

29. Análisis de ventas La compañía Widget tiene sus reportes de ventas mensuales dados por medio de matrices cuyos renglones, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de extra lujo vendidos, mientras que las columnas dan el número de unidades rojas, blancas, azules y púrpuras vendidas. Las matrices para enero y febrero son

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

respectivamente. (a) ¿Cuántas unidades de los modelos de extra lujo blancos se vendieron en enero? (b) ¿Cuántos modelos de lujo azules se vendieron en febrero? (c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares púrpuras? (d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses? (e) ¿En qué mes se vendieron más modelos de lujo? (f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos? (g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

30. Matriz de insumo-producto Las matrices de insumo-producto, desarrolladas por W. W. Leontief, indican las interrelaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. Un ejemplo hipotético para una economía simplificada está dado por la matriz M que se presenta al final de este problema. Los sectores consumidores son los mismos que los productores y pueden considerarse como fabricantes, gobierno, acero, agricultura, doméstico, etc. Cada renglón muestra cómo el producto de un sector dado es consumido por los cuatro sectores. Por ejemplo, del total de la producción de la industria A, 50 unidades fueron para la propia industria A, 70 para la B, 200 para C y 360 para todos los demás consumidores. La suma de las entradas en el renglón 1 —a saber, 680— da la producción total de A para un periodo dado. Cada columna da la producción de cada sector que consume un sector dado. Por ejemplo, en la producción de 680 unidades, la industria A consume 50 unidades de A, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás productores. Para cada columna, encuentre la suma de las entradas. Haga lo mismo con cada renglón. ¿Qué observa al comparar esos totales? Suponga que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, en 136 unidades. Si se supone que esto resulta en un aumento uniforme de 20% en todos sus insumos, ¿en cuántas unidades aumentará su producción el sector B? Responda la misma pregunta para C y para todos los demás productores.

$$M = \begin{array}{l|cccc|} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{\text{Industria A Industria B Industria C Todos los demás}}}^{\text{CONSUMIDORES}}} \\ \text{PRODUCTORES} & \text{Industria A} & \text{Industria B} & \text{Industria C} & \underline{\text{Todos los demás}}\ \text{consumidores} \\ \text{Industria A} & 50 & 70 & 200 & 360 \\ \text{Industria B} & 90 & 30 & 270 & 320 \\ \text{Industria C} & 120 & 240 & 100 & 1050 \\ \text{Todos los demás productores} & 420 & 370 & 940 & 4960 \end{array}$$

31. Encuentre todos los valores de x para los cuales

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2000x & \sqrt{x^2} \\ x^2 & \ln(e^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2001 & -x \\ 2001 - 2000x & x \end{bmatrix}$$

En los problemas 32 y 33, encuentre A^{T}.

32. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar

Objetivo

Definir la suma de matrices y la multiplicación por un escalar y considerar las propiedades relacionadas con estas operaciones.

Suma de matrices

Considere un comerciante de vehículos para nieve que vende dos modelos: Deluxe y Super. Cada modelo está disponible en uno de dos colores, rojo y azul. Suponga que las ventas para enero y febrero están representadas por las matrices de ventas

$$J = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Deluxe} & \text{Super} \end{array} \\ \begin{array}{c}\text{rojo}\\ \text{azul}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\end{array} \qquad F = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

respectivamente. Cada renglón de J y F proporciona el número vendido de cada modelo para un color dado. Cada columna proporciona el número vendido de cada color para un modelo dado. Una matriz que represente las ventas totales para cada modelo y color durante los dos meses, puede obtenerse sumando las entradas correspondientes en J y F:

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 7\end{bmatrix}$$

Esta situación nos proporciona la oportunidad de introducir la operación de suma de matrices para dos matrices del mismo orden.

Definición

Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces la ***suma*** $A + B$ es la matriz de $m \times n$ que se obtiene al sumar las entradas correspondientes de A y B; de modo que $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Si el tamaño de A es diferente del tamaño de B, entonces $A + B$ no está definida.

Por ejemplo, sean

$$A = \begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix}5 & -3 & 6\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}$$

Como A y B son del mismo tamaño (2×3), su suma está definida. Se tiene

$$A + B = \begin{bmatrix}3+5 & 0+(-3) & -2+\ \ 6\\ 2+1 & -1+\ \ 2 & 4+(-5)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & -3 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

APLÍQUELO ▶

3. Una compañía de muebles para oficina fabrica escritorios y mesas en dos plantas, A y B. La matriz J representa la producción de las dos plantas en enero y la matriz F representa la producción de las dos plantas en febrero. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para los dos meses, donde:

$$J = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c}\text{escritorios}\\ \text{mesas}\end{array} & \begin{bmatrix}120 & 80\\ 105 & 130\end{bmatrix}\end{array}$$

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{c}\text{escritorios}\\ \text{mesas}\end{array} \end{array} \begin{bmatrix}110 & 140\\ 85 & 125\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1 Suma de matrices

a. $$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & -2\\ -6 & 4\\ 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+7 & 2-2\\ 3-6 & 4+4\\ 5+3 & 6+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 0\\ -3 & 8\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ no está definida porque las matrices no son del mismo tamaño.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Si A, B, C y O tienen el mismo tamaño, entonces las propiedades siguientes se cumplen para la suma de matrices:

Propiedades para la suma de matrices

1. $A + B = B + A$	propiedad conmutativa
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$	propiedad asociativa
3. $A + O = A = O + A$	propiedad de identidad

Estas propiedades de la suma de matrices son semejantes a las propiedades correspondientes de la suma de números reales.

La propiedad 1 establece que las matrices pueden sumarse en cualquier orden, y la propiedad 2 permite que las matrices se agrupen para la operación de suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero desempeña la misma función en la suma de matrices que el número 0 en la suma de números reales. Estas propiedades se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Propiedades de la suma de matrices

Sean

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Muestre que $A + B = B + A$.

Solución:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B + A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $A + B = B + A$.

b. Muestre que $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Solución:

$$A + (B + C) = A + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Muestre que $A + O = A$.

Solución:

$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 3 Vectores de demanda para una economía

Considere una economía hipotética simplificada que tiene tres industrias: carbón, electricidad y acero y tres consumidores 1, 2 y 3. Suponga que cada consumidor puede utilizar parte de la producción de cada industria y cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras industrias. Entonces, las necesidades de cada consumidor y de cada industria pueden representarse mediante un vector (renglón) de demanda cuyas entradas, en orden, constituyan la cantidad de carbón, electricidad y acero necesarios para el consumidor o industria en las unidades de medida convenientes. Por ejemplo, los vectores de demanda para los consumidores podrían ser:

$$D_1 = [3 \quad 2 \quad 5] \qquad D_2 = [0 \quad 17 \quad 1] \qquad D_3 = [4 \quad 6 \quad 12]$$

y para las industrias podrían ser:

$$D_{\mathrm{C}} = [0 \quad 1 \quad 4] \qquad D_{\mathrm{E}} = [20 \quad 0 \quad 8] \qquad D_{\mathrm{S}} = [30 \quad 5 \quad 0]$$

donde los subíndices C, E y S son para carbón, electricidad y acero, respectivamente. La demanda total de los consumidores para estos bienes está dada por la suma

$$D_1 + D_2 + D_3 = [3 \quad 2 \quad 5] + [0 \quad 17 \quad 1] + [4 \quad 6 \quad 12] = [7 \quad 25 \quad 18]$$

La demanda industrial total está dada por la suma

$$D_{\mathrm{C}} + D_{\mathrm{E}} + D_{\mathrm{S}} = [0 \quad 1 \quad 4] + [20 \quad 0 \quad 8] + [30 \quad 5 \quad 0] = [50 \quad 6 \quad 12]$$

Por lo tanto, la demanda global total está dada por

$$[7 \quad 25 \quad 18] + [50 \quad 6 \quad 12] = [57 \quad 31 \quad 30]$$

Así, la industria del carbón vende un total de 57 unidades, el total de unidades de electricidad vendidas es de 31 y el total de unidades de acero que se vendieron es de 30.[2]

Ahora resuelva el problema 41 ◁

---

[2] Este ejemplo, así como algunos otros de este capítulo, es de John G. Kemeny, J. Laurie Snell y Gerald L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, 3a. ed., © 1974. Reimpreso con permiso de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Multiplicación por un escalar

De regreso al caso del vendedor de vehículos para nieve, recuerde que en febrero las ventas estaban dadas por la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si en marzo el vendedor duplica las ventas de febrero de cada modelo y color de vehículos para nieve, la matriz de ventas para marzo podría obtenerse multiplicando cada entrada de F por 2, de donde resulta

$$M = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) \\ 2(4) & 2(2) \end{bmatrix}$$

Parece razonable escribir esta operación como

$$M = 2F = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

que se considera como la multiplicación de una matriz por un número real. En el contexto de las matrices, los números reales suelen llamarse ***escalares***. De hecho, se tiene la definición siguiente.

Definición

Si A es una matriz de $m \times n$ y k es un número real, entonces empleamos kA para denotar la matriz $m \times n$ que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por k de modo que $(kA)_{ij} = kA_{ij}$. Esta operación se llama ***multiplicación por un escalar*** y kA se denomina ***múltiplo escalar*** de A.

Por ejemplo,

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(0) & -3(-2) \\ -3(2) & -3(-1) & -3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 Multiplicación por un escalar

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente.

a. $5A$

Solución:

$$5A = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

b. $-\frac{2}{3}B$

Solución:

$$-\frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

c. $\frac{1}{2}A + 3B$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A + 3B &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d. $0A$

Solución:

$$0A = 0\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

e. $k0$

Solución:

$$k0 = k\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Si A y B son del mismo tamaño, entonces, para cualesquiera escalares k y l, se tienen las propiedades siguientes de la multiplicación por un escalar:

Propiedades de la multiplicación por un escalar

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $(k + l)A = kA + lA$
3. $k(lA) = (kl)A$
4. $0A = 0$
5. $k0 = 0$

Las propiedades 4 y 5 se ilustraron en los ejemplos 4(d) y (e); las otras se ilustrarán en los problemas.

También se tienen las propiedades siguientes de la operación de transposición, donde A y B son del mismo tamaño y k es cualquier escalar:

$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$
$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$$

La primera propiedad establece que *la transpuesta de una suma es la suma de las transpuestas*.

Sustracción de matrices

Si A es cualquier matriz, entonces el múltiplo escalar $(-1)A$ se escribe simplemente como $-A$ y se denomina **negativo de** A:

$$-A = (-1)A$$

Por lo tanto, si

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & 5\end{bmatrix}$$

entonces

$$-A = (-1)\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -1\\ 4 & -5\end{bmatrix}$$

Observe que $-A$ es la matriz resultante de multiplicar cada entrada de A por -1.

La sustracción de matrices se define en términos de la suma de matrices:

De manera más sencilla, para encontrar $A - B$, se puede restar cada entrada de B de la entrada correspondiente de A.

Definición

Si A y B tienen el mismo tamaño, entonces $A - B$ quiere decir $A + (-B)$.

APLÍQUELO ▶

3. Una fabricante de puertas, ventanas y armarios escribe su utilidad anual (en miles) para cada categoría en un vector columna como $P = \begin{bmatrix}248\\319\\532\end{bmatrix}$. Sus costos fijos de producción pueden describirse por medio del vector $C = \begin{bmatrix}40\\30\\60\end{bmatrix}$. Esta fabricante calcula que, con una nueva estructura de precios que genere un ingreso de 80% del ingreso de su competidor, puede duplicar su utilidad suponiendo que sus costos fijos permanezcan constantes. Este cálculo puede representarse por medio de

$$0.8\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}40\\30\\60\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}248\\319\\532\end{bmatrix}$$

Resuelva para x_1, x_2 y x_3, las cuales representan los ingresos del competidor para cada categoría.

EJEMPLO 5 Sustracción de matrices

a.
$$\begin{bmatrix}2&6\\-4&1\\3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-2\\4&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\-4&1\\3&2\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}6&-2\\4&1\\0&3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2&6\\-4&1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6&2\\-4&-1\\0&-3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-6&6+2\\-4-4&1-1\\3+0&2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&8\\-8&0\\3&-1\end{bmatrix}$$

b. Si $A=\begin{bmatrix}6&0\\2&-1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}3&-3\\1&2\end{bmatrix}$, entonces
$$A^{\mathrm{T}}-2B=\begin{bmatrix}6&2\\0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-6\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&8\\-2&-5\end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

EJEMPLO 6 Ecuación matricial

Resuelva la ecuación $2\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$.

Solución:

Estrategia Primero se escribe cada lado de la ecuación como una sola matriz. Después, por la igualdad de matrices, se igualan las entradas correspondientes.

Se tiene
$$2\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\-20\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}2x_1-3\\2x_2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\-20\end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, se debe tener $2x_1 - 3 = 25$, que da $x_1 = 14$; a partir de $2x_2 - 4 = -20$, se obtiene $x_2 = -8$.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 4.2

En los problemas del 1 al 12, realice las operaciones indicadas.

1. $\begin{bmatrix}2&0&-3\\-1&4&0\\1&-6&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-3&4\\-1&6&5\\9&11&-2\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}2&-7\\-6&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&-4\\-2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&7\\7&2\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}2&-3\\5&-9\\-4&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&1\\9&0\\-2&3\end{bmatrix}$

4. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-2&6\\2&10&-12\\0&0&7\end{bmatrix}$

5. $2\begin{bmatrix}2&-1&3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2&0&1\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}2&3&1\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}7&7\end{bmatrix}+66$

7. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $-6\begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 25 \end{bmatrix}$

12. $3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 21 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

En los problemas del 13 al 24, calcule las matrices requeridas si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. $-2C$

14. $-(A - B)$

15. $2(0)$

16. $A - B + C$

17. $3(2A - 3B)$

18. $0(2A + 3B - 5C)$

19. $3(A - C) + 6$

20. $A + (C + B)$

21. $2B - 3A + 2C$

22. $3C - 2B$

23. $\frac{1}{3}A + 3(2B + 5C)$

24. $\frac{1}{2}A - 5(B + C)$

En los problemas del 25 al 28, verifique las ecuaciones para las matrices A, B y C anteriores.

25. $3(A + B) = 3A + 3B$

26. $(2 + 3)A = 2A + 3A$

27. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

28. $k(A - 2B + C) = kA - 2kB + kC$

En los problemas del 29 al 34, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule las matrices indicadas, si esto es posible.

29. $3A + D^T$

30. $(B - C)^T$

31. $2B^T - 3C^T$

32. $2B + B^T$

33. $A + D^T - B$

34. $(D - 2A^T)^T$

35. Exprese la ecuación matricial

$$x\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - y\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo.

36. En forma inversa a la que utilizó en el problema 35, escriba el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$$

como una ecuación matricial.

En los problemas del 37 al 40, resuelva las ecuaciones matriciales.

37. $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

38. $5\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x \\ 3y \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$

40. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2x + 12 - 5y \end{bmatrix}$

41. Producción Una compañía de partes automotrices fabrica distribuidores, bujías y magnetos en dos plantas, I y II. La matriz X representa la producción de las dos plantas para el minorista X y la matriz Y representa la producción de las dos plantas para el minorista Y. Escriba una matriz que represente la producción total alcanzada en las dos plantas para ambos minoristas, donde

$$X = \begin{array}{c} \\ \text{BUJ} \\ \text{SPG} \\ \text{MAG} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 50 \\ 800 & 720 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \qquad Y = \begin{array}{c} \\ \text{BUJ} \\ \text{SPG} \\ \text{MAG} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 960 & 800 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

42. Ventas Sea A la matriz que representa las ventas (en miles) de una compañía de juguetes para tres ciudades, en 2007, y sea B la matriz que representa las ventas para las mismas ciudades en 2009, donde

$$A = \begin{array}{c} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix}$$

Si la compañía compra a un competidor y en 2010 duplica las ventas que consiguió en 2009, ¿cuál es el cambio de las ventas entre 2007 y 2010?

43. Suponga que el precio de los productos A, B y C está dado, en ese orden, por el vector renglón de precios

$$P = [p_A \quad p_B \quad p_C \quad p_D]$$

Si los precios se incrementan en 16%, el vector de los nuevos precios puede obtenerse multiplicando P, ¿por qué escalar?

44. Demuestre que $(A - B)^T = A^T - B^T$. (*Sugerencia:* Utilice la definición de sustracción y las propiedades de la operación de transposición).

En los problemas del 45 al 47, calcule las matrices dadas si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

45. $4A + 3B$

46. $-3(A + 2B) + C$

47. $2(3C - A) + 2B$

4.3 Multiplicación de matrices

Objetivo

Definir la multiplicación de matrices y considerar las propiedades asociadas. Expresar un sistema como una sola ecuación matricial por medio de la multiplicación de matrices.

Además de las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, puede definirse el producto AB de las matrices A y B bajo ciertas circunstancias, a saber, *que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B*. Aunque la siguiente definición de *multiplicación de matrices* no parece ser muy natural, un estudio más minucioso de las matrices lo convencerán de que esta definición es apropiada y extremadamente práctica para las aplicaciones.

Definición

Sea A una matriz de $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. Entonces el producto AB es la matriz de $m \times p$ cuya entrada $(AB)_{ik}$ se obtiene mediante

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \cdots + A_{in}b_{nk}$$

En palabras, $(AB)_{ik}$ se obtiene sumando los productos formados al multiplicar, en orden, cada entrada del renglón i de A por la entrada correspondiente de la columna k de B. Si el número de columnas de A no es igual al número de renglones de B, entonces el producto AB no está definido.

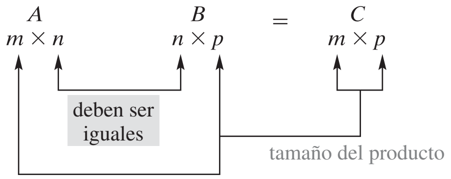
Observe que la definición es aplicable cuando A es un vector renglón con n entradas y B es un vector columna con n entradas. En este caso A es de $1 \times n$, B es de $n \times 1$ y AB es de 1×1. (En la sección 4.1 se especificó que la matriz de 1×1 es solo un *número*). De hecho,

$$\text{Si} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces} \quad AB = \sum_{j=1}^{n} A_jB_j = A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n$$

De regreso a la definición general, ahora es claro que el *número* $(AB)_{ik}$ es el producto del i-ésimo renglón de A y la k-ésima columna de B. Esto resulta muy útil cuando se realizan cálculos reales.

Tres puntos concernientes a la definición anterior de AB deben comprenderse en su totalidad. Primero, el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B. Segundo, el producto AB tendrá tantos renglones como A y tantas columnas como B.



Tercero, la definición se refiere al producto AB, *en ese orden*; A es el factor izquierdo y B el factor derecho. Para AB, se dice que B se *premultiplica* por A, o bien que A se *posmultiplica* por B.

Para aplicar la definición, encontremos el producto de

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene tamaño 2×3 ($m \times n$) y la matriz B tiene tamaño 3×3 ($n \times p$). El número de columnas de A es igual al número de renglones de B ($n = 3$), de modo que el producto AB está definido y será una matriz de 2×3 ($m \times p$); esto es,

$$AB = \begin{bmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} & (AB)_{13} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} & (AB)_{23} \end{bmatrix}$$

La entrada $(AB)_{11}$ se obtiene sumando los productos de cada entrada en el renglón 1 de A y la entrada correspondiente en la columna 1 de B. Así, entradas del renglón 1 de A

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14.$$

entradas de la columna 1 de B

En este paso, se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Aquí puede verse que $(AB)_{11}$ es el producto del primer renglón de A y la primera columna de B. De manera similar, para $(AB)_{12}$, usamos las entradas del renglón 1 de A y las entradas de la columna 2 de B:

entradas del renglón 1 de A

$$c_{12} \quad (2)(0) \quad (1)(4) \quad (\quad 6)(1) = \quad 2.$$

entradas de la columna 2 de B

Ahora se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Para las restantes entradas de AB, se obtiene

$$\begin{aligned} (AB)_{13} &= (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10 \\ (AB)_{21} &= (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3 \\ (AB)_{22} &= (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10 \\ (AB)_{23} &= (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7 \end{aligned}$$

Así,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

Observe que si se invierte el orden de los factores, entonces el producto

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

no está definido, ya que el número de columnas de B *no* es igual al número de renglones de A. Esto muestra que la multiplicación de matrices no es conmutativa. De hecho, para cualesquiera matrices A y B, incluso cuando ambos productos están definidos, en general AB y BA son diferentes. De modo que *el orden en que las matrices estén escritas en un producto es extremadamente importante*.

¡ADVERTENCIA!

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

EJEMPLO 1 Tamaños de matrices y su producto

Sean A una matriz de 3×5 y B una matriz de 5×3. Entonces AB está definida y es una matriz de 3×3. Además, BA también está definida y es una matriz de 5×5.

Si C es una matriz de 3×5 y D una matriz de 7×3, entonces CD no está definida, pero DC sí está definida y es una matriz de 7×5.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 2 Producto de matrices

Calcule el producto de matrices

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como A es de 2×3 y B es de 3×2, el producto AB está definido y tendrá un tamaño de 2×2. Desplazando simultáneamente el dedo índice de la mano izquierda a lo largo de los renglones de A y el dedo índice de la mano derecha a lo largo de las columnas de B, no debe ser difícil determinar mentalmente las entradas del producto. Con esto, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

APLÍQUELO ▶

5. Una librería tiene 100 diccionarios, 70 libros de cocina y 90 catálogos en existencia. Si el valor de cada diccionario es de \$28, de cada libro de cocina \$22 y de cada catálogo \$16, utilice un producto de matrices para determinar el valor total del inventario de la librería.

EJEMPLO 3 Producto de matrices

a. Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Solución: El producto tiene tamaño de 1×1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [32]$$

b. Calcule $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Solución: El producto tiene tamaño de 3×2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

d. $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

¡ADVERTENCIA!

En el ejemplo 4 se muestra que aunque los productos matriciales AB y BA estén definidos y tengan el mismo tamaño, no necesariamente son iguales.

EJEMPLO 4 Producto de matrices

Calcule AB y BA si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: Se tiene

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que aunque ambos productos AB y BA están definidos, y son del mismo tamaño, AB y BA no son iguales.

Ahora resuelva el problema 37 ◁

APLÍQUELO ▶

6. Los precios (por unidad) para tres libros de texto están representados por el vector de precios $P = [26.25 \quad 34.75 \quad 28.50]$. Una librería universitaria hace un pedido de estos libros en las cantidades dadas por el vector columna $Q = \begin{bmatrix} 250 \\ 325 \\ 175 \end{bmatrix}$. Determine el costo total de la compra.

EJEMPLO 5 Vector de costos

Suponga que los precios (por unidad) para los productos A, B y C están representados por el vector de precios

$$\begin{array}{c} \text{Precio de} \\ \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \end{array}$$

$$P = [2 \quad 3 \quad 4]$$

Si las cantidades (en unidades) de A, B y C que se compran están dadas por el vector columna

$$Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{unidades de A} \\ \text{unidades de B} \\ \text{unidades de C} \end{array}$$

entonces, el costo total de las compras está dado por la entrada en el vector de costos

$$PQ = [2 \quad 3 \quad 4] \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 11)] = [73]$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

EJEMPLO 6 Utilidad para una economía

En el ejemplo 3 de la sección 4.2, suponga que en la economía hipotética el precio del carbón es de \$10 000 por unidad, el de la electricidad de \$20 000 por unidad y el del acero de \$40 000 por unidad. Estos precios pueden representarse mediante el vector (columna) de precios:

$$P = \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 20\,000 \\ 40\,000 \end{bmatrix}$$

Considere la industria del acero. En total vende 30 unidades de acero en \$40 000 por unidad y, por lo tanto, su ingreso total es de \$1 200 000. Sus costos para los diferentes bienes están dados por el producto matricial

$$D_S P = [30 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 20\,000 \\ 40\,000 \end{bmatrix} = [400\,000]$$

De modo que la ganancia de la industria del acero es \$1 200 000 − \$400 000 = \$800 000.

Ahora resuelva el problema 67 ◁

La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes, pero siempre y cuando todas las sumas y productos estén definidos:

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $A(BC) = (AB)C$ propiedad asociativa

2. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ propiedades distributivas

EJEMPLO 7 Propiedad asociativa

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule ABC de dos maneras.

Solución: Agrupando BC se obtiene

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$$

De manera alternativa, al agrupar AB resulta

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$$

Observe que $A(BC) = (AB)C$.

◁

EJEMPLO 8 Propiedad distributiva

Verifique que $A(B + C) = AB + AC$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: En el lado izquierdo se tiene

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}$$

En el lado derecho,

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $A(B + C) = AB + AC$.

Ahora resuelva el problema 69 ◁

EJEMPLO 9 Materia prima y costos

Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para cinco casas estilo rústico, siete estilo moderno y 12 estilo colonial. Entonces, sus pedidos pueden representarse mediante el vector renglón

$$Q = [5 \quad 7 \quad 12]$$

Además, suponga que las “materias primas” que se utilizan en cada tipo de casa son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Las entradas de la matriz R siguiente dan el número de unidades de cada materia prima que se utiliza en cada tipo de casa (las entradas no necesariamente reflejan la realidad, pero se eligieron así por conveniencia):

$$\begin{array}{l} \\ \text{Rústico} \\ \text{Moderno} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de obra} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array} = R$$

Cada renglón indica la cantidad de materia prima necesaria para un tipo dado de casa; cada columna indica la cantidad que se requiere de una materia prima dada para cada tipo de casa. Ahora suponga que el contratista desea calcular la cantidad de cada materia prima necesaria para satisfacer todos sus pedidos. Entonces, tal información está dada por la matriz

$$\begin{aligned} QR &= [5 \quad 7 \quad 12] \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \\ &= [146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388] \end{aligned}$$

Así, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio, etcétera.

Al contratista le interesa también conocer los costos que tendrá que pagar por estos materiales. Suponga que el acero cuesta \$2500 por unidad, la madera \$1200 por unidad y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan \$800, \$150 y \$1500 por unidad, respectivamente. Estos datos pueden escribirse como el vector columna de costo

$$C = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Entonces el costo de cada tipo de casa está dado por la matriz

$$RC = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el costo de los materiales para la casa rústica es de \$75 850, para la casa estilo moderno \$81 550 y para la de estilo colonial \$71 650.

El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por

$$QRC = Q(RC) = [5 \quad 7 \quad 12] \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix} = [1\,809\,900]$$

El costo total es de \$1 809 900.

Ahora resuelva el problema 65 ◁

Otra propiedad de las matrices incluye la multiplicación por un escalar y la multiplicación de matrices. Si k es un escalar y el producto AB está definido, entonces

$$k(AB) = (k\mathrm{A})B = A(kB)$$

El producto $k(AB)$ puede escribirse simplemente como kAB. Así,

$$kAB = k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

Por ejemplo,

$$3\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix} = \left(3\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}6 & 3\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}12 & 18\\-6 & 0\end{bmatrix}$$

Existe una propiedad interesante que concierne a la transpuesta de un producto de matrices:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

De manera verbal, la transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden *inverso*.

Esta propiedad puede extenderse para el caso de más de dos factores. Por ejemplo,

Aquí se utiliza el hecho de que $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

$$(A^{\mathrm{T}}BC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A$$

EJEMPLO 10 Transpuesta de un producto

Sean

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Muestre que $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

Solución: Se tiene que

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad (AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}$$

Ahora,

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$$

Así,

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{bmatrix} = (AB)^{\mathrm{T}}$$

por lo que $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

◁

Así como la matriz cero desempeña una función importante como identidad en la suma de matrices, existe una matriz especial, llamada *matriz identidad*, que desempeña una función equivalente en la multiplicación de matrices.

La **matriz identidad** de $n \times n$, denotada por I_n, es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son números 1.

Por ejemplo, las matrices identidad I_3 e I_4 son

$$I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_4 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Cuando el tamaño de una matriz identidad se dé por entendido, se omitirá el subíndice y la matriz solo se denotará mediante I. Debe quedar claro que

$$\boxed{I^{\mathrm{T}} = I}$$

La matriz identidad desempeña la misma función en la multiplicación de matrices que el número 1 en la multiplicación de números reales. Esto es, así como el producto de un número real por 1 es igual al mismo número, el producto de una matriz por la matriz identidad es la propia matriz. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$I\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

En general, si I es de $n \times n$ y A tiene n columnas, entonces $AI = A$. Si B tiene n renglones, entonces $IB = B$. Además, si A es de $n \times n$, entonces

$$\boxed{AI = A = IA}$$

EJEMPLO 11 Operaciones con matrices que incluyen a *I* y a 0

Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule cada una de las matrices siguientes.

a. $I - A$

Solución:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b. $3(A - 2I)$

Solución:

$$\begin{aligned} 3(A - 2I) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c. $A0$

Solución:

$$A0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

En general, si $A0$ y $0A$ están definidos, entonces

$$\boxed{A0 = 0 = 0A}$$

d. AB

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ahora resuelva el problema 55 ◁

Si A es una matriz cuadrada, puede hablarse de una *potencia* de A:

Si A es una matriz cuadrada y p es un entero positivo, entonces la p-ésima potencia de A, que se escribe A^p, es el producto de p factores de A:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{p \text{ factores}}$$

Si A es de tamaño $n \times n$, se define $A^0 = I_n$.

Se hace notar que $I^p = I$.

EJEMPLO 12 **Potencia de una matriz**

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^3.

Solución: Como $A^3 = (A^2)A$ y

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

se tiene

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 45 ◁

Ecuaciones matriciales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse por medio de la multiplicación de matrices. Por ejemplo, considere la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

El producto del lado izquierdo tiene orden 2 × 1, así que es una matriz columna. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, las entradas correspondientes deben ser iguales, de modo que se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

De modo que este sistema de ecuaciones lineales puede definirse mediante la ecuación matricial (1). En general, la ecuación (1) se describe diciendo que tiene la forma

$$AX = B$$

donde A es la matriz obtenida a partir de los coeficientes de las variables, X es una matriz columna obtenida a partir de las variables y B es una matriz columna obtenida de las constantes. La matriz A se denomina *matriz de coeficientes* del sistema.

En la ecuación matricial $AX = B$, observe que la *variable* es el vector columna X. En el ejemplo actual, X es un vector columna de 3 × 1. Una *solución* única de $AX = B$ es un vector columna C, *del mismo tamaño que* X, con la propiedad de que $AC = B$. En el presente ejemplo, una solución única que es un vector columna de 3 × 1 es lo mismo que una tripla ordenada de números. En efecto, si C es un vector columna de $n \times 1$, entonces C^T es un vector renglón de $1 \times n$, lo cual concuerda con la noción de una n-tupla de números. Para un sistema que consta de m ecuaciones lineales con n incógnitas, su representación en la forma $AX = B$ tendrá A, $m \times n$ y B, $m \times 1$. La variable X será entonces un vector columna de

PARA REPASAR las n-tuplas, vea la sección 2.8.

$n \times 1$ y una solución única C será un vector columna de $n \times 1$ completamente determinado por una n-tupla de números.

APLÍQUELO ▶

7. Escriba el siguiente par de rectas en forma matricial, para ello use la multiplicación de matrices.

$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}, y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

EJEMPLO 13 Forma matricial de un sistema utilizando la multiplicación de matrices

Escriba el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ 8x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

en forma matricial utilizando la multiplicación de matrices.

Solución: Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema dado es equivalente a la ecuación matricial

$$AX = B$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 59 ◁

PROBLEMAS 4.3

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *y* $AB = C = [C_{ij}]$, *encuentre lo siguiente.*

1. C_{11} **2.** C_{21} **3.** C_{32}

4. C_{33} **5.** C_{31} **6.** C_{12}

Si A es de 2×3, *B de* 3×1, *C de* 2×5, *D de* 4×3, *E de* 3×2, *y F de* 2×3, *encuentre el tamaño y número de entradas en cada uno de los siguientes ejercicios.*

7. AB **8.** DE **9.** EC

10. DB **11.** FB **12.** BE

13. $EE^{\mathrm{T}}B$ **14.** $E(AE)$ **15.** $E(FB)$

16. $(F + A)B$

Escriba la matriz identidad que tiene el orden siguiente:

17. 5 **18.** 6

En los problemas del 19 al 36, realice las operaciones indicadas.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

22. $[2 \quad 5 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $[1 \quad -2 \quad 5]\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

26. $[1 \quad -4]\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad -3]$

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

29. $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$

32. $2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

En los problemas del 37 al 44, calcule las matrices requeridas si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

37. $F - \frac{1}{2}DI$ **38.** DD **39.** $3A - 2BC$
40. $B(D + E)$ **41.** $3I - \frac{2}{3}FE$ **42.** $CB(D - I)$
43. $(DC)A$ **44.** $A(BC)$

En los problemas del 45 al 58, calcule la matriz requerida, si existe, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

45. A^2 **46.** $A^{\mathrm{T}}A$ **47.** B^4
48. $A(B^{\mathrm{T}})^2C$ **49.** $(AIC)^{\mathrm{T}}$ **50.** $A^{\mathrm{T}}(2C^{\mathrm{T}})$
51. $(BA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ **52.** $(3A)^{\mathrm{T}}$ **53.** $(2I)^2 - 2I^2$
54. $(A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}B)^0$ **55.** $A(I - 0)$ **56.** $I^{\mathrm{T}}0$
57. $(AC)(AC)^{\mathrm{T}}$ **58.** $B^2 - 3B + 2I$

En los problemas del 59 al 61, represente el sistema dado por medio de la multiplicación de matrices.

59. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 9y = 5 \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 5x - y + 2z = 12 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 2r - s + 3t = 9 \\ 5r - s + 2t = 5 \\ 3r - 2s + 2t = 11 \end{cases}$

62. Mensajes secretos Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Suponga que se tiene el código siguiente:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de codificación. Entonces es posible codificar un mensaje al tomar cada vez dos letras del mensaje, convertirlas a sus números correspondientes para crear una matriz de 2 × 1 y luego multiplicar cada matriz por E. Utilice este código para codificar el mensaje en inglés: "play/it/again/sam", dejando las diagonales para separar las palabras.

63. Inventario Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 loros en exhibición. Si el valor de un gatito es de \$55, el de cada perrito de \$150 y el de cada loro de \$35, por medio de la multiplicación de matrices encuentre el valor total del inventario de la tienda de mascotas.

64. Acciones Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C y 250 tipo D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. Escriba un vector renglón que represente el número de acciones compradas de cada tipo. Escriba un vector columna que represente el precio por acción de cada tipo. Utilizando la multiplicación de matrices, encuentre el costo total de las acciones.

65. Costo de construcción En el ejemplo 9, suponga que el contratista debe construir cinco casas estilo rústico, dos estilo moderno y cuatro estilo colonial. Utilizando la multiplicación de matrices, calcule el costo total de la materia prima.

66. Costos En el ejemplo 9 suponga que el contratista desea tomar en cuenta el costo de transportar la materia prima al lugar de la construcción, así como el costo de compra. Suponga que los costos están dados en la matriz siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Compra} & \text{Transporte} \end{array} \\ C = & \begin{bmatrix} 3500 & 50 \\ 1500 & 50 \\ 1000 & 100 \\ 250 & 10 \\ 3500 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Acero} \\ \text{Madera} \\ \text{Vidrio} \\ \text{Pintura} \\ \text{Mano de obra} \end{array} \end{array}$$

(a) A partir del cálculo de RC, encuentre una matriz cuyas entradas proporcionen los costos de compra y de transporte de los materiales para cada tipo de casa.

(b) Encuentre la matriz QRC cuya primera entrada dé el precio de compra total y cuya segunda entrada dé el costo total de transporte.

(c) Sea $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule $QRCZ$**,** la cual proporciona el costo total de materiales y transporte para todas las casas que serán construidas.

67. Realice los siguientes cálculos para el ejemplo 6.

(a) Calcule la cantidad que cada industria y cada consumidor deben pagar por los bienes que reciben.

(b) Calcule la utilidad recibida por cada industria.

(c) Encuentre la cantidad total de dinero que es pagada por todas las industrias y todos los consumidores.

(d) Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) y es pagada por las industrias. Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) que es pagada por los consumidores.

68. Demuestre que si $AB = BA$, entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

69. Muestre que si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

entonces $AB = 0$. Observe que como ni A ni B son la matriz cero, la regla algebraica para los números reales "si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$" no se cumple para las matrices. También puede demostrarse que la ley de cancelación tampoco es cierta para las matrices. Esto es, si $AB = AC$, entonces no necesariamente es cierto que $B = C$.

70. Sean D_1 y D_2 dos matrices diagonales arbitrarias de 3 × 3. Calcule D_1D_2 y D_2D_1 y muestre que:

(a) D_1D_2 y D_2D_1 son matrices diagonales.

(b) D_1 y D_2 *conmutan*, lo cual significa que $D_1D_2 = D_2D_1$.

En los problemas del 71 al 74, calcule las matrices requeridas, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 3.2 & -4.1 & 5.1 \\ -2.6 & 1.2 & 6.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.1 & 4.8 \\ -2.3 & 3.2 \\ 4.6 & -1.4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.5 \\ 2.4 & 6.2 \end{bmatrix}$$

71. $A(2B)$ **72.** $-3.1(CA)$ **73.** $3CA(-B)$ **74.** C^3

Objetivo

Mostrar cómo se reduce una matriz y utilizar la reducción de matrices para resolver un sistema lineal.

4.4 Resolución de sistemas mediante reducción de matrices

En esta sección se ilustrará un método por el cual pueden utilizarse matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En el desarrollo del *método de reducción*, primero se resolverá un sistema por medio del método usual de eliminación. Después se obtendrá la misma solución utilizando matrices.

Considere el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & (1)\\ x + 2y = 5 & (2)\end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y. Aunque este sistema puede resolverse por varios métodos algebraicos, aquí se resolverá mediante uno que es adaptable con facilidad a las matrices.

Por razones que más adelante serán obvias, se comienza por reemplazar la ecuación (1) por la ecuación (2) y la ecuación (2) por la (1), así se obtiene el sistema equivalente, 3, es decir, solo se intercambian las ecuaciones y esto obviamente no cambia la solución del sistema,[3]

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (3)\\ 3x - y = 1 & (4)\end{cases}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3) por -3 se obtiene $-3x-6y = -15$. Sumando los lados izquierdo y derecho de esta ecuación a los correspondientes de la ecuación (4), se obtiene un sistema equivalente en el que x se elimina de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (5)\\ 0x - 7y = -14 & (6)\end{cases}$$

Ahora se eliminará y de la primera ecuación. Multiplicando ambos lados de la ecuación (6) por $-\frac{1}{7}$ se obtiene el sistema equivalente,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & (7)\\ 0x + y = 2 & (8)\end{cases}$$

De la ecuación (8), $y = 2$ y, por lo tanto, $-2y = -4$. Sumando los lados de $-2y = -4$ a los correspondientes de la ecuación (7), se obtiene el sistema equivalente,

$$\begin{cases} x + 0y = 1\\ 0x + y = 2\end{cases}$$

Por lo tanto, $x = 1$ y $y = 2$, de modo que el sistema original está resuelto.

Observe que en la resolución del sistema original se estuvo reemplazando de manera sucesiva a este por un sistema equivalente, el cual se obtenía al realizar una de las tres operaciones siguientes (llamadas *operaciones elementales*) que dejan la solución sin cambio:

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero.
3. Suma de un múltiplo constante de los lados de una ecuación a los correspondientes lados de otra ecuación.

Antes de mostrar un método matricial para resolver el sistema original,

$$\begin{cases} 3x - y = 1\\ x + 2y = 5\end{cases}$$

primero es necesario definir algunos términos. Recuerde de la sección 4.3 que la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

---

[3] Recuerde que dos o más sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

es la **matriz de coeficientes** de este sistema. En la primera columna, las entradas corresponden a los coeficientes de las x en las ecuaciones. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la primera ecuación, y la entrada en el segundo renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la segunda ecuación. En forma análoga, las entradas en la segunda columna corresponden a los coeficientes de las y.

Otra matriz asociada con este sistema es la llamada **matriz de coeficientes aumentada** y está dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

La primera y segunda columnas son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz de coeficientes. Las entradas en la tercera columna corresponden a los términos constantes del sistema: la entrada en el primer renglón de esta columna es el término constante de la primera ecuación, mientras que la entrada en el segundo renglón es el término constante de la segunda ecuación. Aunque no es necesario incluir la línea vertical en la matriz de coeficientes aumentada, sirve para recordar que el 1 y el 5 son los términos constantes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. La matriz de coeficientes aumentada describe por completo el sistema de ecuaciones.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema original involucra varios sistemas equivalentes. A cada uno de estos sistemas se le puede asociar su matriz de coeficientes aumentada. A continuación se listan los sistemas implicados junto con sus correspondientes matrices de coeficientes aumentadas, mismas que se han marcado como A, B, C, D y E:

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 1 \\ \ \ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = A$$

$$\begin{cases} \ \ x + 2y = 5 \\ 3x - \ \ y = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] = B$$

$$\begin{cases} \ \ x + 2y = \ \ \ 5 \\ 0x - 7y = -14 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] = C$$

$$\begin{cases} \ \ x + 2y = 5 \\ 0x + \ \ y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = D$$

$$\begin{cases} \ \ x + 0y = 1 \\ 0x + \ \ y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = E$$

Ahora se verá cómo están relacionadas estas matrices.

La matriz B puede obtenerse a partir de A al intercambiar el primero y segundo renglones de A. Esta operación corresponde al intercambio de dos ecuaciones en el sistema original.

La matriz C puede obtenerse a partir de B sumando, a cada entrada del segundo renglón de B, -3 veces la entrada correspondiente del primer renglón de B:

$$\begin{aligned} C &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 + (-3)(1) & -1 + (-3)(2) & 1 + (-3)(5) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Esta operación se describe como la suma de -3 veces el primer renglón de B con el segundo renglón de B.

La matriz D puede obtenerse a partir de C multiplicando cada entrada del segundo renglón de C por $-\frac{1}{7}$. Esta operación se describe como la multiplicación del segundo renglón de C por $-\frac{1}{7}$.

La matriz E puede obtenerse a partir de D sumando -2 veces el segundo renglón de D al primer renglón de D.

Observe que E, que proporciona la solución, se obtuvo a partir de A al realizar de manera sucesiva una de tres operaciones matriciales, llamadas **operaciones elementales con renglones**:

Operaciones elementales con renglones

1. Intercambio de dos renglones de una matriz.
2. Multiplicación de un renglón de una matriz por un número distinto de cero.
3. Suma de un múltiplo de un renglón de una matriz a un renglón diferente de esa matriz.

Estas operaciones elementales con renglones corresponden a las tres operaciones elementales utilizadas en el método algebraico de eliminación. Cuando una matriz pueda obtenerse a partir de otra mediante una o más de las operaciones elementales con renglones, se dice que las matrices son **equivalentes**. Así, A y E son equivalentes (también podría obtenerse A a partir de E realizando operaciones similares con renglones en el sentido opuesto, de modo que el término *equivalente* es apropiado). Cuando se describan operaciones elementales con renglones particulares, por conveniencia se utilizará la notación siguiente:

Notación	Operación con renglón correspondiente
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar los renglones R_i y R_j.
kR_i	Multiplicar el renglón R_i por la constante k distinta de cero.
$kR_i + R_j$	Sumar k veces el renglón R_i al renglón R_j (pero el renglón R_i permanece sin cambio).

Por ejemplo, escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

significa que la segunda matriz se obtuvo a partir de la primera al sumar -4 veces el renglón 1 al renglón 2. Observe que puede escribirse $(-k)R_i$ como $-kR_i$.

Ahora es posible describir un procedimiento matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Primero, se forma la matriz de coeficientes aumentada del sistema; después, por medio de operaciones elementales con renglones, se determina una matriz equivalente que indique claramente la solución. Especificando con mayor precisión lo que quiere decirse con una matriz que *indique claramente la solución*, ésta es una matriz, llamada *matriz reducida*, que se definirá más adelante en esta misma página. Es conveniente definir primero un **renglón cero** de una matriz como un renglón que consiste *completamente* en ceros. Un renglón que no es un renglón cero, lo cual significa que contiene *al menos una* entrada distinta de cero, se llamará **renglón diferente de cero**. La primera entrada distinta de cero en un renglón diferente de cero se llama **entrada principal**.

Matriz reducida

Se dice que una matriz es una **matriz reducida** cuando todas las afirmaciones siguientes son ciertas:

1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.
2. Para cada renglón diferente de cero, la entrada principal es 1 y todas las otras entradas en la *columna* donde aparece la entrada principal son ceros.
3. La entrada principal en cada renglón está a la derecha de la entrada principal de cualquier renglón que esté arriba de él.

Puede mostrarse que cada matriz es equivalente a *exactamente una* matriz reducida. Para resolver el sistema, es necesario encontrar *la* matriz reducida tal que la matriz de coeficientes aumentada del sistema sea equivalente a ella. En el estudio previo de operaciones elementales con renglones, la matriz

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

es una matriz reducida.

EJEMPLO 1 Matrices reducidas

Para cada una de las matrices que se muestran a continuación, determine si es reducida o no.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

a. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón no es 1.

b. Es una matriz reducida.

c. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón no se encuentra a la derecha de la entrada principal del primer renglón.

d. Es una matriz reducida.

e. No es una matriz reducida porque el segundo renglón, que es un renglón cero, no está en la parte inferior de la matriz.

f. Es una matriz reducida.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Reducción de una matriz

Reduzca la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Estrategia Para reducir la matriz, debe hacerse que la entrada principal sea 1 en el primer renglón, 1 en el segundo renglón y así sucesivamente hasta llegar a un renglón cero, si lo hay. Además, debe trabajarse de izquierda a derecha porque la entrada principal de cada renglón debe encontrarse a la *izquierda* de todas las otras entradas principales en los renglones de *abajo*.

Solución: Como no existen renglones cero para desplazarlos a la parte inferior, se procederá a encontrar la primera columna que tenga una entrada distinta de cero; resulta ser la columna 1. Esto significa que, en la matriz reducida, el 1 inicial en el primer renglón estará en la columna 1. Para empezar, se intercambiarán los primeros dos renglones de modo que la entrada diferente de cero esté en el primer renglón de la columna 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica el renglón 1 por $\frac{1}{3}$ de modo que la entrada principal sea un 1:

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora, como deben tenerse ceros abajo (y arriba) de cada entrada principal, se suma -6 veces el renglón 1 al renglón 3:

$$\xrightarrow{-6R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Después, se avanza hacia la derecha de la columna 1 para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 2, o bien debajo de él; se trata de la columna 3. Esto significa que, en la matriz reducida, el 1 inicial en el segundo renglón debe estar en la columna 3. La matriz anterior ya tiene el 1 ahí. Así, todo lo que se necesita para obtener ceros abajo y arriba del 1 es sumar una vez el renglón 2 al renglón 1 y sumar −8 veces el renglón 2 al renglón 3:

$$\xrightarrow[-8R_2+R_3]{(1)R_2+R_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

De nuevo, se avanza hacia la derecha para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 3; resulta ser la columna 4. Para hacer la entrada principal igual a 1, se multiplica el renglón 3 por $-\frac{1}{5}$:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

¡ADVERTENCIA!

La secuencia de pasos que se utiliza para reducir una matriz no es única; sin embargo, la forma reducida *sí* es única.

Por último, para hacer todas las demás entradas de la columna 4 iguales a cero, se suma −2 veces el renglón 3 a los renglones 1 y 2:

$$\xrightarrow[-2R_3+R_2]{-2R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

La última matriz está en forma reducida.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

El método de reducción descrito para resolver el sistema original puede generalizarse a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Resolver un sistema como

$$\begin{cases}A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = B_1\\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = B_2\\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\ \ \cdot\\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\ \ \cdot\\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\ \ \cdot\\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = B_m\end{cases}$$

implica:

1. determinar la matriz de coeficientes aumentada del sistema, que es

$$\left[\begin{array}{cccc|c}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & B_1\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & B_2\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & B_m\end{array}\right]$$

y

2. determinar *la* matriz reducida tal que la matriz de coeficientes aumentada sea equivalente.

Con frecuencia, el paso 2 es llamado *reducción de la matriz de coeficientes aumentada*.

APLÍQUELO ▶

8. Una compañía de inversiones ofrece tres portafolios de acciones: A, B y C. El número de bloques de cada tipo de acciones en cada uno de estos portafolios se resume en la tabla siguiente:

		Portafolio		
		A	B	C
Riesgo:	Alto	6	1	3
	Moderado	3	2	3
	Bajo	1	5	3

Un cliente quiere 35 bloques de acciones de alto riesgo, 22 bloques de riesgo moderado y 18 bloques de acciones de bajo riesgo. ¿Cuántos bloques de acciones de cada portafolio deben sugerirse?

EJEMPLO 3 Resolución de un sistema por reducción

Utilizando la reducción de matrices, resuelva el sistema

$$\begin{cases}2x + 3y = -1\\ 2x + \ \ y = \ \ 5\\ \ \ x + \ \ y = \ \ 1\end{cases}$$

Solución: Al reducir la matriz de coeficientes aumentada del sistema, se tiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz está reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 0y = 4 \\ 0x + y = -3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Como el sistema original es equivalente a este sistema, tiene una solución única, a saber

$$x = 4$$

$$y = -3$$

Ahora resuelva el problema 13 ◁

APLÍQUELO ▶

9. Un servicio de *spa* cuida la salud de sus clientes personalizando la dieta y los suplementos vitamínicos de cada uno de ellos. El *spa* ofrece tres diferentes suplementos vitamínicos, cada uno con diferentes porcentajes de la cantidad diaria recomendada (CDR) de vitaminas A, C y D. Una tableta de suplemento X proporciona 40% de la CDR de A, 20% de la CDR de C y 10% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Y proporciona 10% de la CDR de A, 10% de la CDR de C y 30% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Z proporciona 10% de la CDR de A, 50% de la CDR de C y 20% de la CDR de D. El personal del *spa* determina que una cliente debe tomar 180% de la CDR de vitamina A, 200% de CDR de la vitamina C y 190% de la CDR de la vitamina D, diariamente. ¿Cuántas tabletas de cada suplemento debe tomar la cliente cada día?

EJEMPLO 4 Solución de un sistema por reducción

Utilice la reducción de matrices para resolver

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 6 = 0 \\ 2z + y - 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución: Al escribir nuevamente el sistema de modo que las variables estén alineadas y los términos constantes aparezcan en los lados derechos de las ecuaciones, se tiene

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6 \\ y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Reduciendo la matriz aumentada, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(1)R_2 + R_3]{-2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

La última matriz está reducida y corresponde a

$$\begin{cases}\quad x = 0\\ y+2z=0\\ \quad 0=1\end{cases}$$

Como $0 \neq 1$, no existen valores de x, y y z para los cuales todas las ecuaciones sean satisfechas de manera simultánea. Por lo tanto, el sistema original no tiene solución.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

Cada vez que se obtenga un renglón con ceros en el lado izquierdo de la línea vertical y una entrada diferente de cero a la derecha, no existe solución.

APLÍQUELO ▶

10. Una veterinaria zootecnista puede comprar alimento para animales de cuatro diferentes tipos: A, B, C y D. Cada alimento viene en el mismo tamaño de bolsa y la cantidad de gramos de cada uno de tres nutrimentos incluidos en cada bolsa se resume en la tabla siguiente:

		Alimento			
		A	B	C	D
	N_1	5	5	10	5
Nutrimento	N_2	10	5	30	10
	N_3	5	15	10	25

Para cierto animal, la veterinaria determina que necesita combinar las bolsas para obtener 10 000 g de N_1, 20 000 g de N_2 y 20 000 g de N_3. ¿Cuántas bolsas de cada tipo de alimento debe ordenar?

EJEMPLO 5 Forma paramétrica de una solución

Utilice la reducción de matrices para resolver

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10\\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = \ \ 2\\ 3x_1 \qquad\quad - 3x_3 + 6x_4 = \ \ 9\end{cases}$$

Solución: Al reducir la matriz de coeficientes aumentada, se tiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&3&2&6&10\\0&1&2&1&2\\3&0&-3&6&9\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{3}{2}&1&3&5\\0&1&2&1&2\\3&0&-3&6&9\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{3}{2}&1&3&5\\0&1&2&1&2\\0&-\frac{9}{2}&-6&-3&-6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R_2+R_3]{-\frac{3}{2}R_2+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&\frac{3}{2}&2\\0&1&2&1&2\\0&0&3&\frac{3}{2}&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&\frac{3}{2}&2\\0&1&2&1&2\\0&0&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_3+R_2]{2R_3+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{5}{2}&4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right]$$

Esta matriz está reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases}x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 4\\ \qquad\quad x_2 = 0\\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = 4 - \tfrac{5}{2}x_4 \tag{9}$$

$$x_2 = 0 \tag{10}$$

$$x_3 = 1 - \tfrac{1}{2}x_4 \tag{11}$$

El sistema no impone restricciones sobre x_4, de manera que esta variable puede tomar *cualquier* valor real. Si se agrega

$$x_4 = x_4 \tag{12}$$

a las ecuaciones anteriores, entonces se habrán expresado las cuatro incógnitas en términos de x_4 y esto es la solución *general* del sistema original.

Para cualquier valor particular de x_4, las ecuaciones de la (9) a la (12) determinan una solución *particular* para el sistema original. Por ejemplo, si $x_4 = 0$, entonces una solución *particular* es

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = 0$$

Si $x_4 = 2$, entonces

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

es otra solución particular. Como hay una cantidad infinita de posibilidades para x_4, existe un número infinito de soluciones para el sistema original.

Recuerde que, si se desea, es posible escribir $x_4 = r$ y hacer referencia a esta nueva variable r como un *parámetro*. (Sin embargo, no hay nada especial acerca del nombre r de manera que podría considerarse a x_4 como el parámetro del cual dependen *todas* las variables originales. Observe que es posible escribir $x_2 = 0 + 0x_4$ y $x_4 = 0 + 1x_4$). Si se denota el parámetro mediante r, la solución del sistema original está dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - \tfrac{5}{2}r \\ x_2 &= 0 + 0r \\ x_3 &= 1 - \tfrac{1}{2}r \\ x_4 &= 0 + 1r \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real y se dice que se tiene una *familia* de soluciones *con un parámetro.* Ahora, con el conocimiento de la suma de matrices y la multiplicación por un escalar, se puede decir un poco más acerca de tales familias. Observe que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los lectores familiarizados con la geometría analítica verán que las soluciones forman una *recta* en el espacio $x_1x_2x_3x_4$, la cual pasa a través del *punto* $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y en la *dirección* del segmento de recta que une a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Los ejemplos del 3 al 5 ilustran el hecho de que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

PROBLEMAS 4.4

En los problemas del 1 al 6, determine si la matriz es reducida o no.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los problemas del 7 al 12, reduzca la matriz dada.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Resuelva los sistemas de los problemas del 13 al 26 por el método de reducción.

13. $\begin{cases} 2x - 7y = 50 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 12x + 4y = 2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 7y = 4 \\ x + 5y + z = 5 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \\ x - y - 5z = 23 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 4z = 8 \\ x - 2y - 2z = 14 \\ x + y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 11z = 1 \\ x + y + 4z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Resuelva los problemas del 27 al 33 utilizando la reducción de matrices

27. Impuestos Una compañía tiene ingresos gravables por \$312 000. El impuesto federal es 25% de la parte que resta después de pagar el impuesto estatal. El impuesto estatal es 10% de la parte que resta después de pagar el impuesto federal. Encuentre el monto de los impuestos federal y estatal de la compañía.

28. Toma de decisiones Un fabricante elabora dos productos, A y B. Por cada unidad que vende de A la ganancia es de \$8 y por cada unidad que vende de B la ganancia es de \$11. Con base en la experiencia, se ha encontrado que puede venderse 25% más de A que de B. Para el año próximo, el fabricante desea una ganancia total de \$42 000. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender?

29. Programa de producción Un fabricante produce tres artículos: A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17 000 por año y los costos de producción por cada unidad son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. El año siguiente se producirán y venderán un total de 11 000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad total de \$25 000. Si el costo total será de \$80 000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?

30. Asignación de producción La compañía Escritorios Nacionales tiene plantas para la producción de escritorios en la costa Este y en la costa Oeste de Estados Unidos. En la planta de la costa Este, los costos fijos son de \$20 000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de \$90. En la planta de la costa Oeste, los costos fijos son de \$18 000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de \$95. El año próximo, la compañía quiere producir un total de 800 escritorios. Determine la orden de producción para cada una de las plantas el siguiente año si el costo total para cada planta debe ser el mismo.

31. Vitaminas A una persona el doctor le prescribió tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.

(a) Encuentre todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionen de manera exacta las cantidades requeridas.

(b) Si cada píldora de la marca X cuesta 1 centavo; de la marca Y 6 centavos y de la marca Z 3 centavos, ¿existe alguna combinación del inciso (a) que cueste exactamente 15 centavos por día?

(c) ¿Cuál es la combinación menos cara del inciso (a)? ¿La más cara?

32. Producción Una compañía produce tres artículos. A, B y C, que requiere se procesen en tres máquinas I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada producto por las tres máquinas está dado en la tabla siguiente:

	A	B	C
I	3	1	2
II	1	2	1
III	2	4	1

La máquina I está disponible 440 horas, la II durante 310 horas y la III 560 horas. Encuentre cuántas unidades de cada artículo deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas.

33. Inversiones Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión, estándar (E), de lujo (D) y Gold Star (G). Cada unidad de E tiene 12 acciones tipo A, 16 tipo B y 8 tipo C. Cada unidad de D tiene 20 acciones tipo A, 12 tipo B y 28 de C. Cada unidad de G tiene 32 acciones tipo A, 28 tipo B y 36 de C. Suponga que un inversionista desea comprar exactamente 220 acciones tipo A, 176 tipo B y 264 tipo C combinando unidades de los tres fondos.

(a) Determine las combinaciones de unidades E, D y G que satisfagan exactamente los requerimientos del inversionista.

(b) Suponga que cada unidad de E cuesta al inversionista $300, cada unidad D $400 y cada unidad G $600. ¿Cuál de las combinaciones del inciso (a) minimizará el costo total del inversionista?

Objetivo

Centrar la atención en sistemas no homogéneos que incluyan más de un parámetro en su solución general, así como resolver y considerar la teoría de los sistemas homogéneos.

4.5 Resolución de sistemas mediante reducción de matrices (*continuación*)

Tal como se vio en la sección 4.4, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. Cuando existe un número infinito de soluciones, la solución general se expresa en términos de al menos un parámetro. En el ejemplo 5, la solución general se dio en términos del parámetro r:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - \tfrac{5}{2}r \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 - \tfrac{1}{2}r \\ x_4 &= r \end{aligned}$$

En ocasiones, es necesario más de un parámetro, como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Familia de soluciones con dos parámetros

Utilizando la reducción de matrices, resuelva

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Solución: La matriz de coeficientes aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

cuya forma reducida es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De aquí, se tiene que

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

a partir de lo cual

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 &= -2 - 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Como no hay restricción sobre x_3 ni sobre x_4, pueden ser cualesquiera números reales, lo que resulta es una familia paramétrica de soluciones. Haciendo $x_3 = r$ y $x_4 = s$, puede obtenerse la solución del sistema dado como

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - r - 3s \\ x_2 &= -2 - 2r - s \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \end{aligned}$$

donde los parámetros r y s pueden ser cualquier número real. Asignando valores específicos a r y s, se obtienen soluciones particulares. Por ejemplo, si $r = 1$ y $s = 2$, entonces la solución particular correspondiente es $x_1 = -6$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$. Igual que en el caso de un parámetro, es posible profundizar más y escribir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que puede mostrarse para exhibir la familia de soluciones como un *plano* a través de $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en el espacio $x_1x_2x_3x_4$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Es común clasificar a un sistema de ecuaciones lineales como *homogéneo* o *no homogéneo*, dependiendo de si todos los términos constantes son o no iguales a cero.

Definición
El sistema

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = B_2 \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = B_m \end{cases}$$

se llama ***sistema homogéneo*** si $B_1 = B_2 = \cdots = B_m = 0$. El sistema es un ***sistema no homogéneo*** si al menos una de las B_i no es igual a 0.

EJEMPLO 2 Sistemas no homogéneos y homogéneos

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es no homogéneo debido al 4 de la primera ecuación. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es homogéneo.

◁

Si el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

se resolviera por el método de reducción, la matriz aumentada se escribiría primero como:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que la última columna consiste solo en ceros. Esto es común en la matriz de coeficientes aumentada de cualquier sistema homogéneo. Esta matriz se reduciría utilizando las operaciones elementales con renglones:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La última columna de la matriz reducida también contiene solo ceros. Esto no ocurre por casualidad. Cuando cualquiera de las operaciones elementales con renglones se realiza sobre una matriz que tiene una columna consistente solo en ceros, también la columna correspondiente de la matriz resultante tiene solamente ceros. Cuando se resuelve un sistema homogéneo por reducción de matrices, por conveniencia, se acostumbra eliminar la última columna de la matriz involucrada. Esto es, se reducirá solo la *matriz de coeficientes* del sistema. Para el sistema anterior se tendría

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí, la matriz reducida, llamada *matriz de coeficientes reducida*, corresponde al sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = 0 \\ 0x + \quad y = 0 \end{cases}$$

de modo que la solución es $x = 0$ y $y = 0$.

Ahora se considerará el número de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad \cdot \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, siempre ocurre una solución puesto que cada ecuación se satisface para estos valores. Esta solución, llamada **solución trivial**, es una solución de *todo* sistema homogéneo y se deduce de la ecuación matricial.

$$A0_n = 0_m$$

donde 0_n es el vector columna de $n \times 1$ (y 0_m es el vector columna de $m \times 1$).

Existe un teorema que permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones. El teorema está basado en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz reducida del sistema. Recuerde que un *renglón diferente de cero* es un renglón que no consiste solo en ceros.

Teorema

Sea A la matriz de coeficientes *reducida* de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si A tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además,

1. si $k < n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones y

2. si $k = n$, el sistema tiene una solución única (la solución trivial).

Si un sistema homogéneo consiste en m ecuaciones con n incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema tiene un tamaño de $m \times n$. Por lo tanto, si $m < n$ y k es el número de renglones diferentes de cero en la matriz de coeficientes reducida, entonces $k \leq m$ y, por consiguiente, $k < n$. Por el teorema precedente, el sistema debe tener un número infinito de soluciones. En consecuencia, se tiene el siguiente corolario.

Corolario

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas tiene un número infinito de soluciones.

¡ADVERTENCIA!

El teorema y el corolario anteriores solo se aplican a sistemas **homogéneos** de ecuaciones lineales. Por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

el cual consiste en dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. **No es posible** concluir que este sistema tiene un número infinito de soluciones, puesto que no es homogéneo. De hecho, debe comprobarse que este sistema no tiene solución.

EJEMPLO 3 Número de soluciones de un sistema homogéneo

Determine si el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones.

Solución: Hay dos ecuaciones en este sistema homogéneo y este número es menor que el número de incógnitas (tres). Así, por el corolario anterior, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 4 Resolución de sistemas homogéneos

Determine si los sistemas homogéneos siguientes tienen solución única o un número infinito de soluciones, después resuelva los sistemas.

a. $$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución: Al reducir la matriz de coeficientes, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El número de renglones diferentes de cero, 2, que hay en la matriz de coeficientes reducida es menor que el número de incógnitas, 3, presentes en el sistema. Por el teorema anterior, concluimos que existe un número infinito de soluciones.

Como la matriz de coeficientes reducida corresponde a

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

la solución puede estar dada en forma paramétrica por

$$x = -3r$$

$$y = -r$$

$$z = r$$

donde r es cualquier número real.

b. $$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

APLÍQUELO ▶

11. En el espacio tridimensional, un plano puede escribirse como $ax + by + cz = d$. Es posible determinar las intersecciones probables que tengan esta forma escribiéndolas como sistemas de ecuaciones lineales y empleando la reducción para resolverlas. Si en cada ecuación $d = 0$, entonces se tiene un sistema homogéneo con solución única o con un número infinito de soluciones. Determine si la intersección de los planos

$$5x + 3y + 4z = 0$$

$$6x + 8y + 7z = 0$$

$$3x + 1y + 2z = 0$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones; después resuelva el sistema.

Solución: Reduciendo la matriz de coeficientes, se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El número de renglones diferentes de cero (2) que hay en la matriz de coeficientes reducida es igual al número de incógnitas presentes en el sistema. Por el teorema, el sistema debe tener solución única, a saber, la solución trivial $x = 0$, $y = 0$.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

PROBLEMAS 4.5

En los problemas del 1 al 8, resuelva los sistemas por reducción de matrices.

1. $\begin{cases} w + x - y - 9z = -3 \\ 2w + 3x + 2y + 15z = 12 \\ 2w + x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2w + x + 10y + 15z = -5 \\ w - 5x + 2y + 15z = -10 \\ w + x + 6y + 12z = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3w - x - 3y - z = -2 \\ 2w - 2x - 6y - 6z = -4 \\ 2w - x - 3y - 2z = -2 \\ 3w + x + 3y + 7z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} w + x + 5z = 1 \\ w + y + 2z = 1 \\ w - 3x + 4y - 7z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} w - 3x + y - z = 5 \\ w - 3x - y + 3z = 1 \\ 3w - 9x + y + z = 11 \\ 2w - 6x - y + 4z = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} w + x + y + 2z = 4 \\ 2w + x + 2y + 2z = 7 \\ w + 2x + y + 4z = 5 \\ 3w - 2x + 3y - 4z = 7 \\ 4w - 3x + 4y - 6z = 9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

Para los problemas del 9 al 14, determine si el sistema tiene un número infinito de soluciones o solamente la solución trivial. No resuelva los sistemas.

9. $\begin{cases} 1.06x + 2.3y - 0.05z = 0 \\ 1.055x - 0.6y + 0.09z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5w + 7x - 2y - 5z = 0 \\ 7w - 6x + 9y - 5z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 5y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 3y + 12z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ 4x + y + 14z = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases}$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas.

15. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 8x - 20y = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + 7y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 14z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ -5y - 10z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \\ 3x + y + 13z = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} w + x + y + 4z = 0 \\ w + x + 5z = 0 \\ 2w + x + 3y + 4z = 0 \\ w - 3x + 2y - 9z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0 \\ w - 2x - y + z = 0 \\ w + 2x + 3y + 9z = 0 \\ 2w - 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

4.6 Inversas

Objetivo

Determinar la inversa de una matriz invertible y utilizar las inversas para resolver sistemas.

Se ha visto que el método de reducción es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero eso no significa que sea el único método que utiliza matrices. En esta sección, se estudiará un método diferente que se aplica a *ciertos* sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

En la sección 4.3, se mostró cómo puede escribirse un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial como una sola ecuación matricial $AX = B$**,** donde A es la matriz de coeficientes. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

puede escribirse en la forma matricial $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una motivación para lo que ahora estamos considerando proviene de la inspección del procedimiento de solución de la ecuación algebraica $ax = b$. La última ecuación se resuelve simplemente al multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo de a. [Recuerde que el inverso multiplicativo de un número a diferente de cero está denotado por a^{-1} (que es $1/a$) y tiene la propiedad de que $a^{-1}a = 1$]. Por ejemplo, si $3x = 11$, entonces

$$3^{-1}(3x) = 3^{-1}(11) \quad \text{de modo que} \quad x = \frac{11}{3}$$

Si se puede aplicar un procedimiento similar a la ecuación *matricial*

$$AX = B \tag{1}$$

entonces se necesita un inverso multiplicativo de A —esto es, una matriz C tal que $CA = I$—. Si se tiene esa C, entonces basta con multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por C para obtener

$$\begin{aligned} C(AX) &= CB \\ (CA)X &= CB \\ IX &= CB \\ X &= CB \end{aligned}$$

Esto muestra que ***si*** existe una solución de $AX = B$, ***entonces*** la única solución posible es la matriz CB. Puesto que se sabe que una ecuación matricial puede no tener soluciones, tener una sola solución o tener un número infinito de soluciones, se observa inmediatamente que esta estrategia no puede funcionar a menos que la matriz tenga una solución única. Para que CB sea realmente una solución, se requiere que $A(CB) = B$, lo cual es igual a exigir que $(AC)B = B$. Sin embargo, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, el supuesto de que $CA = I$ no indica que $AC = I$. Consideremos, por ejemplo, los productos matriciales siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1] = I_1 \qquad \text{pero} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$$

Sin embargo, si A y C son matrices cuadradas del mismo orden n, puede probarse que $AC = I_n$ se deduce de $CA = I_n$ por lo que, *en este caso*, es posible terminar el argumento anterior y concluir que CB es una solución, necesariamente la única, de $AX = B$. Para una matriz cuadrada A, cuando existe una matriz C que satisface $CA = I$, necesariamente C también es cuadrada y del mismo tamaño que A y se dice que es una *matriz inversa* (o simplemente una *inversa*) de A.

Definición

Si A es una matriz cuadrada y existe una matriz C tal que $CA = I$, entonces C se denomina como una ***inversa*** de A y se dice que A es ***invertible***.

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Como

$$CA = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

la matriz C es una inversa de A.

◁

Puede demostrarse que una matriz invertible tiene una y solo una inversa; esto es, la inversa es única. Así, en el ejemplo 1, la matriz C es la *única* matriz tal que $CA = I$.

APLÍQUELO ▶

12. Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Suponga que se tiene el código siguiente:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea E la matriz de codificación. Entonces es posible codificar un mensaje al tomar cada vez dos letras del mensaje, convertirlas a sus números correspondientes creando una matriz de 2×1 y luego multiplicar cada matriz por E. El mensaje puede descifrarse mediante una matriz de decodificación que es la inversa de la matriz de codificación —esto es, E^{-1}—. Determine si las matrices de codificación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

son inversas entre sí.

Por esta razón, puede hablarse de *la* inversa de una matriz invertible A, la cual se denota por el símbolo A^{-1}. De acuerdo con esto, $A^{-1}A = I$. Además, aunque la multiplicación matricial por lo general no es conmutativa, es un hecho que A^{-1} *conmuta con* A:

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

De regreso a la ecuación matricial $AX = B$, a partir de la ecuación (1) puede establecerse lo siguiente:

> Si A es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $AX = B$ tiene la solución única $X = A^{-1}B$.

Es probable que la idea de una matriz inversa le deje a usted la impresión de ya haberla visto. En la sección 2.4 se estudiaron las funciones inversas, las cuales podrían usarse para entender a mayor profundidad las matrices inversas. Sea $\mathbf{R}^n$ el conjunto de matrices columna de $n \times 1$ (y $\mathbf{R}^m$ el conjunto de matrices columna de $m \times 1$). Si A es una matriz de $m \times n$, entonces $f(X) = AX$ define una función $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Si $m = n$, puede mostrarse que la función dada por $f(X) = AX$ tiene una inversa, en el sentido de la sección 2.4, si y solo si A tiene una matriz inversa A^{-1}, en cuyo caso $f^{-1}(X) = A^{-1}X$.

Solo hay una precaución que debe tomarse aquí. En general, para que una función f tenga una inversa, digamos g, se requiere que *tanto* $g \circ f = I$ *como* $f \circ g = I$, donde I es la función identidad. Es un hecho bastante especial acerca de las matrices que $CA = I$ implique $AC = I$.

¡ADVERTENCIA!

Para las *funciones* en general, $g \circ f = I$ no implica que $f \circ g = I$.

> Si f es una función que tiene una inversa, entonces cualquier ecuación de la forma $f(x) = b$ tiene una solución única, a saber, $x = f^{-1}(b)$.

EJEMPLO 2 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 = 18 \end{cases}$$

Solución: En forma matricial, se tiene $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 1, se mostró que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

APLÍQUELO ▶

13. Suponga que la matriz de codificación $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ se utilizó para codificar un mensaje. Utilice el código del recuadro aplíquelo 1 y la inversa $E^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$ para decodificar el mensaje que está dividido en las siguientes partes:

28, 46, 65, 90

61, 82

59, 88, 57, 86

60, 84, 21, 34, 76, 102

Con el fin de aplicar el método del ejemplo 2 a un sistema, se deben cumplir dos condiciones:

1. El sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
2. La matriz de coeficientes debe ser invertible.

En lo que concierne a la condición 2, es necesario tener en cuenta que no todas las matrices cuadradas (*distintas de la matriz cero*) son invertibles. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para *cualesquiera* valores de a, b, c y d. De modo que no existe matriz que posmultiplicada por A produzca la matriz identidad. Por lo tanto, A no es invertible.

Existe un procedimiento mecánico interesante que permite determinar de manera simultánea si una matriz es invertible o no *y* encontrar su inversa si es que ésta existe. El procedimiento se basa en una observación cuya demostración puede llegar demasiado lejos. Primero, recuerde que para una matriz A existe una sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de operaciones elementales con renglones que, cuando se aplican sobre A, producen una matriz reducida. En otras palabras, se tiene

$$A \xrightarrow{E_1} A_1 \xrightarrow{E_2} A_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{E_k} A_k$$

donde A_k es una matriz reducida. También recuerde que A_k es única y está determinada solo por A (aunque puede haber muchas sucesiones de longitud variable de operaciones elementales con renglones que conduzcan a esta reducción). Si A es cuadrada, por ejemplo de $n \times n$, entonces se *puede* tener que $A_k = I_n$, la matriz identidad de $n \times n$.

¡ADVERTENCIA!

Toda matriz identidad es una matriz reducida, pero no todas las matrices reducidas (cuadradas) son una matriz identidad. Por ejemplo, cualquier matriz cero, 0, es reducida.

Teorema

Para las matrices cuadradas A y A_k tal como se definieron previamente, A es invertible si y solo si $A_k = I$. Aún más, si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ es una sucesión de operaciones elementales con renglones que convierte a A en I, entonces la propia sucesión convierte a I en A^{-1}.

EJEMPLO 3 Determinación de si una matriz es invertible

Aplique el teorema previo para determinar si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

es invertible.

Estrategia Se *aumentará* A con una copia de la matriz identidad de 2×2 (de igual manera que se ha aumentado una matriz mediante un vector columna). El resultado será una matriz de 2×4. Se aplicarán operaciones elementales con renglones a toda la matriz de 2×4 hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida. Si el resultado es I, entonces, por el teorema, A es invertible; pero debido a que se han aplicado las operaciones elementales a toda la matriz de 2×4, las últimas n columnas se transformarán, también por el teorema, de I a A^{-1}, en el caso de que A sea invertible.

Solución: Se tiene

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [I \mid B]$$

Como $[A \mid I]$ se transforma con I a la izquierda de la barra de aumento, la matriz A es invertible y la matriz B situada a la derecha de la barra de aumento es A^{-1}. De manera específica, se concluye que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

De hecho, este procedimiento es general.

Para el lector interesado, se remarca que en el método descrito la matriz B es invertible en cualquier caso y siempre se tiene $BA = R$.

Método para encontrar la inversa de una matriz

Si A es una matriz de $n \times n$, forme la matriz de $n \times (2n)$, $[A \mid I]$, después realice operaciones elementales con renglones hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida. Suponga que el resultado es $[R \mid B]$ de manera que se tiene

$$[A \mid I] \rightarrow \cdots \rightarrow [R \mid B]$$

Si $R = I$, entonces A es invertible y $A^{-1} = B$. Si $R \neq I$, entonces A no es invertible, lo cual significa que A^{-1} no existe (y la matriz B no tiene un interés en particular para los temas tratados aquí).

APLÍQUELO ▶

14. El esquema de codificación utilizado en el recuadro de aplíquelo 1 podría ampliarse a una matriz de 3 × 3 al codificar tres letras del mensaje a la vez. Encuentre las inversas de las siguientes matrices de codificación de 3 × 3:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una matriz

Determine A^{-1} si A es invertible.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$

Solución: Siguiendo el procedimiento anterior, se tiene

$$[A \mid I]\ \mathrm{D} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-1R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R_3+R_2]{2R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Las tres primeras columnas de la última matriz forman a I. Por lo tanto, A es invertible y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

Solución: Se tiene

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Las primeras dos columnas de la última matriz forman una matriz reducida diferente de I. Por lo tanto, A no es invertible.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Ahora se resolverá un sistema utilizando la inversa.

APLÍQUELO ▶

15. Un grupo de inversionistas tiene \$500 000 para invertir en las acciones de tres compañías. La compañía A vende a \$50 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 13% al año. La compañía B vende en \$20 la acción y tiene un rendimiento esperado de 15% anual. La compañía C vende en \$80 una acción y tiene un rendimiento esperado de 10% anual. El grupo planea comprar el doble de acciones de la compañía A que de la compañía C. Si la meta del grupo es conseguir 12% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas? Use la matriz inversa para resolverlo.

EJEMPLO 5 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}-2x_2} - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1 \end{cases}$$

por medio de la determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución: En forma matricial, el sistema es $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes. Del ejemplo 4(a),

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución está dada por $X = A^{-1}B$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix}$$

de modo que $x_1 = -7$, $x_2 = -17$ y $x_3 = -4$.

Ahora resuelva el problema 27 ◁

Puede demostrarse que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única si y solo si la matriz de coeficientes es invertible. De hecho, en el ejemplo anterior la matriz de coeficientes es invertible y existe una solución única para el sistema. Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, el sistema tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución.

Aunque la solución de un sistema usando una matriz inversa es muy elegante, es necesario tomar una precaución. Dado $AX = B$, el trabajo de cálculo requerido para encontrar A^{-1} es mayor que el requerido para reducir $[A \mid B]$. Si usted tiene varias ecuaciones por resolver, todas con la misma matriz de coeficientes pero lados derechos variables, por ejemplo, $AX = B_1, AX = B_2, \ldots, AX = B_k$, entonces para una k lo suficientemente grande *podría* ser más rápido calcular A^{-1} que hacer k reducciones, pero en la mayoría de los casos, un análisis numérico lo convencerá en favor de las reducciones. No olvide que aún con A^{-1} a la mano, es necesario calcular $A^{-1}B$, además, si el orden de A es grande, esto requiere también de un tiempo considerable.

¡ADVERTENCIA!

El método de reducción analizado en las secciones 4.4 y 4.5 es un cálculo más rápido que el de encontrar una matriz inversa.

EJEMPLO 6 Matriz de coeficientes que no es invertible

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución: La matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

la matriz de coeficientes no es invertible. De modo que el sistema *no puede* resolverse por medio de inversas. En este caso debe utilizarse otro método. En el ejemplo 4(a) de la sección 4.5, la solución que se determinó fue $x = -3r$, $y = -r$ y $z = r$, donde r es cualquier número real (esto proporciona un número infinito de soluciones).

Ahora resuelva el problema 31 ◁

PROBLEMAS 4.6

En los problemas del 1 al 18, si la matriz dada es invertible, encuentre su inversa.

1. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a en $(-\infty, \infty)$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

19. Resuelva $AX = B$ si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

20. Resuelva $AX = B$ si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para los problemas del 21 al 34, si la matriz de coeficientes del sistema es invertible, resuelva el sistema utilizando la inversa. Si no es así, resuelva por el método de reducción.

21. $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x + y = 2 \\ 7x + y = 7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ 3x + 9y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = -1 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 4 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 8z = 8 \\ -x + 4y = 36 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} w + 2y + z = 4 \\ w - x + 2z = 12 \\ 2w + x + z = 12 \\ w + 2x + y + z = 12 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ w + y + = 0 \\ -w + 2x - 2y - z = 6 \\ y + z = 4 \end{cases}$

En los problemas 35 y 36, encuentre $(I - A)^{-1}$ para la matriz A dada.

35. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

37. **Producción de automóviles** Resuelva los problemas siguientes utilizando la inversa de la matriz implicada.

(a) Una fábrica de automóviles produce dos modelos, A y B. El modelo A requiere 1 hora de mano de obra para pintarlo y $\frac{1}{2}$ hora de mano de obra para pulirlo; el modelo B requiere de 1 hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Durante cada hora que la línea de ensamblado está funcionando, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas de mano de obra para pulido. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden terminarse cada hora si se utilizan todas las horas de mano de obra disponibles?

(b) Suponga que cada modelo A requiere 10 piezas del tipo 1 y 14 del tipo 2, mientras que cada modelo B requiere 7 piezas tipo 1 y 10 tipo 2. La fábrica puede obtener 800 piezas tipo 1 y 1130 del tipo 2 cada hora. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen cuando se utilizan todas las piezas disponibles?

38. Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, donde $a, b, c \neq 0$, demuestre que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

39. **(a)** Si A y B son matrices invertibles con el mismo orden, demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. [*Sugerencia:* Considere que $(B^{-1}A^{-1})(AB)$].

(b) Si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

encuentre $(AB)^{-1}$.

40. Si A es invertible, puede demostrarse que $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. Verifique esta identidad para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

41. Se dice que una matriz P es *ortogonal* si $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$. ¿La matriz $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ es ortogonal?

42. Mensaje secreto Un amigo le ha enviado a usted un mensaje secreto que consiste en tres matrices renglón de números como sigue:

$$R_1 = [33 \quad 87 \quad 70] \qquad R_2 = [57 \quad 133 \quad 20]$$
$$R_3 = [38 \quad 90 \quad 33]$$

Entre los dos han diseñado la siguiente matriz (utilizada por su amigo para codificar el mensaje):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Descifre el mensaje procediendo de la manera siguiente:

(a) Calcule los tres productos matriciales R_1A^{-1}, R_2A^{-1} y R_3A^{-1}.

(b) Suponga que las letras del alfabeto corresponden a los números del 1 al 26, reemplace los números en estas tres matrices por letras y determine el mensaje.

43. Inversión Un grupo de inversionistas decide invertir \$500 000 en las acciones de tres compañías. La compañía D vende en \$60 una acción y tiene un rendimiento esperado de 16% anual. La compañía E vende en \$80 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía F vende cada acción en \$30 y tiene un rendimiento esperado de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones de la compañía F que de la compañía E. Si la meta del grupo es obtener 13.68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

44. Inversión Los inversionistas del problema 43 deciden probar con una nueva estrategia de inversión con las mismas compañías. Ellos desean comprar el doble de acciones de la compañía F que de la compañía E y tienen la meta de 14.52% de rendimiento anual. ¿Cuántas acciones de cada tipo deben comprar?

4.7 Análisis insumo-producto de Leontief

Objetivo

Utilizar los métodos de este capítulo para analizar la producción de los sectores de una economía.

Las matrices de insumo-producto, desarrolladas por Wassily W. Leontief,[5] indican las interrelaciones que se dan entre la oferta y la demanda en los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. La frase *insumo-producto* se utiliza porque las matrices muestran los valores de los productos de cada industria que son vendidos como insumo tanto a las industrias como a los consumidores finales.

Ecuación básica

Suponga que una economía simple tiene tres sectores interrelacionados, que se etiquetan como 1, 2 y 3. Éstos pueden ser, por ejemplo, agricultura, energía y manufactura. Para cualquier sector j, la producción de una unidad de producto de j requerirá por lo general insumos de todos los sectores de la economía, incluyendo del propio j. Si se expresa con A_{ij} el número de unidades del insumo proveniente del sector i requeridas para producir una unidad de producto del sector j, entonces los números A_{ij} determinan una matriz A de 3×3. Por ejemplo, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

---

[5] Leontief ganó el Premio Nobel de Economía en 1973 por el desarrollo del método de "insumo-producto" y sus aplicaciones a problemas económicos.

¡ADVERTENCIA!

Es importante evitar confundir *A* con su transpuesta, un error común en este contexto.

Al leer hacia abajo la primera columna de *A*, se observa que producir una unidad de producto del sector 1 requiere $\frac{2}{5}$ de una unidad de insumo del sector 1, $\frac{1}{5}$ de una unidad de insumo del sector 2 y $\frac{1}{5}$ de una unidad de insumo del sector 3. De manera similar, los requisitos para los sectores 2 y 3 pueden leerse a partir de las columnas 2 y 3, respectivamente. Es posible que haya *demandas externas* sobre la economía, esto equivale a decir que, para cada sector, habrá una demanda por cierto número de unidades de producto que no se usarán como insumos para ninguno de los sectores 1, 2 y 3. Tales demandas pueden tomar la forma de exportaciones o necesidades del consumidor. Desde el punto de vista de este modelo, el único atributo de las demandas externas que importa es que no se sobreponen con las demandas descritas por la matriz *A*.

Suponga además que existe una demanda externa de 80 unidades de producto del sector 1, 160 unidades del producto del sector 2 y 240 unidades de producto del sector 3. Se escribirá

$$D = \begin{bmatrix} 80 \\ 160 \\ 240 \end{bmatrix}$$

para esta demanda externa de modo que, como se muestra, la entrada en el renglón *i* es la demanda externa para el sector *i*. Una pregunta clave que surge ahora se relaciona con la determinación de los niveles de producción para los sectores 1, 2 y 3 que puedan satisfacer la demanda externa *D*. Se debe tener en cuenta que la producción debe satisfacer no solo la demanda externa, sino también los requisitos impuestos por los datos que conforman la matriz *A*. Para cada sector, una parte de su producción debe destinarse a ser insumo para los tres sectores de la economía (incluyéndose a sí mismo) y otra parte debe destinarse al componente correspondiente de *D*. Lo anterior conduce a la importante ecuación conceptual:

$$\textbf{producción} = \textbf{demanda interna} + \textbf{demanda externa} \qquad (1)$$

Sea X_i, para $i = 1, 2, 3$, la producción requerida del sector *i* que satisface la ecuación (1). Entonces, la producción puede representarse mediante la matriz

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

y la ecuación (1) se convierte en

$$X = \textbf{demanda interna} + D \qquad (2)$$

Para entender la *demanda interna* habría que empezar por darse cuenta de que tendrá tres componentes, por ejemplo C_1, C_2 y C_3, donde C_i es la cantidad de producción del sector *i* consumida por la producción de *X*. Si se escribe *C* para denotar la matriz de 3×1 cuyo *i*-ésimo renglón es C_i, la ecuación (2) se convierte ahora en

$$X = C + D \qquad (3)$$

Observe que C_1 deberá tomar en cuenta la producción del sector que se ha usado en la producción de X_1 unidades del producto del sector 1 más X_2 unidades del producto del sector 2 más X_3 unidades del producto del sector 3. Se requieren $A_{11}X_1$ unidades de 1 para producir una unidad de 1, por lo que la producción de X_1 unidades de 1 requiere $A_{11}X_1$ unidades de 1. Se necesitan A_{12} unidades de 1 para producir una unidad de 2, por lo que la producción de X_2 unidades de 2 requiere $A_{12}X_2$ unidades de 1. Se necesitan A_{13} unidades de 1 para producir una unidad de 3, así que la producción de X_3 unidades de 3 requiere $A_{13}X_3$ unidades de 1. De ello, se deduce que debe tenerse

$$C_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3$$

Con argumentos similares para C_2 y C_3, se deduce

$$C_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3$$

$$C_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3$$

y las últimas tres igualdades se combinan fácilmente para obtener

$$C = AX$$

Al sustituir $C = AX$ en la ecuación (3), se obtiene la siguiente ecuación y sus equivalentes:

$$\begin{aligned} X &= AX + D \\ X - AX &= D \\ IX - AX &= D \\ (I - A)X &= D \end{aligned}$$

La última ecuación mostrada tiene la forma $MX = D$, por lo que para determinar la producción X solo es necesario reducir la matriz aumentada $[I - A \mid D]$.

Aunque no está del todo estandarizado, en este análisis se hará referencia a la matriz A como la *matriz de Leontief*. La matriz $I - A$ es la *matriz de coeficientes* del sistema cuya solución proporciona la producción X necesaria para satisfacer la demanda externa D.

EJEMPLO 1 **Análisis insumo-producto**

Para la matriz de Leontief A y la demanda externa D de esta sección, complete la determinación numérica de la producción necesaria para satisfacer D.

Solución: Solo debe escribirse la matriz aumentada de la ecuación $(I - A)X = D$, la cual es, evidentemente,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} & 80 \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & 160 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & 240 \end{array}\right]$$

y reducirla. Si se utilizan las técnicas de la sección 6.4, se tiene

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -5 & -3 & 800 \\ -2 & 9 & -1 & 1600 \\ -2 & -2 & 9 & 2400 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -9 & -2400 \\ 0 & 11 & -10 & -800 \\ 0 & -11 & 24 & 8000 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -9 & -2400 \\ 0 & 11 & -10 & -80 \\ 0 & 0 & 14 & 7200 \end{array}\right]$$

de donde es posible deducir que $X \approx \begin{bmatrix} 719.84 \\ 394.81 \\ 514.29 \end{bmatrix}$. Aquí se debe remarcar que, aunque la respuesta está redondeada, a partir de la última matriz aumentada que se mostró puede deducirse que el sistema tiene una solución única.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Una aplicación de la matriz inversa

En el ejemplo 1 la solución es única, lo cual es típico de ejemplos que implican una matriz de Leontief realista, A. En otras palabras, es común que la matriz de coeficientes $I - A$ sea invertible. Así, la solución normalmente única de

$$(I - A)X = D$$

por lo general puede obtenerse como

$$X = (I - A)^{-1}D$$

En la sección 4.6 se advirtió que, en cuanto al número de cálculos, la determinación de la inversa de una matriz de coeficientes no suele ser una forma eficiente de resolver un sistema de ecuaciones lineales. También se dijo que, al existir varios sistemas por resolver, todos con la misma matriz de coeficientes, el cálculo de la inversa *puede* resultar útil. Esta posibilidad se presenta mediante el modelo de Leontief.

Para una subdivisión dada de una economía en n sectores, es razonable esperar que la matriz de Leontief de $n \times n$ permanezca constante durante un intervalo de tiempo razonable. De ello se deduce que la matriz de coeficientes $I - A$ también se mantendrá constante durante el mismo periodo. Durante este intervalo de tiempo, es posible que los planeadores quieran explorar una variedad de demandas $D_1, D_2, \ldots, D_k$ y determinar, para cualquiera de éstas, la producción X_l requerida para satisfacer D_l. Con $(I - A)^{-1}$ a mano, el planificador solo debe *calcular*

$$X_l = (I - A)^{-1}D_l$$

(en lugar de *resolver* $(I - A)X_l = D_l$ mediante la reducción de $[I - A \mid D_l]$).

Determinación de la matriz de Leontief

Con frecuencia, la matriz de Leontief se determina a partir de datos del tipo que se presenta a continuación. Se dará un ejemplo hipotético para una economía muy simplificada de dos sectores. Igual que antes, se puede considerar que los dos sectores pertenecen a la agricultura, energía, manufactura, el acero, carbón, etc. El renglón de los *otros factores de producción* consiste en los costos para los respectivos sectores, como la mano de obra, utilidad, etc. Aquí, la entrada de la *demanda externa* podría ser de consumo doméstico y exportaciones. La matriz que se considerará primero es un poco más grande que la matriz de Leontief:

	Consumidores (insumo)			
	Sector 1	Sector 2	Demanda externa	
Productores (producto):				*Totales*
Sector 1	240	500	460	1200
Sector 2	360	200	940	1500
Otros factores de producción	600	800	—	
Totales	1200	1500		

Cada sector aparece en un renglón y en una columna. El renglón de un sector muestra las compras del producto del sector por parte de todos los sectores y por la *demanda externa*. Las entradas representan los valores de los productos y podrían estar en unidades de millón. Por ejemplo, de la producción total del sector 1, 240 fueron como insumo para el propio sector 1 (para uso interno), 500 fueron para el sector 2 y 460 directamente para la demanda externa. La producción total del sector 1 es la suma de las demandas de los sectores y de la demanda externa: $(240 + 500 + 460 = 1200)$.

La columna de cada sector da el valor de lo que este compró como insumo de cada uno de los sectores (incluido él mismo), así como lo gastado por otros conceptos. Por ejemplo, con el fin de producir 1200 unidades, el sector 1 compró 240 unidades de su producto, 360 de la producción de B y tiene gastos de mano de obra y otros por 600 unidades.

Observe que para cada sector, la suma de las entradas en su renglón es igual a la suma de las entradas en su columna. Por ejemplo, el valor de la producción total de 1 (1200) es igual al valor de los insumos totales del sector 1.

Un supuesto importante del análisis insumo-producto es que la estructura básica de la economía permanece igual en intervalos razonables de tiempo. Esta estructura se encuentra en los montos relativos de insumos que se usan para realizar una unidad de producto. Lo anterior se encuentra en las tablas particulares del tipo mostrado anteriormente, como se describe a continuación. Para producir 1200 unidades de producto, el sector 1 compra 240 unidades del sector 1, 360 del sector 2 y gasta 600 unidades en otros conceptos. Así, *por cada unidad de producción*, el sector 1 gasta $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ en el sector 1, $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$ en el sector 2 y $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ en otros conceptos. Al combinar estas razones fijas del sector 1 con las del sector 2, pueden obtenerse los requerimientos de insumos por unidad de producción para cada sector:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ \mathit{Otro} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\ & \\ \frac{600}{1200} & \frac{800}{1500} \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ & \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ \mathit{Otro} \end{array}$$

La suma de cada columna es 1 y, debido a esto, no se requiere el último renglón. Cada entrada en el renglón inferior puede obtenerse al sumar las entradas ubicadas encima y restar el resultado a 1. Si se borra el último renglón, entonces la *ij*-ésima entrada de la matriz resultante es el número de unidades de producto del sector *i* necesarias para producir *una* unidad de producto del sector *j*. Se deduce que *esta matriz*,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

es la matriz de Leontief para la economía.

Ahora, suponga que el valor de la demanda externa cambia de 460 a 500 para el sector 1 y de 940 a 1200 para el sector 2. Sería deseable estimar cómo cambiaría la producción para satisfacer estas nuevas demandas externas. Pero ya se ha visto cómo determinar los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda externa dada D cuando se conoce la matriz de Leontief A. Ahora con

$$D = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

solamente debe resolverse $(I - A)X = D$, que en el presente caso se efectuará al reducir

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} & 500 \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} & 1200 \end{array}\right]$$

o, como A solo es de 2×2, al calcular $X = (I - A)^{-1}D$ usando una calculadora gráfica. Con una calculadora TI-83 Plus,

$$X = (I - A)^{-1}D = \begin{bmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{bmatrix}$$

se obtiene con facilidad. Observe que también es posible actualizar los datos iniciales del renglón de “otros factores de producción”. A partir del renglón descartado con los datos relativizados, se sabe que $\frac{1}{2}$ de la producción del sector 1 y $\frac{8}{15}$ de la producción del sector 2 deben dirigirse a los otros factores de producción, por lo que los datos relativizados ahora serán

$$\left[\frac{1}{2}(1404.49), \frac{8}{15}(1870.79)\right] \approx [702.25, 997.75]$$

El aspecto de la eficiencia computacional puede ser muy serio. Mientras que aquí se estudia este tema del análisis insumo-producto con ejemplos de economías divididas en dos o tres sectores, un modelo más realista podría consistir en 20 sectores —en cuyo caso la matriz de Leontief tendría 400 entradas.

EJEMPLO 2 Análisis de insumo-producto

Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{r|cccc|}
 & & \textit{Sector} & & \textit{Demanda} \\
 & 1 & 2 & 3 & \textit{externa} \\
\hline
\textit{Sector: } 1 & 240 & 180 & 144 & 36 \\
2 & 120 & 36 & 48 & 156 \\
3 & 120 & 72 & 48 & 240 \\
\textit{Otros} & 120 & 72 & 240 & \text{—}
\end{array}$$

suponga que la demanda final cambia a 77 para 1, a 154 para 2 y a 231 para 3. Encuentre la producción necesaria para satisfacer la nueva demanda externa. (Las entradas están en millones).

Estrategia Al examinar los datos se observa que producir 600 unidades de 1 requiere 240 unidades de 1, 120 unidades de 2 y 120 unidades de 3. Se deduce que para producir *una* unidad de 1 se requieren $\frac{240}{600} = \frac{2}{5}$ unidades de 1, $\frac{120}{600} = \frac{1}{5}$ unidades de 2 y $\frac{120}{600} = \frac{1}{5}$ unidades de 3. Los elementos $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{5}$ constituyen, en ese orden, la primera *columna* de la matriz de Leontief.

Solución: Se suman por separado las entradas en los primeros tres renglones. Los valores totales de producción para los sectores 1, 2 y 3 son 600, 360 y 480, respectivamente. Para obtener la matriz de Leontief A, se dividen las entradas de los sectores ubicados en cada columna entre el valor total de la producción señalada para ese sector:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

La matriz de demanda externa es

$$D = \begin{bmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{bmatrix}$$

El resultado de evaluar $(I - A)^{-1}D$ en una calculadora TI-83 Plus es

$$\begin{bmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

PROBLEMAS 4.7

1. Una economía muy simple consiste en dos sectores: agricultura y molienda. Para producir una unidad de productos agrícolas se requieren $\frac{1}{3}$ de unidad de productos agrícolas y $\frac{1}{4}$ de unidad de productos de molienda. Para producir una unidad de productos de molienda se requieren $\frac{3}{4}$ de unidad de productos agrícolas y ninguna unidad de productos de molienda. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda externa de 300 unidades de agricultura y 500 unidades de productos de molienda.

2. Una economía consiste en tres sectores: carbón, acero y trenes. Para producir una unidad de carbón se requiere $\frac{1}{10}$ de unidad de carbón, $\frac{1}{10}$ de unidad de acero y $\frac{1}{10}$ de unidad de servicio de trenes. Para producir una unidad de acero se requiere $\frac{1}{3}$ de unidad de carbón, $\frac{1}{10}$ de unidad de acero y una unidad de servicio de trenes. Para producir una unidad de servicio de trenes se requiere $\frac{1}{4}$ de unidad de carbón, $\frac{1}{3}$ de unidad de acero y $\frac{1}{10}$ de unidad de servicio de trenes. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda externa de 300 unidades de carbón, 200 unidades de acero y 500 unidades de servicios de tren.

3. Suponga que una economía simple consiste en tres sectores: agricultura (A), manufactura (M) y transporte (T). Los economistas han determinado que para producir una unidad de A se requieren $\frac{1}{18}$ unidades de A, $\frac{1}{9}$ unidades de M y $\frac{1}{9}$ unidades de T; mientras que la producción de una unidad de M necesita $\frac{3}{16}$ unidades de A, $\frac{1}{4}$ unidades de M y $\frac{3}{16}$ unidades de T; asimismo, la producción de una unidad de T requiere $\frac{1}{15}$ unidades de A, $\frac{1}{3}$ unidades de M y $\frac{1}{6}$ unidades de T. Existe una demanda externa de 40 unidades de A, 30 unidades de M y ninguna unidad de T. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer la demanda externa.

4. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{rr|ccc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Industria}} & \textit{Demanda} \\
 & & \textit{Acero} & \textit{Carbón} & \textit{Final} \\
\textit{Industria:} & \textit{Acero} & 200 & 500 & 500 \\
 & \textit{Carbón} & 400 & 200 & 900 \\
 & \textit{Otros} & 600 & 800 & —
\end{array}$$

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a 600 para el acero y 805 para el carbón. Encuentre el valor total de los otros costos de producción que esto implica.

5. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{rr|ccc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Industria}} & \textit{Demanda} \\
 & & \textit{Educación} & \textit{Gobierno} & \textit{final} \\
\textit{Industria:} & \textit{Educación} & 40 & 120 & 40 \\
 & \textit{Gobierno} & 120 & 90 & 90 \\
 & \textit{Otros} & 40 & 90 & —
\end{array}$$

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 200 para educación y 300 para gobierno; (b) 64 para educación y 64 para gobierno.

6. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

$$\begin{array}{rr|cccc|}
 & & \multicolumn{3}{c}{\textit{Industria}} & \textit{Demanda} \\
 & & \textit{Grano} & \textit{Fertilizante} & \textit{Ganado} & \textit{final} \\
\textit{Industria:} & \textit{Grano} & 15 & 30 & 45 & 10 \\
 & \textit{Fertilizante} & 25 & 30 & 60 & 5 \\
 & \textit{Ganado} & 50 & 40 & 60 & 30 \\
 & \textit{Otros} & 10 & 20 & 15 & —
\end{array}$$

encuentre la matriz de producción (con entradas redondeadas a dos decimales) si la demanda final cambia a (a) 15 para grano, 10 para fertilizante y 35 para ganado; (b) 10 para grano, 10 para fertilizante y 10 para ganado.

7. Dada la matriz de insumo—producto

$$\begin{array}{rr|cccc|}
 & & \multicolumn{3}{c}{\textit{Industria}} & \\
 & & \textit{Agua} & \textit{Electricidad} & \textit{Agricultura} & \textit{Demanda final} \\
\textit{Industria:} & \textit{Agua} & 100 & 400 & 240 & 260 \\
 & \textit{Electricidad} & 100 & 80 & 480 & 140 \\
 & \textit{Agricultura} & 300 & 160 & 240 & 500 \\
 & \textit{Otros} & 500 & 160 & 240 & —
\end{array}$$

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a 500 para agua, 150 para electricidad y 700 para agricultura. Redondee sus entradas a dos decimales.

8. Dada la matriz de insumo-producto

$$\begin{array}{rr|cccc|}
 & & \multicolumn{3}{c}{\textit{Industria}} & \textit{Demanda} \\
 & & \textit{Gobierno} & \textit{Agricultura} & \textit{Manufactura} & \textit{final} \\
\textit{Industria:} & \textit{Gobierno} & 400 & 200 & 200 & 200 \\
 & \textit{Agricultura} & 200 & 400 & 100 & 300 \\
 & \textit{Manufactura} & 200 & 100 & 300 & 400 \\
 & \textit{Otros} & 200 & 300 & 400 & —
\end{array}$$

con entradas en miles de millones, encuentre la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 350 para agricultura y 450 para manufactura. Redondee las entradas al millar de millones más cercano.

9. Dada la matriz de insumo-producto del problema 8, encuentre la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 250 para gobierno, 300 para agricultura y 350 para manufactura. Redondee las entradas al millar de millones más cercano.

10. Dada la matriz de insumo-producto del problema 8, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 400 para agricultura y 500 para manufactura. Redondee las entradas al millar de millones más cercano.

Repaso del capítulo 4

Términos y símbolos importantes

Sección 4.1 **Matrices**
matriz tamaño entrada, A_{ij} vector renglón vector columna
igualdad de matrices transpuesta de una matriz, A^T matriz cero, 0

Sección 4.2 **Suma de matrices y multiplicación por un escalar**
suma y resta de matrices multiplicación por un escalar

Sección 4.3 **Multiplicación de matrices**
multiplicación de matrices matriz identidad, I potencia de una matriz
ecuación matricial, $AX = B$

Sección 4.4 **Resolución de sistemas mediante reducción de matrices**
matriz de coeficientes matriz de coeficientes aumentada
operación elemental con renglones matrices equivalentes matriz reducida
parámetro

Sección 4.5 **Resolución de sistemas mediante reducción de matrices (*continuación*)**
sistema homogéneo sistema no homogéneo solución trivial

Sección 4.6 **Inversas**
matriz inversa matriz invertible
Sección 4.7 **Análisis insumo-producto de Leontief**
matriz de insumo-producto matriz de Leontief

Resumen

Una matriz es un arreglo rectangular de números encerrados entre corchetes. Hay algunos tipos especiales de matrices, como las matrices cero, matrices identidad, matrices cuadradas y matrices diagonales. Además de la operación básica de multiplicación por un escalar, están definidas las operaciones de suma y resta de matrices, las cuales se aplican a matrices del mismo tamaño. El producto AB está definido cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Aunque la suma de matrices es conmutativa, la multiplicación no lo es. Utilizando la multiplicación matricial es posible expresar un sistema de ecuaciones lineales como la ecuación matricial $AX = B$.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. El método principal para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices consiste en la aplicación de las tres operaciones elementales con renglones a la matriz de coeficientes aumentada del sistema hasta que se obtiene una matriz reducida equivalente. La matriz reducida hace que la solución o soluciones para el sistema sean obvias y permite la detección de la no existencia de soluciones. Si existe un número infinito de soluciones, la solución general implica al menos un parámetro.

En ocasiones, resulta útil encontrar la inversa de una matriz (cuadrada). La inversa (si existe) de una matriz cuadrada A se encuentra aumentando A con I y aplicando operaciones elementales con renglones a $[A \mid I]$ hasta que A sea reducida resultando en $[R \mid B]$ (con R reducida). Si $R = I$, entonces A es invertible y $A^{-1} = B$. Si $R \neq I$, entonces A no es invertible, lo cual significa que A^{-1} no existe. Si la inversa de una matriz A de $n \times n$ existe, entonces la solución única de $AX = B$ está dada por $X = A^{-1}B$. Si A no es invertible, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

La aplicación final de matrices trata las relaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía, lo cual se conoce como análisis insumo-producto de Leontief.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 8, simplifique.

1. $2\begin{bmatrix}3 & 4\\ -5 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

2. $5\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 6 & 1\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 7 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 8\\ 4 & 4\end{bmatrix}\right)$

6. $-\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & 8\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0 & -5\\ 6 & -4\end{bmatrix}\right)$

7. $3\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

8. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 6\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^2$

En los problemas del 9 al 12, calcule la matriz requerida si

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

9. $(2A)^{\mathrm{T}} - 3I^2$ **10.** $A(2I) - A0^{\mathrm{T}}$ **11.** $B^3 + I^5$

12. $(ABBA)^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

En los problemas 13 y 14, resuelva para x y para y.

13. $\begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix}15\\ y\end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ x & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & y\end{bmatrix}$

En los problemas del 15 al 18, reduzca las matrices dadas.

15. $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 7\\ 0 & 5 & 9\end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

En los problemas del 19 al 22, resuelva cada uno de los sistemas por el método de reducción.

19. $\begin{cases}2x - 5y = 0\\ 4x + 3y = 0\end{cases}$

20. $\begin{cases}x - y + 2z = 3\\ 3x + y + z = 5\end{cases}$

21. $\begin{cases}x + y + 2z = 1\\ 3x - 2y - 4z = -7\\ 2x - y - 2z = 2\end{cases}$

22. $\begin{cases}3x + y + 2z = 0\\ x + 2y + 5z = 1\\ 4x + z = 0\end{cases}$

En los problemas del 23 al 26, encuentre las inversas de las matrices.

23. $\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 9\end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ -5 & 2 & 1\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}$

En los problemas 27 y 28, resuelva el sistema dado utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

27. $\begin{cases}2x + y + 3z = 2\\ x + 2z = 1\\ y + z = 4\end{cases}$

28. $\begin{cases}5x = 3\\ -5x + 2y + z = 0\\ -5x + y + 3z = 2\end{cases}$

29. Sea $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Encuentre las matrices A^2, A^3, A^{1000} y A^{-1} (si es que existe la inversa).

30. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, muestre que $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

31. Un consumidor desea completar su consumo vitamínico en *exactamente* 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C por semana. Hay disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.

(a) ¿Qué combinaciones de cápsulas de las marcas I, II y III producirán *exactamente* las cantidades deseadas?

(b) Si las cápsulas de la marca I cuestan 5 centavos cada una, de la marca II, 7 centavos cada una y de la marca III, 20 centavos cada una, ¿qué combinación minimizará su costo semanal?

32. Suponga que A es una matriz invertible de $n \times n$.

(a) Demuestre que A^n es invertible para cualquier entero positivo n.

(b) Demuestre que si B y C son matrices de $n \times n$ tales que $ABA = ACA$, entonces $B = C$.

(c) Si $A^2 = A$ (se dice que A es *idempotente*), encuentre A.

33. Si $A = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$, encuentre $3AB - 4B^2$.

34. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 7.9x - 4.3y + 2.7z = 11.1 \\ 3.4x + 5.8y - 7.6z = 10.8 \\ 4.5x - 6.2y - 7.4z = 15.9 \end{cases}$$

utilizando la inversa de la matriz de coeficientes. Redondee sus respuestas a dos decimales.

35. Dada la matriz de insumo-producto

$$\begin{array}{r|ccc|}
 & \multicolumn{2}{c}{\textit{Industria}} & \textit{Demanda} \\
 & A & B & \textit{final} \\
\hline
\textit{Industria: } A & 10 & 20 & 4 \\
B & 15 & 14 & 10 \\
\textit{Otros} & 9 & 5 & —
\end{array}$$

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a 10 para A y 5 para B. (Los datos están en decenas de miles de millones de dólares).

EXPLORE Y AMPLÍE Requerimientos de insulina como un proceso lineal[6]

Una posada vacacional ubicada en las montañas del estado de Washington tiene una bien merecida reputación por la atención que brinda a las necesidades especiales de salud de sus huéspedes. La semana próxima, el administrador de la posada espera recibir cuatro huéspedes diabéticos dependientes de insulina. Estos huéspedes planean permanecer en la posada durante 7, 14, 21 y 28 días, respectivamente.

La posada se encuentra muy alejada de la farmacia más cercana, de modo que antes de que lleguen los huéspedes, el administrador planea obtener la cantidad total de insulina que se necesitará. Se requieren tres tipos diferentes de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. El administrador almacenará la insulina y después el personal de la posada administrará la dosis diaria de los tres tipos a cada uno de los huéspedes.

Los requerimientos diarios de los cuatro huéspedes son:

Huésped 1	20 unidades de insulina semilenta, 30 de lenta y 10 de ultralenta.
Huésped 2	40 unidades de insulina semilenta, 0 de lenta y 0 de ultralenta.
Huésped 3	30 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 30 de ultralenta.
Huésped 4	10 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 50 de ultralenta.

Esta información se representa en la siguiente matriz de "requerimientos" A:

$A = [A_{ij}]_{3\times 4}$ donde A está dada por

$$\begin{array}{l|cccc|}
 & \text{Huésped} & \text{Huésped} & \text{Huésped} & \text{Huésped} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\text{Insulina semilenta} & 20 & 40 & 30 & 10 \\
\text{Insulina lenta} & 30 & 0 & 10 & 10 \\
\text{Insulina ultralenta} & 10 & 0 & 30 & 50
\end{array}$$

Recuerde que el huésped 1 permanecerá 7 días, el 2 estará 14 días, el 3 estará 21 días y el huésped 4, 28 días. Usted puede hacer que el vector columna T represente el tiempo, en días, que cada huésped permanecerá en la posada:

$$T = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Para determinar las cantidades totales de los tres tipos de insulina necesarios para los cuatro huéspedes, calcule el producto matricial AT.

$$AT = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

---

[6] Adaptado de Richard F. Baum, "Insulin Requirements as a Linear Process", en R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum (eds.), *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev. Reporte 40241-R-7. Preparado en la University of Michigan, 1967.

$$= 10(7)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= 70\begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = B$$

El vector $B(= AT)$ indica que los cuatro huéspedes requerirán un total de 1610 unidades de insulina semilenta, 700 unidades de insulina lenta y 2100 unidades de insulina ultralenta.

Ahora, el problema cambiará un poco. Suponga que cada huésped decidió duplicar su tiempo de estancia original. El vector resultante que da la cantidad total de insulina necesaria de los tipos semilenta, lenta y ultralenta es

$$A(2T) = 2(AT) = 2B = \begin{bmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{bmatrix}$$

De hecho, si cada huésped planeó extender por un factor k su tiempo original de estancia en la posada (esto es, el huésped 1 planeó permanecer durante $k \cdot 7$ días, el huésped 2 planeó $k \cdot 14$ días, y así sucesivamente), entonces los requerimientos de insulina serán

$$A(kT) = k(AT) = kB = \begin{bmatrix} k \cdot 1610 \\ k \cdot 700 \\ k \cdot 2100 \end{bmatrix}$$

De manera similar, si los huéspedes decidieran agregar 1, 3, 4 y 6 días, respectivamente, a los tiempos que originalmente proyectaron permanecer, entonces las cantidades de insulina requeridas serían

$$A(T + T_1) = AT + AT_1, \qquad \text{donde } T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Con base en los resultados obtenidos hasta aquí, es obvio que la siguiente ecuación matricial generaliza la situación.

$$AX = B$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

lo cual representa el sistema lineal

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 = b_1 \\ 30x_1 \qquad\quad + 10x_3 + 10x_4 = b_2 \\ 10x_1 \qquad\quad + 30x_3 + 50x_4 = b_3 \end{cases}$$

donde x_i es el número de días que el huésped i permanece en la posada y b_1, b_2 y b_3 dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta necesarias para los cuatro huéspedes durante su estancia completa en la posada.

Por último, suponga una vez más que el vector T representa el número de días que cada huésped planeó permanecer originalmente en la posada. Además, suponga que el vector C proporciona el costo (en centavos) por unidad de insulina de los tres tipos, donde

$$C = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \text{matriz de costo}$$

Esto es, una unidad de insulina semilenta cuesta 9 centavos, una unidad de lenta cuesta 8 centavos y una unidad de ultralenta cuesta 10 centavos. Entonces la cantidad total pagada por la posada por toda la insulina necesaria para los cuatro huéspedes es

$$C^{\mathrm{T}}(AT) = C^{\mathrm{T}}B = [9 \quad 8 \quad 10]\begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = [41\,090]$$

es decir, 41 090 centavos o \$410.90.

Problemas

1. Suponga que el huésped 1 permanecerá en la posada por 7 días, el huésped 2 durante 10 días, el huésped 3 por 7 días y el huésped 4 por 5 días. Asuma que los requerimientos diarios de los cuatro y la matriz de costo son los mismos que los dados en el análisis anterior. Encuentre la cantidad total que la posada debe pagar por toda la insulina necesaria para los huéspedes.

2. Suponga que los requerimientos de insulina de los cuatro huéspedes ascienden a 1180 unidades de insulina semilenta, 580 de lenta y 1500 de ultralenta. Asuma que los requerimientos diarios para los cuatro huéspedes son los mismos que en el análisis anterior. Utilizando el método de la matriz inversa en una calculadora gráfica, determine la duración de la estancia de cada huésped si el número total de días para los cuatro huéspedes es de 52.

3. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro huéspedes y la matriz de costo son los mismos que los dados en el análisis anterior. Dada solamente la cantidad total que la posada deba pagar por toda la insulina requerida, ¿es posible determinar la duración de la estancia de cada huésped? ¿Por qué sí o por qué no?

PROGRAMACIÓN LINEAL

5

La frase programación lineal suena como algo que implica la escritura de un código para computadora. Pero aunque la programación lineal con frecuencia se realiza en computadoras, la parte de "programación" del nombre en realidad proviene de la terminología militar de la era de la Segunda Guerra Mundial, durante la cual el entrenamiento, el abastecimiento y los planes de despliegue de unidades eran llamados programas. Cada programa era una solución a un problema de asignación de recursos.

Por ejemplo, suponga que las unidades militares de un frente de combate necesitaban combustible diesel. Cada unidad tiene cierto número de tanques, camiones y otros vehículos; cada unidad utiliza sus vehículos para realizar una misión asignada y cada misión de la unidad tiene alguna relación con la meta global de ganar la campaña. ¿Qué programa de distribución de combustible contribuirá mejor a la victoria global?

Resolver este problema requiere de cuantificar sus diferentes elementos. Calcular el número de galones de combustible y el número de cada tipo de vehículos es fácil, como también lo es la conversión de galones de combustible a las millas que un vehículo puede recorrer. Realizar la cuantificación de la relación entre millas por vehículo y unidades de misión, incluye identificar las restricciones involucradas: el máximo de galones por carga que un camión tanque puede llevar, el número mínimo de millas que cada unidad debe recorrer para alcanzar su objetivo de combate, y así sucesivamente. Los factores cuantitativos adicionales incluyen probabilidades, como las oportunidades de que una unidad gane un combate clave, si realiza maniobras a lo largo de una ruta de viaje en lugar de otra.

La cuantificación de problemas complicados de la vida real con este enfoque es competencia de la llamada investigación de operaciones. La programación lineal, una de las herramientas de investigación de operaciones más antiguas y todavía de las más importantes, se utiliza cuando un problema puede describirse utilizando ecuaciones y desigualdades que son lineales en su totalidad.

Objetivo

Representar en forma geométrica la solución de una desigualdad lineal con dos variables y ampliar esta representación a un sistema de desigualdades lineales.

5.1 Desigualdades lineales con dos variables

Suponga que un consumidor recibe un ingreso fijo de \$60 semanales que utiliza *por completo* en la compra de los productos A y B. Si A cuesta \$2 por kilogramo, B cuesta \$3 por kilogramo y el consumidor compra x kilogramos de A y y kilogramos de B, su costo será $2x + 3y$. Puesto que utiliza en su totalidad los \$60, x y y deben satisfacer

$$2x + 3y = 60, \quad \text{donde} \quad x, y \geq 0$$

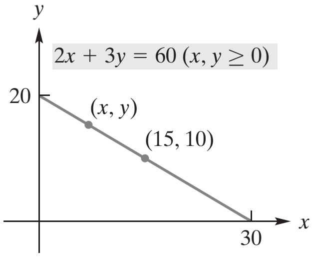


FIGURA 5.1 Recta de presupuesto.

Las soluciones de esta ecuación, llamada *ecuación de presupuesto*, dan las posibles combinaciones de A y B que pueden comprarse con \$60. La gráfica de esta ecuación es la *recta de presupuesto* de la figura 5.1. Observe que (15, 10) pertenece a la recta. Esto significa que si se compran 15 kg de A, entonces deben comprarse 10 kg de B para tener un costo total de \$60.

Por otro lado, suponga que el consumidor no necesariamente desea gastar todos los \$60. En este caso, las posibles combinaciones están descritas por la desigualdad

$$2x + 3y \leq 60, \quad \text{donde} \quad x, y \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Cuando se estudiaron las desigualdades con una variable en el capítulo 1, su solución se representó geométricamente por medio de *intervalos* sobre la recta de los números reales. Sin embargo, para una desigualdad con dos variables, como la desigualdad (1), regularmente la solución está representada por una *región* en el plano coordenado. Se encontrará la región correspondiente a la desigualdad (1) después de considerar a las desigualdades en general.

> **Definición**
>
> Una ***desigualdad lineal*** con las variables x y y puede escribirse en una de las siguientes formas:
>
> $$ax + by + c < 0 \quad ax + by + c \leq 0 \quad ax + by + c > 0 \quad ax + by + c \geq 0$$
>
> donde a, b y c son constantes y a y b no son ambas cero.

En forma geométrica, la solución (o gráfica) de una desigualdad lineal en x y y consiste en todos los puntos (x, y) ubicados en el plano cuyas coordenadas satisfacen dicha desigualdad. Por ejemplo, una solución de $x + 3y < 20$ es el punto $(-2, 4)$, puesto que la sustitución da

$$-2 + 3(4) < 20,$$
$$10 < 20, \quad \text{lo cual es verdadero}$$

Es claro que existe un número infinito de soluciones, esto es común para toda desigualdad lineal.

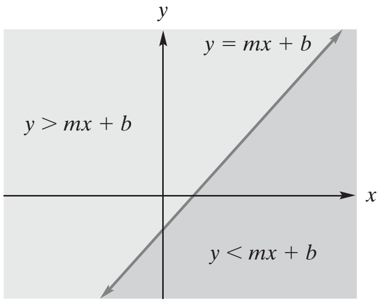


FIGURA 5.2 Una recta no vertical determina dos semiplanos.

Para considerar a las desigualdades lineales en general, primero note que la gráfica de una recta no vertical $y = mx + b$ separa al plano en tres partes distintas (vea la figura 5.2):

1. La propia recta consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
2. La región ubicada *por encima* de la recta consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $y > mx + b$ (esta región se conoce como *semiplano abierto*).
3. El semiplano abierto situado *por debajo* de la recta consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

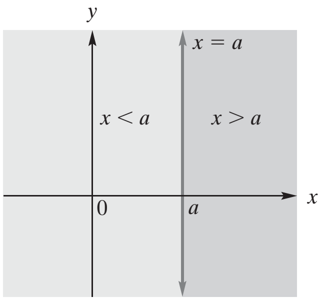


FIGURA 5.3 Una recta vertical determina dos semiplanos.

En la situación donde la desigualdad estricta "<" se reemplaza por "≤", la solución de $y \leq mx + b$ consiste en la recta $y = mx + b$ así como en el semiplano situado por debajo de dicha recta. En este caso, se dice que la solución es un *semiplano cerrado.* Se puede hacer una afirmación semejante cuando ">" se reemplaza por "≥". Para una recta vertical $x = a$ (vea la figura 5.3), se habla de un semiplano a la derecha $(x > a)$ de la recta o a la izquierda $(x < a)$. Como cualquier desigualdad lineal (con dos variables) puede expresarse en una de las formas que se han analizado y puede decirse que *la solución de una desigualdad lineal debe ser un semiplano*.

Para aplicar estos hechos, resolvamos la desigualdad lineal

$$2x + y < 5$$

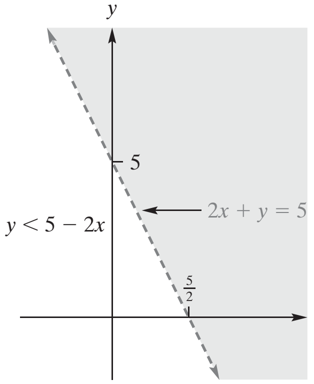


FIGURA 5.4 Gráfica de $2x + y < 5$.

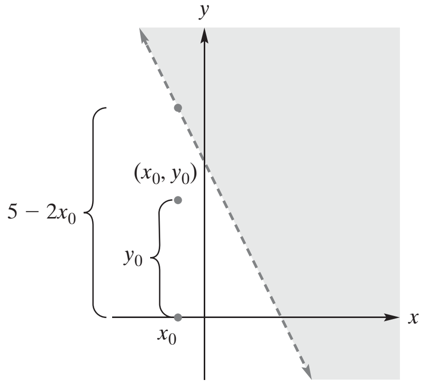


FIGURA 5.5 Análisis de un punto que satisface $y < 5 - 2x$.

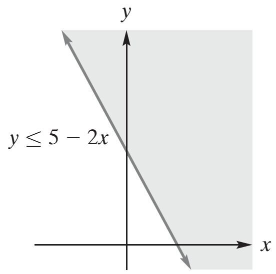


FIGURA 5.6 Gráfica de $y \leq 5 - 2x$.

Del análisis previo se sabe que la solución es un semiplano. Para encontrarlo, se inicia reemplazando el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y después se grafica la *recta* resultante, $2x + y = 5$. Esto es fácil de hacer al seleccionar dos puntos sobre la recta —por ejemplo, las intersecciones de la recta con los ejes coordenados o bien otros dos puntos (x, y) que satisfagan la igualdad $(\frac{5}{2}, 0)$ y $(0, 5)$. (Vea la figura 5.4). Debido a que los puntos sobre la recta no satisfacen la desigualdad "<", se utiliza una línea *punteada* para indicar que la recta no forma parte de la solución. Ahora debe determinarse si la solución es el semiplano situado por *encima* de la recta o el semiplano por *debajo* de la recta. Esto puede hacerse resolviendo la desigualdad para y. Una vez que y esté aislada, el semiplano "solución" apropiado será evidente. Se tiene que

$$y < 5 - 2x$$

En forma geométrica, la solución de una desigualdad lineal con una variable es un intervalo sobre la recta, pero la solución de una desigualdad lineal con *dos* variables es una *región* en el plano.

A partir del enunciado 3 ya mencionado, se concluye que la solución consiste en el semiplano situado por *debajo* de la recta. La parte de la región que *no* satisface la desigualdad está sombreada en la figura 5.4. A partir de aquí, al graficar desigualdades se sombreará la parte de la región que *no* satisfaga la condición. Por lo tanto, si (x_0, y_0) es *cualquier* punto localizado en la región no sombreada, entonces su ordenada y_0 es menor que el número $5 - 2x_0$. (Vea la figura 5.5). Por ejemplo, $(-2, -1)$ está en la región y

$$-1 < 5 - 2(-2)$$
$$-1 < 9$$

APLÍQUELO ▶

1. Para conseguir dinero extra, usted fabrica dos tipos de imanes para refrigeradores, tipo A y tipo B. Usted tiene un gasto inicial de arranque de \$50. El costo de producción para los imanes tipo A es de \$0.90 por imán y el costo de producción para el imán tipo B es de \$0.70 por imán. El precio del tipo A es de \$2.00 por pieza y el precio del tipo B es de \$1.50 por pieza. Sea x el número de imanes tipo A y y el número de imanes tipo B que se producen y venden. Escriba una desigualdad que muestre que el ingreso es mayor que el costo. Resuelva la desigualdad y describa la región. También describa qué significa este resultado respecto de los imanes.

Si, en lugar de esto, la desigualdad original hubiera sido $y \leq 5 - 2x$, entonces la recta $y = 5 - 2x$ también se habría incluido en la solución. Lo anterior se indicaría utilizando una línea continua en lugar de una línea punteada. Esta solución, que es un semiplano que incluye a la recta, se muestra en la figura 5.6. Tenga en mente que **una recta continua *está* incluida en la solución mientras que una recta punteada *no lo está*.**

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Encuentre la región definida por la desigualdad $y \leq 5$.

Solución: Debido a que x no aparece, se supone que la desigualdad es verdadera para todos los valores de x. La región consiste en la recta $y = 5$ junto con el semiplano situado por debajo de ella. (Vea la figura 5.7, donde la solución es la región *no* sombreada junto con la línea).

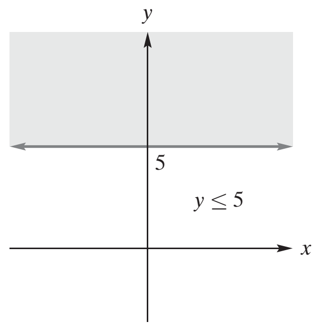


FIGURA 5.7 Gráfica de $y \leq 5$.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $2(2x - y) < 2(x + y) - 4$.

Solución: Primero se resuelve la desigualdad para y de modo que el semiplano apropiado sea obvio. La desigualdad es equivalente a

$$4x - 2y < 2x + 2y - 4$$
$$4x - 4y < 2x - 4$$

$$-4y < -2x - 4$$

$$y > \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{al dividir ambos lados entre } -4 \text{ e invertir el sentido de la desigualdad}$$

Mediante una recta punteada, ahora se hace el bosquejo de $y = (x/2) + 1$ señalando que sus intersecciones con los ejes coordenados son (0, 1) y (−2, 0). Debido a que el símbolo de la desigualdad es >, se sombrea el semiplano por debajo de la recta. Piense en el área sombreada como un tachado de los puntos que no desea. (Vea la figura 5.8). Cada punto de la región no sombreada es una solución.

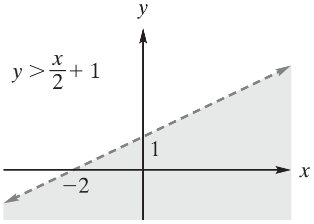


FIGURA 5.8 Gráfica de $y > \frac{x}{2} + 1$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Sistemas de desigualdades

La solución de un *sistema* de desigualdades consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades dadas. En forma geométrica, es la región común para todas las regiones determinadas por las desigualdades dadas. Por ejemplo, resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + y > 3 \\ x \geq y \\ 2y - 1 > 0 \end{cases}$$

Primero, se escribe de nuevo cada desigualdad de modo que y esté aislada. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} y > -2x + 3 \\ y \leq x \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Enseguida, se hace el bosquejo de las rectas correspondientes $y = -2x + 3$, $y = x$ y $y = \frac{1}{2}$, usando rectas punteadas para la primera y tercera y una línea continua para la segunda. Después se sombrea la región que está por debajo de la primera recta, la región que está sobre la segunda línea y la región que está por debajo de la tercera recta. La región no sombreada (vea la figura 5.9) junto con cualquier línea continua que delimite una región son puntos comprendidos en la solución del sistema de desigualdades.

¡ADVERTENCIA!

El punto donde la gráfica de $y = x$ se interseca con la de $y = -2x + 3$ no está incluido en la solución. ¿Por qué?

EJEMPLO 3 Resolución de un sistema de desigualdades lineales

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} y \geq -2x + 10 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$$

Solución: La solución consiste en todos los puntos que están simultáneamente sobre o por encima de la recta $y = -2x + 10$ y sobre o por encima de la recta $y = x - 2$. Es la región no sombreada en la figura 5.10.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

APLÍQUELO ▶

2. Una tienda vende dos tipos de cámara fotográfica. Para cubrir los gastos generales, debe vender al menos 50 cámaras por semana y, para satisfacer los requerimientos de la distribución, debe vender al menos el doble del tipo I que del tipo II. Escriba un sistema de desigualdades para representar la situación. Sea x el número de cámaras tipo I que el almacén vende en una semana y y el número de cámaras tipo II que vende también en una semana. Determine la región descrita por el sistema lineal de desigualdades.

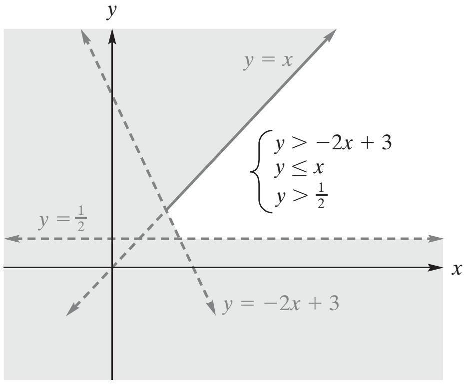


FIGURA 5.9 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

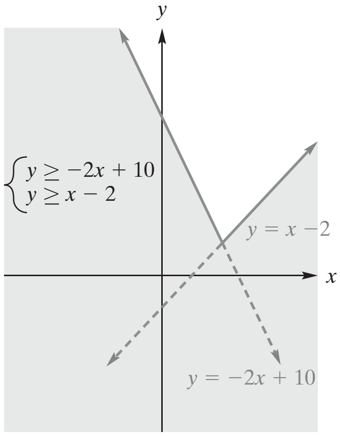


FIGURA 5.10 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

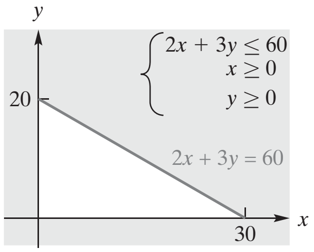


FIGURA 5.11 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema de desigualdades lineales

Encuentre la región descrita por

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Este sistema se relaciona con la desigualdad (1) del inicio de esta sección. La primera desigualdad es equivalente a $y \leq -\frac{2}{3}x + 20$. Las últimas dos desigualdades restringen la solución a los puntos que están sobre o a la derecha del eje *y*, y al mismo tiempo, sobre o por encima del eje *x*. La región deseada es la que no está sombreada en la figura 5.11.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

PROBLEMAS 5.1

En los problemas del 1 al 24, resuelva las desigualdades.

1. $3x + 4y > 2$

2. $3x - 2y \geq 12$

3. $3x - 5y \leq 11$

4. $y > 6 - 2x$

5. $-x \leq 2y - 4$

6. $3x + 5y \geq 12$

7. $3x + y < 0$

8. $5x + 2y < 76$

9. $\begin{cases} 3x - 2y < 6 \\ x - 3y > 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y > -6 \\ 3x - y < 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2y - 3x < 6 \\ x < 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y < 1 \\ y - x < 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 2 \geq y \\ 2x \leq 3 - 2y \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2y < 4x + 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y > 4 \\ x < 2 \\ y > -5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 3x + 2y \leq 14 \\ x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} y < 2x + 4 \\ x \geq -2 \\ y < 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x \leq y \\ y \leq 5x + 2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y > 1 \\ 3x - 5 \leq y \\ y < 2x \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x - 3y > -12 \\ 3x + y > -6 \\ y > x \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5y - 2x \leq 10 \\ 4x - 6y \leq 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Si un consumidor no quiere gastar más de P en la compra de las cantidades x y y de dos productos que tienen precios de p_1 y p_2 por unidad, respectivamente, entonces $p_1x + p_2y \leq P$, donde $x, y \geq 0$. En los problemas 25 y 26, encuentre geométricamente las posibles combinaciones de dichas compras determinando la solución de este sistema para los valores dados de p_1, p_2 y P.

25. $p_1 = 6, p_2 = 4, P = 20$.

26. $p_1 = 7, p_2 = 3, P = 25$.

27. Si un fabricante desea comprar un *total* de no más de 100 libras de producto Z de los proveedores A y B, establezca un sistema de desigualdades que describa las combinaciones posibles de las cantidades que pueden comprarse a cada proveedor. Haga el bosquejo de la solución en el plano de coordenadas.

28. Manufactura La compañía Cherry produce dos modelos de computadoras portátiles: el modelo Bing de 8.9 pulgadas y el modelo Lambert de 10.1 pulgadas. Sea *x* el número de modelos Bing y *y* el número de modelos Lambert producidos a la semana en la fábrica Halifax. Si la fábrica puede producir semanalmente a lo más 750 modelos Bing y Lambert en forma combinada, escriba las desigualdades que describen esta situación.

29. Manufactura Una compañía de sillas produce dos modelos de silla. El modelo Secuoya requiere 3 horas de trabajo para ensamblarlo y $\frac{1}{2}$ hora de trabajo para pintarlo. El modelo Saratoga requiere 2 horas de trabajo para ensamblarlo y 1 hora de trabajo para pintarlo. El número máximo de horas de trabajo disponibles para ensamblar sillas es de 240 por día y el máximo de horas de trabajo disponibles para pintar sillas es de 80 diarias. Escriba un sistema de desigualdades lineales para describir la situación. Sea *x* el número de modelos Secuoya producidos en un día y *y* el número de modelos Saratoga producidos en un día. Determine la región descrita por este sistema de desigualdades lineales.

Objetivo

Establecer la naturaleza de un problema de programación lineal, introducir la terminología asociada y resolverlo geométricamente.

5.2 Programación lineal

Algunas veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a algunas restricciones en el dominio *natural* de una función. Es importante recordar del capítulo 2 que el dominio de una función $f : X \longrightarrow Y$, es el conjunto de todas las *x* presentes en *X* para las que la regla *f* está definida, si no existen instrucciones específicas que lo modifiquen. Pero también se vio, en el capítulo 2, que con frecuencia se desean restringir los valores de *x* más allá de lo matemáticamente necesario para captar los aspectos de un problema práctico. Por ejemplo, a menudo los precios deben ser números no negativos y las cantidades deben ser *enteros* no negativos. Los problemas presentados en este capítulo incluyen condiciones adicionales en el dominio, llamadas *restricciones*, las cuales en este capítulo se establecerán como *desigualdades lineales* en el sentido que se estudió en la última sección. Por ejemplo, un fabricante puede desear maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones de producción impuestas por las limitaciones en el uso de maquinaria y mano de obra, donde esta última se encuentra determinada por desigualdades lineales.

Ahora se considerará cómo resolver tales problemas cuando la función que será maximizada o minimizada es *lineal*. Una **función lineal en** x **y** y tiene la forma

$$P = P(x, y) = ax + by$$

donde a y b son constantes. En primer lugar, debe señalarse que una función lineal en x y y solo es una función de dos variables, como las presentadas en la sección 2.8, y que el dominio natural para tal función es el conjunto $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ de todos los pares ordenados (x, y) con x y y en $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, dado el tipo de aplicaciones que se tienen en mente, el dominio se restringe de inmediato a $[0, \infty) \times [0, \infty)$, lo cual significa que inmediatamente se restringe a $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Pronto se darán ejemplos de restricciones lineales adicionales que aparecen en lo que se denomina *problemas de programación lineal*.

¡ADVERTENCIA!

Este uso de la palabra *lineal* es todavía más restringido de lo que se ha empleado hasta ahora. Tenga en cuenta que no se tiene un término constante (distinto de cero) en P.

En un problema de programación lineal, la función que debe ser maximizada o minimizada se llama **función objetivo**. Su dominio se define como el conjunto de soluciones del sistema de restricciones lineales dadas en el problema. Al conjunto de todas las soluciones del sistema de restricciones lineales se le llama conjunto de **puntos factibles**. Por lo general, existe un número infinito de puntos factibles (puntos en el dominio), pero el objetivo del problema es encontrar un punto que optimice el valor de la función objetivo. Optimizar es **maximizar** o bien **minimizar**, dependiendo de la naturaleza del problema.

¡ADVERTENCIA!

En el estudio de la programación lineal se usa una gran cantidad de terminología, por lo que se recomienda dominarla en cuanto sea introducida.

Ahora se dará un enfoque geométrico de la programación lineal. En la sección 5.4 se presentará un enfoque matricial que permitirá trabajar con más de dos variables y, por lo tanto, con mayor variedad de problemas.

Considere el problema siguiente. Una compañía produce dos tipos de abrelatas, manuales y eléctricos. Cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquinas, A, B y C. En la tabla 5.1 se proporciona la información relacionada con la fabricación de estos abrelatas. Cada abrelatas manual requiere del uso de la máquina A durante 2 horas, de la máquina B por 1 hora y de la máquina C otra hora. Un abrelatas eléctrico requiere 1 hora de la máquina A, 2 horas de la B y 1 hora de la C. Además, suponga que el número máximo de horas disponibles por mes para el uso de las máquinas A, B y C es de 180, 160 y 100, respectivamente. La utilidad por cada abrelatas manual es de \$4 y por cada eléctrico de \$6. Si la compañía vende todos los abrelatas que puede producir, ¿cuántos de cada tipo debe producir con el fin de maximizar la utilidad mensual?

Tabla 5.1

	Manual	Eléctrico	Horas disponibles
A	2 hr	1 hr	180
B	1 hr	2 hr	160
C	1 hr	1 hr	100
Utilidad por unidad	\$4	\$6	

Para resolver el problema, considere que x y y denotan el número de abrelatas manuales y eléctricos, respectivamente, fabricados en un mes. Como el número de artículos producidos no es negativo,

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

Para la máquina A, el tiempo necesario para trabajar en x abrelatas manuales es $2x$ horas y el tiempo para trabajar en y abrelatas eléctricos es $1y$ horas. La suma de estos tiempos no puede ser mayor que 180, de modo que

$$2x + y \leq 180$$

De manera similar, las restricciones para las máquinas B y C dan

$$x + 2y \leq 160 \quad \text{y} \quad x + y \leq 100$$

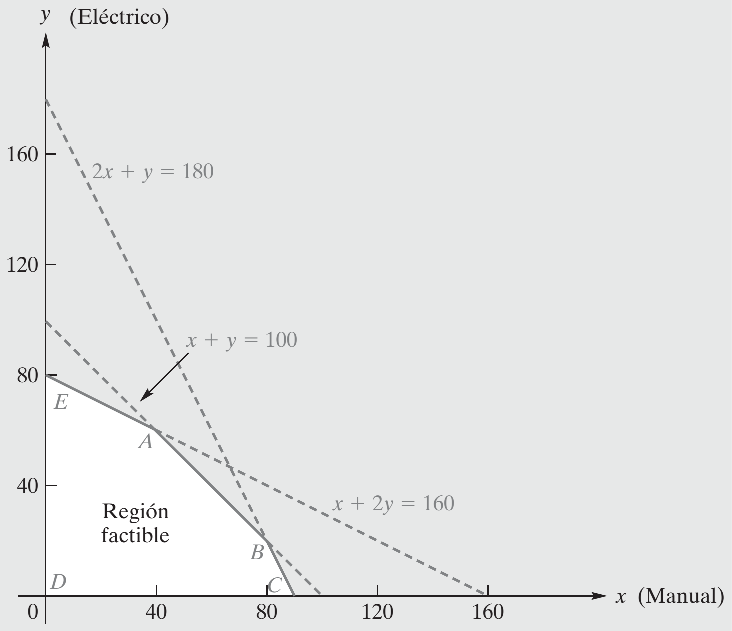


FIGURA 5.12 Región factible.

La utilidad es una función de x y y, está dada por la *función de utilidad*

$$P = 4x + 6y$$

En resumen, se desea maximizar la *función objetivo*

$$P = 4x + 6y \tag{1}$$

sujeta a las condiciones de que x y y deben ser soluciones del sistema de restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 180 & (2) \\ x + 2y \leq 160 & (3) \\ x + y \leq 100 & (4) \\ x \geq 0 & (5) \\ y \geq 0 & (6) \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene un problema de programación lineal. Las restricciones (5) y (6) se llaman **condiciones de no negatividad**. La región que satisface de manera simultánea las restricciones (2) a (6) *no* está sombreada en la figura 5.12. Cada punto de esta región representa un punto factible y al conjunto de todos los puntos factibles se le llama **región factible**. Así, *región factible* es solo otra terminología útil para denominar el *dominio* de la función objetivo en el contexto de los problemas de programación lineal. Aunque existe un número infinito de puntos factibles, debe encontrarse uno en el que la función objetivo asuma un valor máximo.

Como la función objetivo, $P = 4x + 6y$, es equivalente a

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{P}{6}$$

define una familia de rectas paralelas, para cada posible valor de P, cada una con pendiente de $-2/3$ e intersección y $(0, P/6)$. Por ejemplo, si $P = 600$, entonces se obtiene la recta

$$y = -\frac{2}{3}x + 100$$

que se muestra en la figura 5.13. Esta recta, llamada **línea de isoutilidad**, es ejemplo de una curva de nivel como las presentadas en la sección 2.8. Ésta proporciona todas las combinaciones posibles (x, y) con las que se obtiene la utilidad, \$600. Observe que esta línea de isoutilidad no tiene puntos en común con la región factible, mientras que la línea de isoutilidad para $P = 300$ tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. Ahora se buscará un elemento de la familia de rectas paralelas que tenga un punto factible y cuyo valor de P sea máximo. *Este será la recta cuya intersección y sea la más lejana del origen*

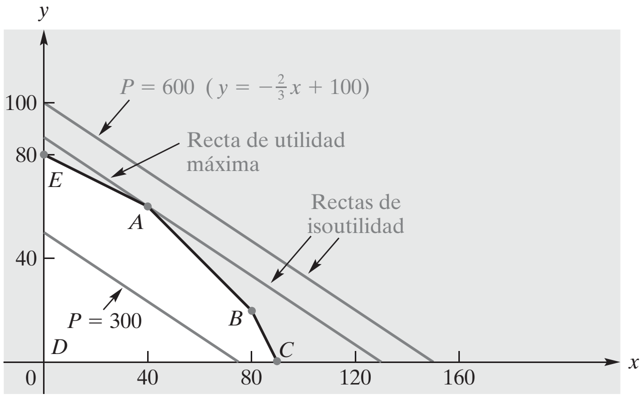


FIGURA 5.13 Rectas de isoutilidad y región factible.

(lo que da un valor máximo de P) y que al mismo tiempo tenga al menos un punto en común con la región factible. No es difícil observar que tal recta contendrá al *vértice A*. Cualquier recta de isoutilidad con una utilidad mayor no contendrá puntos de la región factible.

A partir de la figura 5.12, observamos que A pertenece a las rectas $x + y = 100$ y $x + 2y = 160$. Así, sus coordenadas pueden hallarse resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 2y = 160 \end{cases}$$

Esto da $x = 40$ y $y = 60$. Sustituyendo estos valores en $P = 4x + 6y$, se encuentra que la utilidad máxima sujeta a las restricciones es de \$520, la cual se obtiene al producir 40 abrelatas manuales y 60 eléctricos cada mes.

Cuando una región factible puede estar contenida dentro de un círculo, como la región de la figura 5.13, se denomina **región factible acotada**. De otra manera es **no acotada**. Cuando una región factible contiene al menos un punto, se dice que es **no vacía**; en caso contrario es **vacía**. Así, la región de la figura 5.13 es una región factible acotada no vacía.

Puede demostrarse que:

> Una función lineal definida sobre una región factible acotada no vacía tiene un valor máximo (mínimo) que puede hallarse en un vértice.

Este enunciado proporciona una forma de encontrar una solución óptima sin tener que dibujar las rectas de isoutilidad, como se hizo antes. Basta con evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y después seleccionar un vértice en el que la función sea óptima.

Por ejemplo, en la figura 5.13 los vértices son A, B, C, D y E. Se encuentra, como antes, que A es $(40, 60)$. Para encontrar B, a partir de la figura 5.12 observamos que debe resolverse de manera simultánea $2x + y = 180$ y $x + y = 100$. Esto da el punto $B = (80, 20)$. De manera similar, se obtienen todos los siguientes vértices:

$$A = (40, 60) \qquad B = (80, 20) \qquad C = (90, 0)$$
$$D = (0, 0) \qquad E = (0, 80)$$

Ahora se evalúa la función objetivo $P = 4x + 6y$ en cada uno de los puntos:

$$P(A) = 4(40) + 6(60) = 520$$
$$P(B) = 4(80) + 6(20) = 440$$
$$P(C) = 4(90) + 6(0) = 360$$
$$P(D) = 4(0) + 6(0) = 0$$
$$P(E) = 4(0) + 6(80) = 480$$

Así, P tiene un valor máximo de 520 en A, donde $x = 40$ y $y = 60$.

La solución óptima para un problema de programación lineal está dada por el valor óptimo de la función objetivo que corresponde al punto donde ocurre dicho valor.

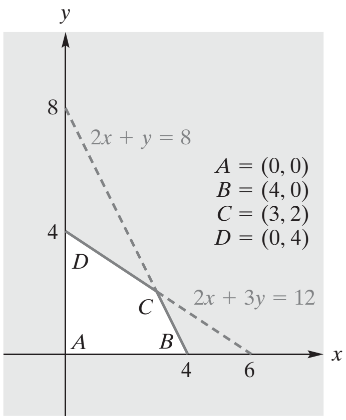


FIGURA 5.14 A, B, C y D son puntos vértice de la región factible.

EJEMPLO 1 Resolución de un problema de programación lineal

Maximice la función objetivo $P = 3x + y$ sujeta a las restricciones

$$2x + y \leq 8$$
$$2x + 3y \leq 12$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Solución: En la figura 5.14 la región factible es no vacía y acotada. Así que P es máxima en uno de los cuatro vértices. Las coordenadas de A, B y D son evidentes por inspección. Para determinar las coordenadas de C, resolvemos de manera simultánea las ecuaciones $2x + y = 8$ y $2x + 3y = 12$, que dan $x = 3$, $y = 2$. Así,

$$A = (0, 0) \quad B = (4, 0) \quad C = (3, 2) \quad D = (0, 4)$$

Evaluando P en estos puntos, se obtiene

$$P(A) = 3(0) + 0 = 0$$
$$P(B) = 3(4) + 0 = 12$$
$$P(C) = 3(3) + 2 = 11$$
$$P(D) = 3(0) + 4 = 4$$

De modo que el valor máximo de P, sujeto a las restricciones, sea 12 y ocurra cuando $x = 4$ y $y = 0$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Región factible vacía

El ejemplo siguiente ilustra una situación en la que no existe solución óptima.

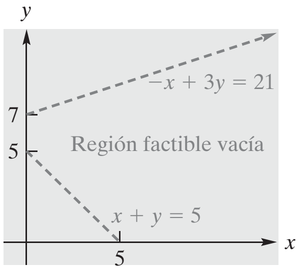


FIGURA 5.15 Región factible vacía.

EJEMPLO 2 Región factible vacía

Minimice la función objetivo $Z = 8x - 3y$ sujeta a las restricciones

$$-x + 3y = 21$$
$$x + y \leq 5$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Solución: Observe que la primera restricción, $-x + 3y = 21$, es una *igualdad.* En la figura 5.15 se muestra la parte de las rectas $-x + 3y = 21$ y $x + y = 5$ para las cuales $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Un punto factible (x, y) debe tener $x \geq 0$ y $y \geq 0$, además debe estar sobre la recta superior y sobre o por debajo de la recta inferior (porque $y \leq 5 - x$). Sin embargo, no existen tales puntos. De modo que la región factible está *vacía* y, por lo tanto, este problema *no* tiene solución óptima.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

La situación del ejemplo 2 puede hacerse más general:

Siempre que la región factible de un problema de programación lineal esté vacía, no existe solución óptima.

Región factible no acotada

Suponga que la región factible está definida por:

$$y = 2$$
$$x \geq 0$$
$$Z \geq 0$$

Esta región es la parte de la recta horizontal $y = 2$ indicada en la figura 5.16. Como la región no puede estar contenida dentro de un círculo, es *no acotada.* Considere maximizar

$$Z = x + y$$

sujeta a las restricciones precedentes. Como $y = 2$, entonces $Z = x + 2$. Es claro que cuando x aumenta sin límite, lo hace también Z. Por lo tanto, ningún punto factible maximiza Z, de modo que no existe solución óptima. En este caso, se dice que la solución es "no acotada". Por otra parte, suponga que se quiere *minimizar* $Z = x + y$ sobre la misma región. Como $Z = x + 2$, será mínima cuando x sea lo más pequeña posible, esto es, cuando $x = 0$. Esto da un valor mínimo de $Z = x + y = 0 + 2 = 2$, y la solución óptima es el vértice (0, 2).

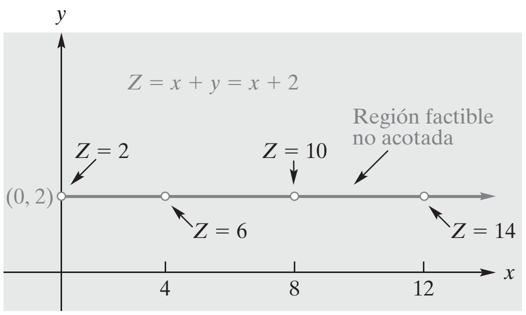


FIGURA 5.16 Región factible no acotada en la que Z no tiene máximo.

En general, puede demostrarse que:

Si una región factible es no acotada, y *si* la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces el valor ocurre en un vértice.

EJEMPLO 3 Región factible no acotada

Un agricultor va a comprar fertilizante que contiene tres nutrientes: A, B y C. Los mínimos necesarios son 160 unidades de A, 200 unidades de B y 80 unidades de C. En el mercado existen dos marcas muy aceptadas de fertilizantes. Crece Rápido cuesta \$8 una bolsa, contiene 3 unidades de A, 5 unidades de B y 1 unidad de C. Crece Fácil cuesta \$6 cada bolsa y contiene 2 unidades de cada nutrimento. Si el agricultor desea minimizar el costo mientras se satisfacen los requerimientos de nutrimentos, ¿cuántas bolsas de cada marca debe comprar? La información se resume como sigue:

	Crece Rápido	Crece Fácil	Unidades requeridas
A	3 unidades	2 unidades	160
B	5 unidades	2 unidades	200
C	1 unidad	2 unidades	80
Costo por bolsa	\$8	\$6	

Solución: Sea x el número de bolsas de Crece Rápido que se comprarán y y el número de bolsas de Crece Fácil que también se comprarán. Entonces, se desea *minimizar* la función de costo

$$C = 8x + 6y \qquad (7)$$

sujeta a las restricciones

$$3x + 2y \geq 160 \tag{8}$$

$$5x + 2y \geq 200 \tag{9}$$

$$x + 2y \geq 80 \tag{10}$$

$$x \geq 0 \tag{11}$$

$$y \geq 0 \tag{12}$$

La región factible que satisface las restricciones (8) a (12) no está sombreada en la figura 5.17, junto con las *rectas de isocosto* para $C = 400$ y $C = 600$. La región factible es no acotada.

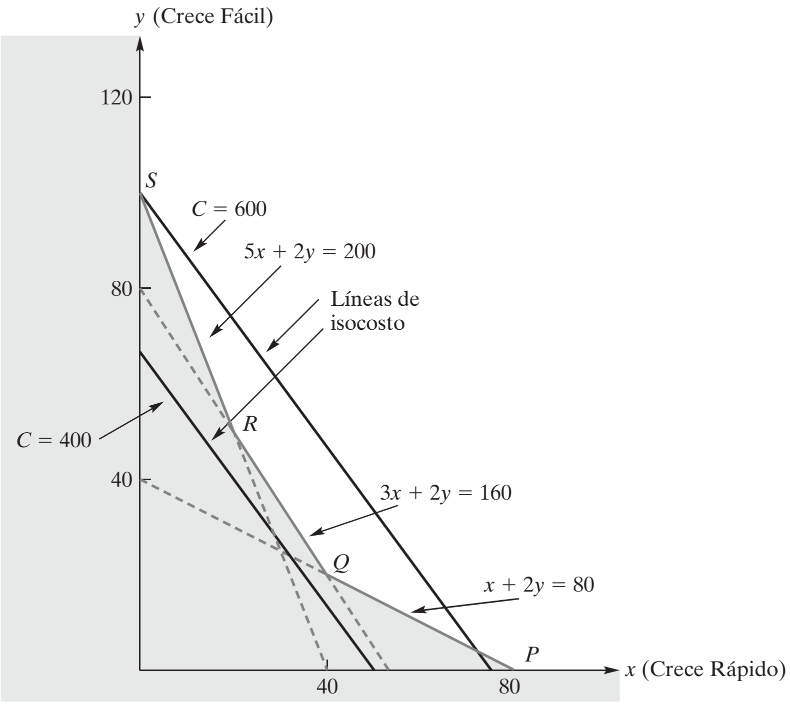


FIGURA 5.17 Costo mínimo en el vértice Q de la región factible no acotada.

El miembro de la familia de rectas $C = 8x + 6y$ que da un costo mínimo, sujeto a las restricciones, interseca a la región factible en el vértice Q. Aquí se elige la línea de isocosto cuya intersección con el eje y fue *más cercana* al origen y tiene al menos un punto en común con la región factible. Las coordenadas de B se encuentran al resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = 40$ y $y = 20$ dan un costo mínimo de \$440. El agricultor debe comprar 40 bolsas de Crece Rápido y 20 de Crece Fácil.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

En el ejemplo 3, se encuentra que la función $C = 8x + 6y$ tiene un valor mínimo en un vértice de la región factible no acotada. Por otra parte, suponga que se quiere *maximizar* C en esa región y para ello se considera la opción de evaluar C en todos los vértices. Estos puntos son:

$$P = (80, 0) \quad Q = (40, 20) \quad R = (20, 50) \quad S = (0, 100)$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} C(P) &= 8(80) + 6(0) = 640 \\ C(Q) &= 8(40) + 6(20) = 440 \\ C(R) &= 8(20) + 6(50) = 460 \\ C(S) &= 8(0) + 6(100) = 600 \end{aligned}$$

Una conclusión apresurada sería que el valor máximo de C es 640. Esto es *falso*. *No* existe valor máximo porque las líneas de isocosto con valores arbitrariamente grandes de C intersecan a la región factible.

¡ADVERTENCIA!

Cuando se trabaja con una región factible no acotada, no se concluye simplemente que una solución óptima existe en un vértice, puesto que podría no haber solución óptima.

PROBLEMAS 5.2

1. Maximizar

$$P = 5x + 7y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 45 \\ x - 3y &\geq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Maximizar

$$P = 3x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 70 \\ x + 3y &\leq 240 \\ x + 3y &\leq 90 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar

$$Z = 4x - 6y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\leq 7 \\ 3x - y &\leq 3 \\ x + y &\geq 5 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Minimizar

$$Z = x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - y &\geq 0 \\ 4x + 3y &\geq 12 \\ 9x + 11y &\leq 99 \\ x &\leq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = 4x - 10y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - 4y &\geq 4 \\ 2x - y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Minimizar

$$Z = 20x + 30y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 10 \\ 3x + 4y &\leq 24 \\ 8x + 7y &\geq 56 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Minimizar

$$C = 5x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x - y &\geq -2 \\ 4x + 3y &\leq 12 \\ x - y &= -1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Maximizar

$$Z = 0.4x - 0.2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x - 5y &\geq -3 \\ 2x - y &\leq 5 \\ 3x + y &= 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Minimizar

$$C = 3x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 5 \\ 3x + y &\geq 4 \\ x + 2y &\geq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Minimizar

$$C = 2x + 2y$$

sujeta a

$$x + 2y \geq 80$$
$$3x + 2y \geq 160$$
$$5x + 2y \geq 200$$
$$x, y \geq 0$$

11. Maximizar

$$Z = 10x + 2y$$

sujeta a

$$x + 2y \geq 4$$
$$x - 2y \geq 0$$
$$x, y \geq 0$$

12. Minimizar

$$Z = -2x + y$$

sujeta a

$$x \geq 2$$
$$3x + 5y \geq 15$$
$$x - y \geq -3$$
$$x, y \geq 0$$

13. Producción para utilidad máxima Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos nuevos juguetes, camiones y perinolas, con base en la información concerniente a sus tiempos de producción dados en la tabla que sigue:

	Máquina A	Máquina B	Acabado
Camión	2 hr	3 hr	5 hr
Perinola	1 hr	1 hr	1 hr

Por ejemplo, cada camión requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas disponibles empleadas por semana son: para operación de la máquina A, 80 horas; para la B, 50 horas; para acabado, 70 horas. Si las utilidades obtenidas por cada camión y cada perinola son de \$7 y \$2, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada tipo debe producir por semana el fabricante con el fin de maximizar la utilidad? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

14. Producción para utilidad máxima Un fabricante produce dos tipos de reproductores de video: Vista y Xtreme. Para su producción, los aparatos requieren del uso de dos máquinas, A y B. El número de horas necesarias para ambos está indicado en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Vista	1 hr	2 hr
Xtreme	3 hr	2 hr

Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día y las utilidades en los modelos Vista y Xtreme son de \$50 y \$80, respectivamente, ¿cuántos reproductores de cada tipo deben producirse por día para obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

15. Formulación de dieta Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y una unidad de proteínas. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidad y el B \$0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

16. Nutrientes en fertilizantes Un agricultor comprará fertilizantes que contienen tres nutrientes: A, B y C. Los requerimientos mínimos semanales de éstos son 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos mezclas de fertilizantes de gran aceptación en el mercado. La mezcla I cuesta \$8 por bolsa y contiene 2 unidades de A, 6 de B y 4 de C. La mezcla II cuesta \$10 por bolsa, con 2 unidades de A, 2 de B y 12 de C. ¿Cuántas bolsas de cada mezcla debe comprar el agricultor a la semana para minimizar el costo de satisfacer sus requerimientos de nutrientes?

17. Extracción de minerales Una compañía extrae minerales de dos menas. El número de libras de los minerales A y B que pueden extraerse por cada tonelada de las menas I y II se dan en la tabla siguiente junto con los costos por tonelada de las menas:

	Mena I	Mena II
Mineral A	80 lb	160 lb
Mineral B	140 lb	40 lb
Costo por tonelada	\$60	\$80

Si la compañía debe producir al menos 4000 lb de A y 2000 lb de B, ¿cuántas toneladas de cada mena deben procesarse con el objetivo de minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

18. Programación de producción Una compañía petrolera que tiene dos refinerías necesita al menos 8000, 14 000 y 5000 barriles de petróleo de grados bajo, medio y alto, respectivamente. Cada día, la refinería I produce 2000 barriles de grado bajo, 3000 barriles de grado medio y 1000 barriles de grado alto, mientras que la refinería II produce 1000 barriles de cada uno de los grados alto y bajo y 2000 barriles de petróleo de grado medio. Si operar la refinería I cuesta \$25 000 por día y operar la refinería II \$20 000 diarios, ¿cuántos días debe operarse cada refinería para satisfacer los requerimientos de producción a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo? (Suponga que existe un costo mínimo).

19. Costo de construcción Una compañía química está diseñando una planta para producir dos tipos de polímeros, P_1 y P_2. La planta debe tener una capacidad de producción de al menos 100 unidades de P_1 y 420 unidades de P_2 cada día. Existen dos posibles diseños para las cámaras principales de reacción que se incluirán en la planta. Cada cámara de tipo A cuesta \$600 000 y es capaz de producir 10 unidades de P_1 y 20 unidades de P_2 por día; el tipo B es un diseño más económico, cuesta \$300 000 y es capaz de producir 4 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 por día. Debido a los costos de operación, es necesario tener al menos cuatro cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar el costo de construcción y satisfacer el programa de producción requerido? (Suponga que existe un costo mínimo).

20. Control de la contaminación Debido a nuevas reglamentaciones federales sobre contaminación, una compañía química ha introducido en sus plantas un nuevo y más caro proceso con el fin de complementar o reemplazar un proceso anterior para la fabricación de un producto químico en particular. El proceso anterior descarga 25 gramos de dióxido de carbono y 50 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro de producto químico producido. El nuevo proceso descarga 15 gramos de dióxido de carbono y 40 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro producido. La compañía obtiene una utilidad de \$0.40 y \$0.15 (centavos) por litro en los procesos anterior y nuevo, respectivamente. Si el gobierno le permite a la planta descargar no más de 12 525 gramos de dióxido de carbono y no más de 20 000 gramos de partículas a la atmósfera cada día, ¿cuántos litros de producto químico deben producirse diariamente, por cada uno de los procesos, para maximizar la utilidad diaria? ¿Cuál es la máxima utilidad diaria?

21. Descuento en la construcción El departamento de carreteras ha decidido añadir exactamente 300 kilómetros de carreteras y exactamente 200 de autopistas a su sistema carretero en este año. El precio estándar para construcción de caminos es de \$2 millones por kilómetro de carretera y de \$8 millones por kilómetro de autopista. Solo dos contratistas, las compañías A y B, pueden realizar esta clase de construcción, así que los 500 km de camino deben ser construidos por estas compañías. Sin embargo, la compañía A puede construir a lo más 400 km de camino (carretera y autopista) y la compañía B puede construir a lo más 300 km. Por razones políticas, a cada compañía debe adjudicársele un contrato de al menos \$300 millones (antes de descuentos). La compañía A ofrece un descuento de \$2000 por kilómetro de carretera y de \$6000 por kilómetro de autopista; la compañía B ofrece un descuento de \$3000 por kilómetro de carretera y \$5000 por kilómetro de autopista.

(a) Si x y y representan el número de kilómetros de carretera y autopista, respectivamente, adjudicados a la compañía A, demuestre que el descuento total recibido a partir de ambas compañías está dado por

$$D = 1900 - x + y$$

donde D está en miles.

(b) El departamento de carreteras desea maximizar el descuento total, D. Demuestre que este problema es equivalente al problema de programación lineal dado a continuación, detallando exactamente cómo surgen las primeras seis restricciones:

$$\text{Maximizar } D = 1900 - x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 400 \\ x + y &\geq 500 \\ 2x + 8y &\geq 300 \\ 2x + 8y &\leq 1900 \\ x &\leq 300 \\ y &\leq 200 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(c) Encuentre los valores de x y y que maximizan a D.

En los problemas 22 a 25, redondee sus respuestas a dos decimales.

22. Maximizar

$$Z = 4x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 6x + 2y &\leq 12 \\ 2x + 3y &\geq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

23. Maximizar

$$Z = 14x - 3y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\geq 12.5 - 4x \\ y &\leq 9.3 - x \\ y &\geq 4.7 + 0.8x \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

24. Minimizar

$$Z = 5.1y - 3.5x$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 7.5x + 2y &\geq 35 \\ 2.5x + y &\leq 7.4 \\ 0.6x - y &\geq -0.8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

25. Minimizar

$$Z = 17.3x - 14.4y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 0.73x - y &\leq -2.4 \\ 1.22x - y &\geq -5.1 \\ 0.45x - y &\geq -12.4 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo

Considerar situaciones en las que los problemas de programación lineal tienen más de una solución óptima.

5.3 Soluciones óptimas múltiples[1]

A veces una función objetivo alcanza su valor óptimo en más de un punto factible, en cuyo caso se dice que existen **soluciones óptimas múltiples**. Esto se ilustrará en el ejemplo 1.

---

[1] Esta sección puede omitirse.

APLÍQUELO ▶

3. Suponga que un distribuidor de televisores tiene los almacenes A y B y las bodegas C y D. El costo de enviar un televisor de C a A es de \$18, de C a B de \$9, de D a A es de \$24 y de D a B es de \$15. Suponga que el almacén A ordena 25 televisores y el almacén B 30. También suponga que la bodega C tiene 45 televisores y la bodega D tiene 40 televisores disponibles. Determine la mejor manera de minimizar costos y encuentre el costo mínimo. (*Sugerencia*: Sea x el número de televisores enviados de C a A y y el número de televisores enviados de C a B. Entonces $25 - x$ es el número de televisores enviados de D a A y $30 - y$ el número de televisores enviados de D a B).

EJEMPLO 1 Soluciones óptimas múltiples

Maximice $Z = 2x + 4y$ sujeta a las restricciones

$$x - 4y \leq -8$$
$$x + 2y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$

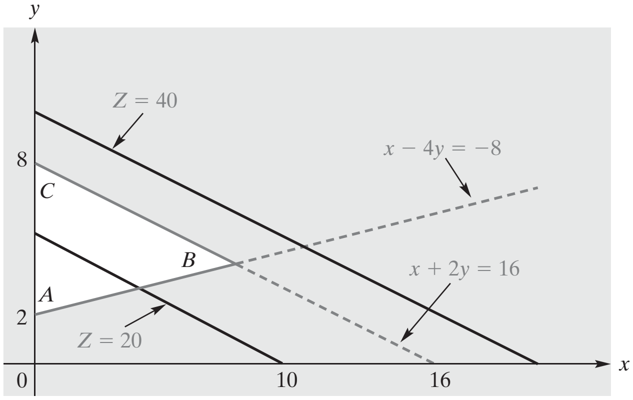


FIGURA 5.18 $Z = 2x + 4y$ se maximiza en cada punto del segmento de recta $\overline{BC}$.

Solución: La región factible aparece en la figura 5.18. Como la región no está vacía y es acotada, Z tiene valor máximo en un vértice. Los vértices son $A = (0, 2)$, $B = (8, 4)$ y $C = (0, 8)$. Al evaluar la función objetivo en:

$$A = (0, 2) \quad B = (8, 4) \quad C = (0, 8)$$

se obtiene

$$Z(A) = 2(0) + 4(2) = 8$$
$$Z(B) = 2(8) + 4(4) = 32$$
$$Z(C) = 2(0) + 4(8) = 32$$

Así, el valor máximo de Z sobre la región es 32 y ocurre en *dos* vértices, B y C. De hecho, este valor máximo también ocurre en *todos* los puntos ubicados sobre el segmento de recta que *une* los puntos B y C, por la siguiente razón. Cada miembro de la familia de rectas $Z = 2x + 4y$ tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$. Además, la recta de la restricción $x + 2y = 16$, que contiene a B y C, también tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$ y, por consiguiente, es paralela a cada miembro de $Z = 2x + 4y$. La figura 5.18 muestra rectas para $Z = 20$ y $Z = 40$. Observe que el miembro de la familia que maximiza Z contiene no solo a B y C, sino también a todos los puntos del segmento de recta $\overline{BC}$. Por esta razón, tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. De modo que este problema de programación lineal tiene un número infinito de soluciones óptimas. De hecho, puede mostrarse que

> Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos vértices en los cuales la función objetivo es óptima, entonces la función también será óptima en todos los puntos (x, y) donde
>
> $$x = (1 - t)x_1 + tx_2$$
> $$y = (1 - t)y_1 + ty_2$$
>
> y
>
> $$0 \leq t \leq 1$$

En este caso, si $(x_1, y_1) = B = (8, 4)$ y $(x_2, y_2) = C = (0, 8)$, entonces Z es máximo en cualquier punto (x, y), donde

$$\begin{aligned} x &= (1-t)8 + t\cdot 0 = 8(1-t) \\ y &= (1-t)4 + t\cdot 8 = 4(1+t) \\ &\text{para} \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas de cualquier punto situado sobre el segmento de recta $\overline{BC}$. En particular, si $t = 0$, entonces $x = 8$ y $y = 4$, lo cual da el vértice $B = (8, 4)$. Si $t = 1$, se obtiene el vértice $C = (0, 8)$. El valor $t = \frac{1}{2}$ da el punto $(4, 6)$. Observe que en $(4, 6)$, $Z = 2(4) + 4(6) = 32$, que es el valor máximo de Z.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

PROBLEMAS 5.3

1. Minimizar

$$Z = 6x + 14y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 14x + 7y &\ge 43 \\ 3x + 7y &\ge 21 \\ -x + y &\ge -5 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Maximizar

$$Z = 2x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x - y &\ge -4 \\ x - 2y &\le 4 \\ x + y &= 6 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar

$$Z = 14x + 21y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\le 12 \\ x + 5y &\le 8 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Minimizar costo Suponga que un vendedor de automóviles tiene salas de exhibición en Atherton y Berkeley y bodegas en Concord y Dublín. El costo de enviar un automóvil de Concord a Atherton es de \$60, de Concord a Berkeley de \$45, de Dublín a Atherton de \$50 y de Dublín a Berkeley de \$35. Suponga que la sala de exhibición de Atherton ordena siete automóviles y la sala de exhibición de Berkeley ordena cuatro. También suponga que en Concord la bodega tiene seis automóviles y que en Dublín hay ocho automóviles disponibles. Encuentre la mejor manera de minimizar el costo y determine el costo mínimo. (*Sugerencia:* Sea x el número de automóviles enviados de Concord a Atherton y y el número de automóviles enviados de Concord a Berkeley. Entonces $7 - x$ es el número de automóviles enviados de Dublín a Atherton y $4 - y$ es el número de automóviles enviados de Dublín a Berkeley).

Objetivo

Mostrar cómo se utiliza el método simplex para resolver un problema de programación lineal estándar. Este método le permitirá resolver problemas que no pueden resolverse de manera geométrica.

5.4 Método simplex

Hasta ahora, se han resuelto problemas de programación lineal por un método geométrico. Este método no resulta práctico cuando el número de variables aumenta a tres y, desde luego, no es posible usarlo si las variables son más de tres. Ahora se verá una técnica diferente —el **método simplex**— cuyo nombre está ligado, en estudios más avanzados, a un objeto geométrico al que se denomina simplex.

El método simplex empieza con una solución factible y prueba si el valor de la función objetivo es o no óptimo. Si no lo es, con este método se procede a obtener una solución mejor. Se dice "mejor" en el sentido de que la nueva solución esté más cerca de la optimización de la función objetivo.[2] Si esta nueva solución no es óptima, entonces se repite el procedimiento. En algún momento, el método simplex conduce a una solución óptima, si es que existe.

Además de ser eficiente, el método simplex tiene otras ventajas. Es completamente mecánico. Utiliza matrices, operaciones elementales con renglones y aritmética básica. Además, no es necesario dibujar gráficas; esto permite resolver problemas de programación lineal que tengan cualquier número de restricciones y variables.

---

[2] En la mayoría de los casos es cierto. Sin embargo, en algunas situaciones la nueva solución puede ser "tan buena" como la previa. El ejemplo 2 ilustrará esto.

En esta sección, solo se considerarán los llamados **problemas estándar de programación lineal**. Éstos pueden expresarse en la forma siguiente.

Problema estándar de programación lineal

Maximizar la función lineal $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ sujeta a las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son no negativas.

Resulta útil formular el problema en notación matricial de manera que su estructura sea más fácil de recordar. Sean

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces la función objetivo puede escribirse como

$$Z = CX$$

Ahora, si se escribe

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

entonces es posible decir que un problema de programación lineal es aquél que puede ponerse en la forma

¡ADVERTENCIA!

Observe que $B \geq 0$ es una condición que rige sobre los datos del problema y no una constante impuesta sobre la variable X.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = CX \\ \text{sujeta a} & \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases} \\ \text{donde} & B \geq 0 \end{array}$$

(Las desigualdades matriciales deben entenderse como igualdades de matrices. Las comparaciones se refieren a matrices del mismo tamaño y la desigualdad se requiere para contener todas las entradas correspondientes).

En las secciones 5.6 y 5.7 se estudiarán otros tipos de problemas de programación lineal.

Observe que un punto factible para un problema *estándar* de programación lineal siempre es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ y que en este punto factible el valor de la función Z es 0.

Ahora se aplicará el método simplex al problema del ejemplo 1 de la sección 5.2, que puede escribirse como

El procedimiento que se sigue aquí será descrito más adelante en esta sección.

$$\text{maximizar } Z = 3x_1 + x_2$$

sujeta a las restricciones

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (2)$$

y

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \qquad (3)$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Este problema es de la forma estándar. Se comienza por escribir las restricciones (2) y (3) como ecuaciones. En (2), $2x_1 + x_2$ será *igual* a 8 si se suma algún número no negativo s_1 a $2x_1 + x_2$, de forma que,

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \quad \text{para alguna } s_1 \geq 0$$

En la sección 1.2 se mencionaron las variables de "holgura" en el proceso de presentación de las desigualdades.

A s_1 se le llama **variable de holgura** porque completa la "holgura" existente del lado izquierdo de (2), de modo que se tenga una igualdad. De manera similar, la desigualdad (3) puede expresarse como una ecuación utilizando la variable de holgura s_2; se tiene

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \quad \text{para alguna } s_2 \geq 0$$

Las variables x_1 y x_2 son llamadas **variables de decisión**.

Ahora es posible replantear el problema en términos de ecuaciones:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + x_2 \qquad \textbf{(4)}$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \qquad \textbf{(5)}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \qquad \textbf{(6)}$$

donde x_1, x_2, s_1 y s_2 son no negativas.

De la sección 5.2, se sabe que la solución óptima ocurre en un vértice de la región factible de la figura 5.19. En cada uno de estos puntos, al menos *dos* de las variables x_1, x_2, s_1 y s_2 son 0, como lo indica el listado siguiente:

1. En A, se tiene $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

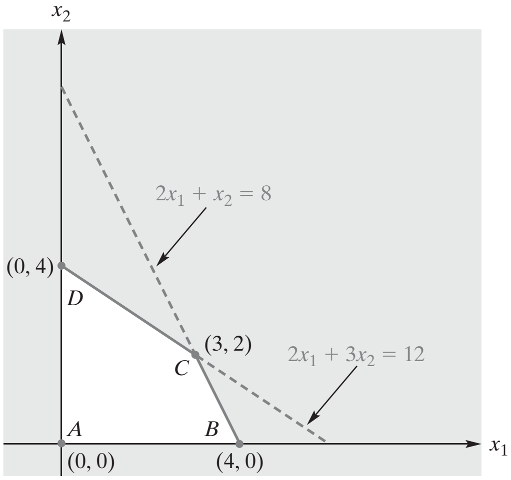


FIGURA 5.19 La solución óptima debe ocurrir en un vértice de la región factible.

2. En B, $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$. Pero de la ecuación (5), $2(4) + 0 + s_1 = 8$. Entonces, $s_1 = 0$.
3. En C, $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Pero de la ecuación (5), $2(3) + 2 + s_1 = 8$. Por lo tanto, $s_1 = 0$. De la ecuación (6), $2(3) + 3(2) + s_2 = 12$. Por lo tanto, $s_2 = 0$.
4. En D, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. De la ecuación (6), $2(0) + 3(4) + s_2 = 12$. Por lo tanto, $s_2 = 0$.

¡ADVERTENCIA!

En páginas previas se indicó que existe una gran cantidad de terminología usada en el estudio de la programación lineal. En particular, hay muchos tipos de *variables*. Es importante entender que las variables llamadas “de decisión” x_1, x_2, …, x_n se mantienen como variables de decisión a lo largo de la resolución de un problema y este mismo comentario se aplica a las variables de holgura s_1, s_2, …, s_m. En el proceso de examinar los vértices de la región factible, se encuentran soluciones al sistema en las que al menos n de las $n + m$ variables son 0. Precisamente n de éstas se llaman variables no básicas y las restantes m se llaman variables básicas. Cuáles m de las $n + m$ variables sean *básicas* depende del vértice bajo consideración. Entre otras cosas, el procedimiento que se está describiendo proporciona una forma mecánica de tener claro, en cualquier momento, cuáles variables son básicas.

También puede demostrarse que cualquier solución de las ecuaciones (5) y (6), con tal de que al menos *dos* de las cuatro variables x_1, x_2, s_1 y s_2 sean cero, corresponde a un vértice. Cualquier solución donde al menos dos de las variables sean cero se llama **solución básica factible** (SBF). Este número, 2, está determinado por el número n de variables de decisión, en este ejemplo dicho número es 2. Para cualquier SBF, las dos variables que toman el valor de cero se llaman **variables no básicas**, mientras que las otras se llaman **variables básicas** para esa solución básica factible. Como hay un total de $n + m$ variables, el número de variables básicas presentes en el sistema general que surge de la función lineal presentada en (1) es m, que es el número de restricciones (diferentes a las que expresan no negatividad). Así, para la SBF correspondiente al punto 3 del listado anterior, s_1 y s_2 son las variables no básicas y x_1 y x_2 son las variables básicas, pero para la SBF correspondiente al punto 4, las variables no básicas son x_1 y s_2 y las variables básicas son x_2 y s_1.

Primero se encontrará una solución básica factible inicial y, por lo tanto, un vértice inicial, y después se determinará si el valor correspondiente de Z puede incrementarse con una SBF diferente. Como $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ es un punto factible para este problema estándar de programación lineal, inicialmente se encuentra la SBF donde las variables de decisión x_1 y x_2 son no básicas y, por ende, las variables de holgura s_1 y s_2 son básicas. Esto es, se elige $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y se encuentran los correspondientes valores para s_1, s_2 y Z. Esto puede hacerse de manera más adecuada por medio de técnicas matriciales, basadas en los métodos desarrollados en el capítulo 4.

Si se escribe la ecuación (4) como $-3x_1 - x_2 + Z = 0$, entonces las ecuaciones (5), (6) y (4) forman el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 8\\
2x_1 & + & 3x_2 & & & + & s_2 & & & = & 12\\
-3x_1 & - & x_2 & & & & & + & Z & = & 0
\end{array}\right.$$

con las variables x_1, x_2, s_1, s_2 y Z. Así, en general, cuando se agrega la función objetivo al sistema que proporciona las restricciones, se tienen $m + 1$ ecuaciones con $n + m + 1$ incógnitas. En términos de una matriz de coeficientes aumentada, llamada **tabla simplex inicial**, se tiene

$$\begin{array}{c|rrrrr|r}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R}\\
\hline
s_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8\\
s_2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\\
\hline
Z & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Es conveniente mostrarse generosos con las etiquetas para las matrices que se utilizarán como tablas simplex. Por lo tanto, las columnas ubicadas en la matriz a la izquierda de la barra vertical se etiquetan, de manera natural y suficiente, con las variables a las cuales corresponden. Se ha elegido R (del término en inglés *right*, derecha) como una marca para la columna que proporciona los lados derechos del sistema de ecuaciones. También se ha elegido B (por *base*) para señalar la lista de marcas de renglón. Los primeros dos renglones corresponden a las restricciones y el último renglón, llamado **renglón objetivo**, corresponde a la ecuación objetivo —a esto se debe la línea horizontal que separa a ese renglón—. Observe que si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces los valores de s_1, s_2 y Z pueden leerse directamente a partir de los renglones 1, 2 y 3: $s_1 = 8$, $s_2 = 12$ y $Z = 0$. Ésta es la razón por la cual se colocan las letras s_1, s_2 y Z a la izquierda de los renglones. Es necesario recordar que, para la solución factible $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, s_1 y s_2 son las variables básicas. De manera que el encabezado B de la columna puede entenderse como la representación de las variables Básicas. Así que la solución básica factible inicial es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad s_1 = 8 \quad s_2 = 12$$

en la que $Z = 0$.

Ahora se verá si es posible encontrar una solución básica factible que dé un valor mayor de Z. Las variables x_1 y x_2 son no básicas en la SBF anterior. Ahora se buscará una SBF en la que una de estas variables sea básica mientras las otras permanecen como no básicas. ¿Cuál debe elegirse como la variable básica? Examinemos las posibilidades. Del renglón Z de la matriz anterior, $Z = 3x_1 + x_2$. Si a x_1 se le permite volverse básica, entonces x_2 permanecerá como cero y $Z = 3x_1$; así, por cada unidad de aumento en x_1, Z aumenta en tres unidades. Por otra parte, si a x_2 se le permite ser básica, entonces x_1 seguirá siendo cero y $Z = x_2$; así, por cada aumento unitario de x_2, Z aumenta en una unidad. En consecuencia, se obtiene un aumento *mayor* en el valor de Z si se toma a x_1, como básica en lugar de x_2. En este caso, a x_1 se le llama **variable entrante**. Así, en términos de la tabla simplex mostrada a continuación (que es la misma de la matriz anterior salvo por algunas marcaciones adicionales), la variable entrante puede encontrarse buscando el "más negativo" de los números encerrados por la llave incluida en el renglón Z. (*Más negativo* quiere decir: el indicador negativo que tiene la mayor magnitud). Como ese número es -3 y aparece en la columna de x_1, entonces x_1 es la variable entrante. Los números encerrados en la llave se denominan **indicadores**.

$$\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & \substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow} & & & & & \\
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} \\
s_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
s_2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \cline{2-7}
Z & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{4cm}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}$$

En resumen, la información que puede obtenerse de esta tabla es la siguiente. Proporciona una solución básica factible, donde s_1 y s_2 son las variables básicas y x_1 y x_2 son las no básicas. La SBF es $s_1 = 8$ (al extremo derecho del renglón de s_1), $s_2 = 12$ (al extremo derecho del renglón de s_2), $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. El -3 ubicado en la columna x_1 del renglón de Z indica que si x_2 permanece como 0, entonces Z aumenta tres unidades por cada unidad que aumente x_1. El -1 situado en la columna x_2 del renglón Z indica que si x_1 permanece como 0, entonces Z aumenta en una unidad por cada unidad de aumento en x_2. La columna en la que se encuentra el indicador más negativo, -3, proporciona la variable entrante x_1 esto es, la variable que debe convertirse en básica en la siguiente solución básica factible.

En la nueva solución básica factible, a mayor incremento en x_1 (a partir de $x_1 = 0$), mayor aumento en Z. Ahora, ¿en cuánto puede aumentarse x_1? Como x_2 aún se mantendrá en 0, de los renglones 1 y 2 de la tabla simplex anterior se deduce que

$$s_1 = 8 - 2x_1$$

y

$$s_2 = 12 - 2x_1$$

Como s_1 y s_2 son no negativas, se tiene

$$8 - 2x_1 \geq 0$$

y

$$12 - 2x_1 \geq 0.$$

De la primera desigualdad, $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$, de la segunda, $x_1 \leq \frac{12}{2} = 6$. Por lo tanto, x_1 debe ser menor o igual al más pequeño de los cocientes $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$, que es $\frac{8}{2}$. De aquí que x_1 pueda aumentar, cuando mucho, hasta 4. Sin embargo, en una solución básica factible, dos variables deben ser 0. Ya se tiene que $x_2 = 0$. Como $s_1 = 8 - 2x_1$, s_1 debe ser igual a 0 para $x_1 = 4$. Así que se tiene una nueva SBF, donde x_1 reemplaza a s_1 como una variable básica. Esto es, s_1 *saldrá* de la categoría de variables básicas obtenida en la solución básica factible anterior y será no básica en la nueva SBF. Se dice que s_1 es la **variable saliente** para la SBF previa. En resumen, para la nueva solución básica factible, se quiere a x_1 y s_2 como variables básicas, con $x_1 = 4$, y a x_2 y s_1 como variables no básicas ($x_2 = 0$, $s_1 = 0$). Estos requerimientos conducen a $s_2 = 12 - 2x_1 = 12 -2(4) = 4$.

Antes de continuar, se actualizará la tabla. A la derecha de la tabla siguiente se indican los cocientes $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$:

variable entrante
(indicador más negativo)
↓

$$\begin{array}{l}\text{variable}\ \leftarrow\\ \text{saliente}\\ \text{(cociente más}\\ \text{pequeño)}\end{array}\quad \begin{array}{c|ccccc|c|l}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
s_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 & 8 \div 2 = 4\\
s_2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 & 12 \div 2 = 6\\
\hline
Z & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Estos cocientes se obtuvieron al dividir cada entrada de los primeros dos renglones de la columna de R, entre la entrada del renglón correspondiente de la columna de la variable entrante, que es la columna x_1. Observe que la variable saliente está en el mismo renglón que el cociente *más pequeño*, $8 \div 2$.

Como x_1 y s_2 serán variables básicas en la nueva solución básica factible, sería conveniente cambiar la tabla anterior por medio de operaciones elementales con renglones en forma tal que los valores de x_1, s_2 y Z puedan leerse con facilidad (de la misma forma que fue posible hacerlo con la solución correspondiente a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$). Para hacer esto, se quiere encontrar una matriz equivalente a la tabla anterior, pero que tenga la forma

$$\begin{array}{c|ccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R}\\
\hline
x_1 & 1 & ? & ? & 0 & 0 & ?\\
s_2 & 0 & ? & ? & 1 & 0 & ?\\
\hline
Z & 0 & ? & ? & 0 & 1 & ?
\end{array}$$

donde los signos de interrogación representan números que serán determinados. Observe aquí que si $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, entonces x_1 es igual al número que está en el renglón x_1 de la columna R, s_2 es igual al número del renglón s_2 de la columna R y Z es el número situado en el renglón Z de la columna R. Por lo tanto, es necesario transformar la tabla

variable
entrante
↓

$$\begin{array}{l}\text{variable}\ \leftarrow\\ \text{saliente}\end{array}\quad \begin{array}{c|ccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R}\\
\hline
s_1 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8\\
s_2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\\
\hline
Z & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array} \qquad (7)$$

en una matriz equivalente que tenga un 1 donde la entrada aparece "sombreada" y ceros en las demás entradas en la columna de x_1. La entrada sombreada se llama **entrada pivote** —y está en la columna de la variable entrante (llamada *columna pivote*) y en el renglón de la variable saliente (llamado *renglón pivote*)—. Por medio de operaciones elementales con renglones, se tiene:

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \\
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8\\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\\
\hline
-3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4\\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\\
\hline
-3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3R_1 + R_3]{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4\\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4\\
\hline
0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12
\end{array}\right]$$

Así, se forma una nueva tabla simplex:

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} \\
x_1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\
s_2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
Z & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad 0}_{\text{indicadores}}} & 1 & 12
\end{array} \qquad \textbf{(8)}$$

Para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, a partir del primer renglón se tiene que $x_1 = 4$; del segundo, se obtiene $s_2 = 4$. Estos valores dan una nueva solución básica factible. Observe que se reemplazó la s_1 localizada a la izquierda de la tabla inicial (7) por x_1 en la nueva tabla (8), por lo que s_1 *salió* y x_1 *entró*. Del renglón 3, para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, se obtiene $Z = 12$, un valor mayor al que se tenía antes ($Z = 0$).

En la solución básica factible actual, x_2 y s_1 son variables no básicas ($x_2 = 0$, $s_1 = 0$). Suponga que se busca otra SBF que dé un valor mayor para Z de tal modo que una de las dos, x_2 o s_1, sea básica. La ecuación correspondiente al renglón de Z está dada por $\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}s_1 + Z = 12$, lo cual puede reescribirse como:

$$Z = 12 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}s_1 \qquad \textbf{(9)}$$

Si x_2 se convierte en básica y, por lo tanto, s_1 permanece no básica, entonces,

$$Z = 12 - \frac{1}{2}x_2 \quad (\text{ya que } s_1 = 0)$$

Aquí, cada unidad de aumento en x_2 *disminuye* a Z en $\frac{1}{2}$ unidad. Así que cualquier aumento en x_2 haría que Z fuera más pequeña que antes. Por otra parte, si s_1 se convierte en básica y x_2 permanece como no básica, entonces, por la ecuación (9),

$$Z = 12 - \frac{3}{2}s_1 \quad (\text{ya que } x_2 = 0)$$

Aquí cada unidad de aumento en s_1 *disminuye* a Z en $\frac{3}{2}$ unidades. Por lo tanto, cualquier aumento en s_1 haría a Z más pequeña que antes. En consecuencia, no es posible desplazarse hacia una mejor solución básica factible. En resumen, ninguna otra SBF proporciona un valor mayor de Z que la SBF $x_1 = 4$, $s_2 = 4$, $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$ (lo que da $Z = 12$).

De hecho, como $x_2 \geq 0$ y $s_1 \geq 0$, y en la ecuación (9) los coeficientes de x_2 y s_1 son negativos, Z es máxima cuando $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$. Esto es, en (8), *tener todos los indicadores no negativos significa que se tiene una solución óptima.*

En términos del problema original, si

$$Z = 3x_1 + x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

entonces Z es máxima cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$ y el valor máximo de Z es 12. (Esto confirma el resultado del ejemplo 1 visto en la sección 5.2). Observe que los valores de s_1 y s_2 no tienen que aparecer aquí.

Ahora se dará una descripción general del método simplex para un problema estándar de programación lineal con tres variables de decisión y cuatro restricciones, sin contar las condiciones de no negatividad. Esta descripción señala cómo funciona el método simplex para cualquier número de variables de decisión y de restricciones.

Método simplex

Problema:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x + a_{13}x_3 &\leq b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x + a_{23}x_3 &\leq b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x + a_{33}x_3 &\leq b_3\\
a_{41}x_1 + a_{42}x + a_{43}x_3 &\leq b_4
\end{aligned}
$$

donde x_1, x_2, x_3 y b_1, b_2, b_3, b_4, son no negativos.

Método:

1. Configure la tabla simplex inicial:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & Z & & \text{R}\\
s_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & b_1\\
s_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & b_2\\
s_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & b_3\\
s_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & b_4\\
\hline
Z & -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0\\
 & \multicolumn{7}{c}{\underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

Existen cuatro variables de holgura, s_1, s_2, s_3 y s_4, una por cada restricción.

2. Si en el último renglón todos los indicadores son no negativos, entonces Z tiene un valor máximo con la lista actual de variables básica y el valor actual de Z. (En el caso de la tabla simplex inicial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, con un valor máximo de $Z = 0$). Si existen indicadores negativos, localice la columna en la que aparezca el indicador más negativo. Esta *columna pivote* proporciona la variable entrante. (Si más de una columna tiene el indicador más negativo, la elección de la columna pivote se hace de manera arbitraria).

3. Divida cada entrada *positiva*[3] localizada por encima del renglón objetivo en la columna de la variable entrante entre *con* el correspondiente valor de la columna R.

4. Marque la entrada en la columna pivote que corresponda al cociente más pequeño del paso 3. Ésta es la entrada pivote y el renglón en el que se encuentra es el *renglón pivote*. La variable saliente es aquella que marca el renglón pivote.

5. Utilice operaciones elementales con renglones para transformar la tabla en una tabla nueva equivalente que tenga un 1 en donde estaba la entrada pivote y 0 en las otras entradas de esa columna.

6. En las etiquetas de la columna B de esta tabla, la variable entrante reemplaza a la variable saliente.

7. Si los indicadores de la nueva tabla son todos no negativos, se tiene una solución óptima. El valor máximo de Z es la entrada en el último renglón y la última columna. Esto ocurre cuando las variables básicas que se encuentran en la columna de etiquetas, B, son iguales a las entradas correspondientes en la columna R. Todas las demás variables son iguales a 0. Si al menos uno de los indicadores es negativo, repita el proceso empezando con el paso 2 aplicado a la nueva tabla.

Para entender el método simplex, debemos ser capaces de interpretar ciertas entradas de una tabla. Supongamos que se obtiene una tabla cuyo último renglón es como se indica

---

[3] Esto se estudiará después del ejemplo 1.

a continuación.

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & Z & \text{R} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cline{2-10}
Z & a & b & c & d & e & f & g & 1 & h
\end{array}
$$

La entrada b, por ejemplo, puede interpretarse como sigue: si x_2 es no básica y fuera a convertirse en básica, entonces, por cada aumento de 1 unidad en x_2,

$$
\begin{array}{ll}
\text{si } b < 0, & Z \text{ } \textit{aumenta} \text{ en } |b| \text{ unidades,} \\
\text{si } b > 0, & Z \text{ } \textit{disminuye} \text{ en } |b| \text{ unidades,} \\
\text{si } b = 0, & \text{no hay cambio en } Z.
\end{array}
$$

EJEMPLO 1 El método simplex

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x_2$ sujeta a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 20 \\
2x_1 + x_2 &\leq 35 \\
-3x_1 + x_2 &\leq 12
\end{aligned}
$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: Este problema de programación lineal ya está en la forma estándar. La tabla simplex inicial es:

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & & \begin{array}{c}\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow\end{array} & & & & & & & \\
 & \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \text{R} & \textit{Cociente} \\
 & s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 \div 1 = 20 \\
\text{variable} \leftarrow & s_2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 & 35 \div 2 = \frac{35}{2} \\
\text{saliente} & s_3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & \text{no hay cociente, } -3 \not> 0 \\ \cline{3-9}
 & Z & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

El indicador más negativo, -5, aparece en la columna de x_1. Así que x_1 es la variable entrante. El cociente más pequeño es $\frac{35}{2}$, de modo que s_2 es la variable saliente. La entrada pivote es 2. Utilizando operaciones elementales con renglones, se obtiene un 1 en la posición del pivote y ceros en las demás entradas de esa columna, entonces se tiene:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\
-3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline
-5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\
-3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline
-5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\substack{3R_2+R_3\\ 5R_2+R_4}]{-1R_2+R_1}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2}\\
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2}\\
0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2}\\
\hline
0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2}
\end{array}\right]
$$

La nueva tabla es

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & \text{B} & x_1 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_2} & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\text{variable saliente} \leftarrow & s_1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\div\frac{1}{2}=5\\
 & x_1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} & \frac{35}{2}\div\frac{1}{2}=35\\
 & s_3 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} & \frac{129}{2}\div\frac{5}{2}=25\frac{4}{5}\\
\hline
 & Z & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hphantom{0000000000000000000}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}
$$

Observe que en la columna B, que mantiene registro de cuáles variables son básicas, x_1 reemplazó a s_2. Puesto que aún se tiene un indicador negativo, $-\frac{3}{2}$, debemos continuar el proceso. Evidentemente, $-\frac{3}{2}$ es el indicador más negativo y la variable que entra es ahora x_2. El cociente más pequeño es 5. Por lo tanto, s_1 es la variable que sale y $\frac{1}{2}$ es la entrada pivote. Si ahora se aplican operaciones elementales con renglones, se tiene:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \text{R}\\
0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2}\\
1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2}\\
0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2}\\
\hline
0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{-5R_1+R_3\\ 3R_1+R_4}]{-1R_1+R_2}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2}\\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15\\
0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52\\
\hline
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{2R_1}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5\\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15\\
0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52\\
\hline
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95
\end{array}\right]
$$

La nueva tabla es

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \text{R}\\
x_2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5\\
x_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15\\
s_3 & 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52\\
\hline
Z & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95\\
 & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hphantom{0000000000000000000}}_{\text{indicadores}}} &
\end{array}
$$

donde x_2 reemplazó a s_1 en la columna B. Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 95 y ocurre cuando $x_2 = 5$ y $x_1 = 15$ (y $s_3 = 52$, $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Es interesante ver cómo los valores de Z obtenían de manera progresiva una "mejora" en las tablas sucesivas del ejemplo 1. Estos valores son las entradas del último renglón y de la última columna de cada tabla simplex. En la tabla inicial se tenía $Z = 0$. De ahí se obtuvo $Z = \frac{175}{2} = 87\frac{1}{2}$ y después $Z = 95$, el valor máximo.

En el ejemplo 1, podría sorprender que ningún cociente sea considerado en el tercer renglón de la tabla inicial. La solución básica factible para esta tabla es:

$$s_1 = 20, \quad s_2 = 35, \quad s_3 = 12, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

donde x_1 es la variable que entra. Los cocientes 20 y $\frac{35}{2}$ reflejan que, para la siguiente SBF, se tiene $x_1 \leq 20$ y $x_1 \leq \frac{35}{2}$. Como el tercer renglón representa la ecuación $s_3 = 12 + 3x_1 - x_2$, y $x_2 = 0$, resulta que $s_3 = 12 + 3x_1$. Pero $s_3 \geq 0$, entonces $12 + 3x_1 \geq 0$, lo cual implica que $x_1 \geq -\frac{12}{3} = -4$. Por lo tanto, se tiene

$$x_1 \leq 20, \quad x_1 \leq \frac{35}{2} \qquad \text{y} \qquad x_1 \geq -4$$

De aquí que pueda aumentarse x_1 hasta en $\frac{35}{2}$. La condición $x_1 \geq -4$ no influye en la determinación del aumento máximo en x_1. Esto es porque el cociente $12/(-3) = -4$ no está considerado en el renglón 3. En general, *no se considera el cociente para un renglón si la entrada en la columna de la variable entrante es negativa* (*o, por supuesto*, 0).

Aunque el procedimiento simplex desarrollado en esta sección se aplica solo a problemas de programación lineal de la forma estándar, pueden adaptarse otras formas para que se ajusten a ésta. Suponga que una restricción tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq -b$$

donde $b > 0$. Aquí el símbolo de desigualdad es "$\geq$" y la constante del lado derecho es *negativa*. Por lo tanto, la restricción no está en la forma estándar. Sin embargo, multiplicando ambos miembros por -1 se obtiene

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq b$$

que *tiene* la forma apropiada. De acuerdo con esto, puede ser necesario escribir de nuevo una restricción antes de proceder con el método simplex.

En una tabla simplex, varios indicadores pueden "empatar" como los más negativos. En este caso, seleccione cualquiera de estos indicadores para obtener la columna de la variable entrante. De igual modo, puede haber varios cocientes que "empaten" como los más pequeños. Puede seleccionar cualquiera de estos cocientes para obtener la variable que sale y la entrada pivote. El ejemplo 2 ilustrará esto. Cuando existe un empate para el cociente más pequeño, entonces, además de las variables no básicas, una solución básica factible tendrá una variable básica igual a 0. En este caso, se dice que la SBF es *degenerada* o que el problema de programación lineal tiene una *degeneración*. En la sección 5.5 se dirá más acerca de esto.

APLÍQUELO ▶

4. La compañía Toones tiene \$30 000 para la compra de materiales para fabricar tres tipos de reproductores de MP3. La compañía tiene asignadas un total de 1200 horas de tiempo para ensamblar y 180 horas para empaquetar los aparatos. La tabla siguiente da el costo, el número de horas y la utilidad por aparato para cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo por aparato	\$300	\$300	\$400
Horas de ensamblado por aparato	15	15	10
Horas de empaque por aparato	2	2	3
Utilidad	\$150	\$250	\$200

Encuentre el número de aparatos de cada tipo que la compañía debe producir para maximizar la utilidad.

EJEMPLO 2 El método simplex

Maximizar $Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$ sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 \qquad &\geq -10 \qquad\qquad (10)\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución: La restricción (10) no se ajusta a la forma estándar. Sin embargo, al multiplicar ambos lados de la desigualdad (10) por -1 se obtiene

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

que *tiene* la forma apropiada. De esta manera, la tabla simplex inicial es la tabla I:

TABLA SIMPLEX I

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & \text{B} & x_1 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_2} & x_3 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\text{variable} \leftarrow & s_1 & 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 10 \div 2 = 5\\
\text{saliente} & s_2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 & 10 \div 2 = 5\\
\cline{3-9}
 & Z & -3 & -4 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

La variable entrante es x_2. Como existe empate para el cociente más pequeño, puede seleccionarse a s_1 o a s_2 como la variable saliente. Se elige s_1. La entrada pivote aparece sombreada. Al aplicar operaciones elementales con renglones se obtiene la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

$$
\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & \text{B} & x_1 & x_2 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_3} & s_1 & s_2 & Z & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
 & x_2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5 & \text{no hay cociente porque } 0 \not> 0\\
\text{variable} \leftarrow & s_2 & 1 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \div 1 = 0\\
\cline{3-9}
\text{saliente} & Z & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 & 1 & 20 & \\
 & & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

La tabla II corresponde a una solución básica factible, en la que una variable básica, s_2, es cero. Por lo tanto, la SBF es degenerada. Como existen indicadores negativos, continuamos. La variable que entra ahora es x_3, la variable que sale es s_2 y el pivote aparece sombreado. Al aplicar operaciones elementales con renglones se obtiene la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & \text{R}\\
x_2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5\\
x_3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\
\cline{2-8}
Z & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 20\\
 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}
$$

Como todos los indicadores son no negativos, Z es máxima cuando $x_2 = 5$, $x_3 = 0$ y $x_1 = s_1 = s_2 = 0$. El valor máximo es $Z = 20$. Observe que este valor es el mismo que el correspondiente de Z en la tabla II. En problemas degenerados, es posible llegar al mismo valor de Z en varias etapas del método simplex. En el problema 7, se le pedirá que lo resuelva utilizando a s_2 como la variable que sale en la tabla inicial.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Debido a su naturaleza mecánica, el método simplex se adapta con facilidad a computadoras para resolver problemas de programación lineal que incluyan muchas variables y restricciones.

PROBLEMAS 5.4

Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

1. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 8\\
2x_1 + 3x_2 &\leq 12\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar

$$Z = -x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar

$$Z = 4x_1 + 7x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Maximizar

$$Z = 2x_1 - 6x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Resuelva el problema del ejemplo 2 seleccionando a s_2 como la variable saliente en la tabla I.

8. Maximizar

$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Maximizar

$$Z = -5x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

11. Maximizar

$$Z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$W = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &\geq -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

13. Maximizar

$$W = x_1 - 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

14. Maximizar

$$W = 4x_1 + 0x_2 - x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

15. Maximizar

$$Z = 50x_1 + 0x_2 + 80x_3 + 0x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_4 &\leq 3 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_3 - x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

16. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

17. Envíos de carga Una compañía de fletes maneja los envíos de dos corporaciones, A y B, que están ubicadas en la misma ciudad. La corporación A envía cajas que pesan 3 lb cada una y tienen un volumen de 2 pies^3; B envía cajas de 1 pie^3 que pesan 5 lb cada una. Ambas corporaciones envían al mismo destino. El costo de transporte para cada caja de A es de \$0.75 y para B es de \$0.50. La compañía de fletes tiene un camión con capacidad volumétrica de 2400 pies^3 y capacidad máxima de carga de 36 800 lb. En un acarreo, ¿cuántas cajas desde cada corporación debe transportar este camión de modo que el ingreso de la compañía de fletes sea máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

18. Producción Una compañía fabrica tres productos X, Y y Z. Cada producto requiere tiempo de máquina y tiempo de acabado como se muestra en la tabla siguiente:

	Tiempo de máquina	Tiempo de acabado
X	1 hr	4 hr
Y	2 hr	4 hr
Z	3 hr	8 hr

El número de horas de tiempo de máquina y el tiempo de acabado disponibles por mes son 900 y 5000, respectivamente. La utilidad unitaria sobre X, Y y Z es de \$6, \$8 y \$12, respectivamente. ¿Cuál es la utilidad máxima por mes que puede obtenerse?

19. Producción Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones. Cada tipo requiere madera, plástico y aluminio como se muestra en la tabla siguiente:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tiene disponibles 400 unidades de madera, 500 de plástico y 1450 de aluminio. Cada silla, mecedora y sillón se venden en \$21, \$24 y \$36, respectivamente. Suponiendo que todos los muebles pueden venderse, determine la producción necesaria para que el ingreso total sea máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo?

Objetivo

Considerar el método simplex en relación con la degeneración, las soluciones no acotadas y las soluciones óptimas múltiples.

5.5 Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones múltiples[4]

Degeneración

En la sección anterior se estableció que una solución básica factible se denomina **degenerada** si, además de contener las de las variables no básicas, una de las variables básicas es 0. Suponga que en una solución básica factible degenerada, x_1, x_2, x_3 y x_4 son las variables, donde x_1 y x_2 son básicas con $x_1 = 0$, x_3 y x_4 son no básicas y x_3 es la variable entrante. La tabla simplex correspondiente tiene la forma

$$\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & \text{B} & x_1 & x_2 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_3} & x_4 & Z & & \text{R} & \\
\text{variable saliente} \leftarrow & x_1 & 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & & 0 & 0 \div a_{13} = 0 \\
 & x_2 & 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & & a & \\
\hline
 & Z & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 1 & & d_3 & \\
 & & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad d_1 \quad d_2}}_{\text{indicadores}}} & & & &
\end{array}$$

---

[4] Esta sección puede omitirse.

Así, la SBF es:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0$$

Suponga que $a_{13} > 0$. Entonces, el cociente más pequeño es 0 y puede elegirse a a_{13} como la entrada pivote. Así, x_1 es la variable que sale. Mediante operaciones elementales con renglones se obtiene la tabla siguiente, donde los símbolos de interrogación representan números por determinar:

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & \text{R} \\
x_3 & ? & 0 & 1 & ? & 0 & 0 \\
x_2 & ? & 1 & 0 & ? & 0 & a \\
\hline
Z & ? & 0 & 0 & ? & 1 & d_3
\end{array}$$

Para la solución básica factible correspondiente a esta tabla, x_3 y x_2 son variables básicas y x_1 y x_4 son no básicas. La SBF, es:

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_1 = 0, \qquad x_4 = 0$$

que es la misma SBF de antes. En la práctica, se les considera soluciones básicas factibles diferentes, aunque la única distinción es que x_1 es básica en la primera SBF mientras que en la segunda es no básica. El valor de Z para ambas soluciones es el mismo, d_3. Así, no se obtuvo “mejora” en Z.

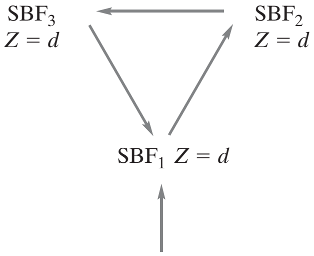


FIGURA 5.20 Ciclo.

En una situación de degeneración, pueden presentarse algunos problemas en el método simplex. Es posible obtener una secuencia de tablas que correspondan a las soluciones básicas factibles que dan el mismo valor de Z. Además, en un momento dado puede regresarse a la primera tabla de la secuencia. En la figura 5.20 se llega a la SBF_1, se prosigue hacia la SBF_2, después a la SBF_3 y, finalmente, de vuelta a la SBF_1. Esto es llamado *ciclo*. Cuando ocurre un ciclo, es posible que nunca se obtenga el valor óptimo de Z. Este fenómeno se encuentra muy pocas veces en problemas de programación lineal prácticos; sin embargo, existen técnicas (que no se analizarán en este texto) para resolver tales dificultades.

Una solución básica factible degenerada ocurrirá cuando empaten dos cocientes de la tabla simplex con los cocientes más pequeños. Por ejemplo, considere la tabla siguiente (parcial):

$$\begin{array}{c|cc|c}
\text{B} & x_3 & \text{R} & \textit{Cocientes} \\
x_1 & q_1 & p_1 & p_1/q_1 \\
x_2 & q_2 & p_2 & p_2/q_2
\end{array}$$

Aquí x_1 y x_2 son variables básicas. Suponga que x_3 es no básica y entrante y que $p_1/q_1 = p_2/q_2$ son los cocientes más pequeños. Al seleccionar q_1 como la entrada pivote, mediante operaciones elementales con renglones, se obtiene

$$\begin{array}{c|c|c}
\text{B} & x_3 & \text{R} \\
x_3 & 1 & p_1/q_1 \\
x_2 & 0 & p_2 - q_2 \frac{p_1}{q_1}
\end{array}$$

Como $p_1/q_1 = p_2/q_2$, se tiene que $p_2 - q_2(p_1/q_1) = 0$. Por lo que la solución básica factible correspondiente a esta tabla tiene $x_2 = 0$, lo que da una SBF *degenerada*. Aunque esta SBF puede producir un ciclo, no se encontrarán muchas situaciones de tal tipo en este libro. Sin embargo, si está interesado en resolver uno, vea el ejercicio 11 en los problemas 5.5.

Soluciones no acotadas

Ahora se pondrá atención en los “problemas no acotados”. En la sección 5.2, se vio que un problema de programación lineal puede no tener un valor máximo, cuando la región factible es tal que en ella la función objetivo puede volverse arbitrariamente grande. En este caso, se dice que el problema tiene una **solución no acotada**. Ésta es una forma específica de decir que no existe solución óptima. Tal situación ocurre cuando en una tabla simplex no existen cocientes posibles para una variable que entra. Por ejemplo, considere la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c|ccccc|c|l}
 & & \text{variable entrante} & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & \\
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & \text{R} & \\
\hline
x_1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 5 & \text{no hay cociente} \\
x_3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & \text{no hay cociente} \\
\hline
Z & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 10 & \\
\hline
 & \multicolumn{4}{c}{\text{indicadores}} & & &
\end{array}$$

Aquí x_2 es la variable que entra y por cada aumento de una unidad en x_2, Z aumenta en 5. Como no existen entradas positivas en los primeros dos renglones de la columna x_2, no existe cociente alguno. A partir de los renglones 1 y 2 se obtiene

$$x_1 = 5 + 3x_2 - 2x_4$$

y

$$x_3 = 1 - 4x_4$$

Si se intenta pasar a la siguiente solución básica factible, ¿cuál es una cota superior para x_2? En esa SBF, x_4 permanecerá como no básica ($x_4 = 0$). Así, $x_1 = 5 + 3x_2$ y $x_3 = 1$. Como $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq -\frac{5}{3}$. Por lo tanto, no existe cota superior sobre x_2. De aquí que Z pueda ser arbitrariamente grande y se tenga una solución no acotada. En general,

> si no existen cocientes en una tabla simplex, entonces el problema de programación lineal tiene una solución no acotada.

EJEMPLO 1 Solución no acotada

Maximizar $Z = x_1 + 4x_2 - x_3$ sujeta a

$$\begin{aligned}
-5x_1 + 6x_2 - 2x_3 &\leq 30\\
-x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 12\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Solución: La tabla simplex inicial es

$$\begin{array}{lc|cccccc|c|l}
 & & & \text{variable entrante} & & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & & \\
 & \text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} & \textit{Cocientes} \\
\hline
 & s_1 & -5 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 30 & 30 \div 6 = 5 \\
\text{variable saliente} \leftarrow & s_2 & -1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 12 & 12 \div 3 = 4 \\
\hline
 & Z & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
\hline
 & & \multicolumn{5}{c}{\text{indicadores}} & & &
\end{array}$$

La segunda tabla es

$$\begin{array}{c|cccccc|c|l}
 & \text{variable entrante} & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & \\
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & \text{R} & \\
\hline
s_1 & -3 & 0 & -14 & 1 & -2 & 0 & 6 & \text{no hay cociente} \\
x_2 & -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & \text{no hay cociente} \\
\hline
Z & -\frac{7}{3} & 0 & 9 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 16 & \\
\hline
 & \multicolumn{5}{c}{\text{indicadores}} & & &
\end{array}$$

Aquí la variable entrante es x_1. Como en los primeros dos renglones de la columna x_1 las entradas son negativas, no existen cocientes. De aquí que el problema tenga una solución no acotada.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Soluciones óptimas múltiples

Se concluye esta sección con un estudio de “soluciones óptimas múltiples”. Suponga que

$$x_1 = a_1 \qquad x_2 = a_2 \qquad \cdots \qquad x_n = a_n$$

y

$$x_1 = b_1 \qquad x_2 = b_2 \qquad \cdots \qquad x_n = b_n$$

son dos soluciones básicas factibles *diferentes* para las cuales un problema de programación lineal es óptimo. Por “soluciones básicas factibles diferentes” se entiende que $a_i \neq b_i$ para alguna i, donde $1 \leq i \leq n$. Puede demostrarse que los valores

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)a_1 + tb_1 \\ x_2 &= (1-t)a_2 + tb_2 \\ &\vdots \\ x_n &= (1-t)a_n + tb_n \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{para cualquier } t \text{ de tal forma que } 0 \leq t \leq 1$$

también dan una solución óptima (aunque no necesariamente será una SBF). Así, existen *soluciones (óptimas) múltiples* para el problema.

La posibilidad de hallar soluciones óptimas múltiples puede determinarse a partir de una tabla simplex que dé una solución óptima, como en la tabla (parcial) que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c|ccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & \text{R} \\
x_1 & & & & & & p_1 \\
x_2 & & & & & & q_1 \\
\hline
Z & 0 & 0 & a & 0 & 1 & r \\
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad a \quad 0}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}$$

Aquí a debe ser no negativa. La correspondiente solución básica factible es:

$$x_1 = p_1 \quad x_2 = q_1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$$

y el valor máximo de Z es r. Si x_4 se convirtiese en básica, el indicador 0 situado en la columna x_4 significaría que por cada aumento unitario en x_4, Z no cambiaría. Así que puede encontrarse una SBF en la que x_4 es básica y el correspondiente valor de Z es el mismo que antes. Esto se realiza tratando a x_4 como la variable entrante en la tabla anterior. Si, por ejemplo, x_1 es la variable que sale, entonces el elemento pivote será el ubicado en el renglón x_1 y la columna x_4. La nueva SBF tendrá la forma:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = q_2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = p_2$$

donde q_2 y p_2 son números que resultan del proceso de pivoteo. Si esta SBF es diferente de la anterior, entonces existen soluciones múltiples. De hecho, a partir de las ecuaciones (1), una solución óptima está dada por cualesquiera valores de x_1, x_2, x_3 y x_4, tales que

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)p_1 + t \cdot 0 = (1-t)p_1 \\ x_2 &= (1-t)q_1 + tq_2 \\ x_3 &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 \\ x_4 &= (1-t) \cdot 0 + tp_2 = tp_2 \end{aligned}$$

$$\text{donde } 0 \leq t \leq 1$$

Observe que cuando $t = 0$, se obtiene la primera SBF óptima; cuando $t = 1$, se obtiene la segunda. Por supuesto, puede ser posible repetir el procedimiento utilizando la tabla correspondiente a la última solución básica factible y obtener soluciones óptimas con base en las ecuaciones (1).

En general,

> en una tabla que da una solución óptima, un indicador igual a cero para una variable no básica sugiere la posibilidad de soluciones óptimas múltiples.

APLÍQUELO ▶

5. Una compañía produce tres clases de dispositivos que requieren tres diferentes procesos de producción. La compañía tiene asignadas un total de 190 horas para el proceso 1, 180 para el proceso 2 y 165 para el proceso 3. La tabla siguiente proporciona el número de horas por dispositivo disponibles para cada procedimiento.

	Dispositivo 1	Dispositivo 2	Dispositivo 3
Procedimiento 1	5.5	5.5	6.5
Procedimiento 2	3.5	6.5	7.5
Procedimiento 3	4.5	6.0	6.5

Si la utilidad es de \$50 por el dispositivo 1, de \$50 por el dispositivo 2 y de \$50 por el dispositivo 3, encuentre el número de dispositivos de cada clase que la compañía debe producir para maximizar la utilidad. En su calculadora gráfica, introduzca la tabla inicial en una matriz y realice las operaciones con renglones necesarias para determinar la respuesta. Redondee las respuestas al entero más cercano.

EJEMPLO 2 Soluciones múltiples

Maximizar $Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3$ sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución: La tabla simplex inicial es

$$\begin{array}{rl|rrrrrr|r|l}
 & & & & \text{variable entrante} & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & B & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & R & \textit{Cocientes} \\
\text{variable saliente} \leftarrow & s_1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \div 3 = 2 \\
 & s_2 & -2 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 & 10 \div 1 = 10 \\ \cline{3-9}
 & Z & 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad 0}_{\text{indicadores}}$$

Como hay un indicador negativo, se continúa para obtener

$$\begin{array}{rl|rrrrrr|r|l}
 & & & \text{variable entrante} & & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & & \\
 & B & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & R & \textit{Cocientes} \\
\text{variable saliente} \leftarrow & x_3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 2 & 2 \div \frac{2}{3} = 3 \\
 & s_2 & -\frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 8 & \text{no hay cociente} \\ \cline{3-9}
 & Z & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 12 &
\end{array}$$

$$\underbrace{3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0}_{\text{indicadores}}$$

Todos los indicadores son no negativos: por lo tanto, ocurre una solución óptima para la solución básica factible:

$$x_3 = 2 \quad s_2 = 8 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad s_1 = 0$$

y el valor máximo de Z es 12. Sin embargo, como x_2 es una variable no básica y su indicador es 0, verificamos si existen soluciones múltiples. Tratando a x_2 como una variable entrante, se obtiene la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l|rrrrrr|r|}
B & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & R \\
x_2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\
s_2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 25 \\ \cline{2-8}
Z & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 12
\end{array}$$

Aquí la solución básica factible es:

$$x_2 = 3, \quad s_2 = 25, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad s_1 = 0$$

(para la cual $Z = 12$, como antes) y es diferente de la anterior. Así que existen soluciones múltiples. Como solo estamos interesados en los valores de las variables de decisión, se tiene una solución óptima

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 \\ x_2 &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 3 = 3t \\ x_3 &= (1-t) \cdot 2 + t \cdot 0 = 2(1-t) \end{aligned}$$

para cada valor de t de tal forma que $0 \leq t \leq 1$. (Por ejemplo, si $t = \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = 1$ es una solución óptima).

En la última solución básica factible, x_3 no es básica y su indicador es 0. Sin embargo, de repetir el proceso para determinar otras soluciones óptimas, se regresaría a la segunda tabla. Por lo tanto, el procedimiento no da otras soluciones óptimas.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 5.5

En los problemas 1 y 2, ¿el problema de programación lineal asociado con la tabla dada tiene una degeneración? Si la tiene, ¿por qué?

1.

$$\begin{array}{c|cccccc}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & R \\
\hline
x_1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\
s_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
Z & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 10
\end{array}$$

indicadores

2.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & R \\
\hline
s_1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
x_2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
Z & -5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 2
\end{array}$$

indicadores

En los problemas del 3 al 10, utilice el método simplex.

3. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 7x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar

$$Z = 5x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = -4x_1 + 8x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Maximizar

$$Z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 &\geq -4 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Maximizar

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Maximizar

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 9 \\ -2x_1 - x_2 &\geq -8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Maximizar

$$P = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_3 &\leq 3 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

11. Producción Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones. Cada tipo requiere madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla que sigue.

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tiene disponibles 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cada silla, mecedora y sillón se venden en \$24, \$32 y \$48, respectivamente. Suponiendo que todos los muebles pueden venderse, ¿cuál es el ingreso máximo total que puede obtenerse? Determine las posibles órdenes de producción que generarán ese ingreso.

Objetivo

Usar variables artificiales para manejar problemas de maximización que no están en la forma estándar.

5.6 Variables artificiales

Para iniciar el uso del método simplex se requiere de una *solución básica factible*, SBF (Se comienza algebraicamente en un *vértice* usando la tabla simplex inicial y cada tabla subsecuente conduce a otro vértice hasta que se llega al punto que representa una solución óptima). Para un problema de programación lineal *estándar*, se empieza con la SBF en la que todas las variables de decisión son cero. Sin embargo, para un problema de maximización que no esté en la forma estándar, tal SBF, podría no existir. En esta sección se presentará la forma en que se utiliza el método simplex en tales situaciones.

Considere el problema siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 \geq 1 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dado que la restricción (2) no puede escribirse como $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, donde b es no negativa, este problema no puede ser puesto en la forma estándar. Observe que (0, 0) no es un punto factible puesto que no satisface la restricción (2). (Debido a que $0 - 0 = 0 \geq 1$ es *falso*). Para resolver este problema, se comienza por escribir las restricciones (1) y (2) como ecuaciones. La restricción (1) se convierte en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \qquad (3)$$

donde $s_1 \geq 0$ es una variable de holgura. Para la restricción (2), $x_1 - x_2$ será igual a 1 si se *resta* una variable de holgura no negativa s_2 de $x_1 - x_2$. Esto es, restando s_2 se completa el "excedente" sobre el lado izquierdo de (2) de modo que se obtiene la igualdad. De esta manera

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1 \qquad (4)$$

donde $s_2 \geq 0$. Ahora, el problema puede replantearse como:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2 \qquad (5)$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \qquad (6)$$

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1 \qquad (7)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Como (0, 0) no está en la región factible, no se tiene una solución básica factible en la que $x_1 = x_2 = 0$. De hecho, si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ se sustituyen en la ecuación (7), entonces $0 - 0 - s_2 = 1$, lo que da $s_2 = -1$, pero ahora el problema es que esto contradice la condición de que $s_2 \geq 0$.

Para iniciar el método simplex, se necesita una SBF inicial. Aunque ninguna es obvia, existe un método ingenioso para llegar a una en forma *artificial*. Requiere considerar un problema de programación lineal relacionado que se conoce como *problema artificial.* Primero, se forma una nueva ecuación sumando una variable no negativa t al lado izquierdo de la ecuación en la que el coeficiente de la variable de holgura es -1. La variable t se llama **variable artificial**. En este caso, se reemplaza la ecuación (7) por $x_1 - x_2 - s_2 + t = 1$. Así, las ecuaciones (6) y (7) se convierten en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \tag{8}$$

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1 \tag{9}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, t \geq 0$$

Una solución obvia para las ecuaciones (8) y (9) se encuentra al considerar x_1, x_2 y s_2 iguales a 0. Esto da

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0 \quad s_1 = 9 \quad t = 1$$

Observe que estos valores no satisfacen la ecuación (7). Sin embargo, es claro que cualquier solución de las ecuaciones (8) y (9) *para la cual* $t = 0$ dará una solución para las ecuaciones (6) y (7), y de manera inversa.

En *algún momento*, puede forzarse que t sea 0 si se altera la función objetivo original. Se define la **función objetivo artificial** como

$$W = Z - Mt = x_1 + 2x_2 - Mt \tag{10}$$

donde la constante M es un número positivo muy grande. No hay necesidad de preocuparse por el valor particular de M y puede procederse a maximizar W aplicando el método simplex. Como hay $m = 2$ restricciones (excluyendo las condiciones de no negatividad) y $n = 5$ variables en las ecuaciones (8) y (9), cualquier SBF debe tener al menos $n - m = 3$ variables iguales a 0. Se comienza con la siguiente solución básica factible:

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0 \quad s_1 = 9 \quad t = 1 \tag{11}$$

En esta SBF inicial, las variables no básicas son las variables de decisión y la variable de "holgura" s_2. El correspondiente valor de W es $W = x_1 + 2x_2 - Mt = -M$, lo cual es un número "extremadamente" negativo dado que se supuso que M era un número positivo muy grande. Una mejora significativa de W ocurrirá si es posible encontrar otra SBF para la cual $t = 0$. Como el método simplex busca mejorar los valores de W en cada etapa, se aplicará hasta llegar a tal solución básica factible, si es posible. Esa solución será una SBF inicial para el problema original.

Para aplicar el método simplex al problema artificial, primero se escribe la ecuación (10) como

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0 \tag{12}$$

La matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones (8), (9) y (12) es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \tag{13}$$

Una solución básica factible inicial está dada por (11). Observe que, a partir del renglón s_1, cuando $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, puede leerse directamente el valor de s_1, a saber, $s_1 = 9$. Del renglón, 2 se obtiene $t = 1$. Del renglón 3, $Mt + W = 0$. Como $t = 1$, entonces $W = -M$. Pero en una tabla simplex se desea que el valor de W aparezca en el último renglón y en la última columna. Esto no es así en (13) y, por lo tanto, esa matriz debe modificarse.

Para hacer esto, se transforma (13) en una matriz equivalente cuyo último renglón tiene la forma

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & 1 & ? \end{array}$$

Esto es, la M de la columna t es reemplazada por 0. Como resultado, si $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, entonces W es igual a la última entrada. Procediendo para obtener dicha matriz, al pivotear el elemento sombreado en la columna t, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \text{R}\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\
1 & -1 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 1\\
\hline
-1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-MR_2 + R_3}\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \text{R}\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9\\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\
\hline
-1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M
\end{array}\right]$$

Ahora se revisarán algunas cosas. Si $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $s_2 = 0$, entonces del renglón 1 se obtiene $s_1 = 9$, del renglón 2, $t = 1$; del renglón 3, $W = -M$. Así, ahora se tiene la tabla simplex inicial I:

TABLA SIMPLEX I

variable
entrante
↓

variable ← saliente

$$\begin{array}{c|cccccc|c|l}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \div 1 = 9\\
t & \boxed{1} & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \div 1 = 1\\
\hline
W & -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M &
\end{array}$$

indicadores

A partir de aquí pueden utilizarse los procedimientos de la sección 5.4. Como M es un número positivo grande, el indicador más negativo es $-1 - M$. De este modo, la variable que entra es x_1. A partir de los cocientes, se selecciona a t como la variable que sale. La entrada pivote está sombreada. Al aplicar operaciones elementales con renglones para obtener 1 en la posición del pivote y 0 en todas las demás entradas de esa columna, se obtiene la tabla simplex II:

TABLA SIMPLEX II

variable
entrante
↓

variable ← saliente

$$\begin{array}{c|cccccc|c|l}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
s_1 & 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & -1 & 0 & 8 & 8 \div 2 = 4\\
x_1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \text{no hay cociente}\\
\hline
W & 0 & -3 & 0 & -1 & 1+M & 1 & 1 &
\end{array}$$

indicadores

De la tabla II, se tiene la siguiente solución básica factible:

$$s_1 = 8, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad t = 0$$

Como $t = 0$, los valores $s_1 = 8$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $s_2 = 0$ forman una SBF inicial para el problema *original*. La variable artificial ha cumplido su propósito. Para las tablas siguientes se eliminará la columna t (porque se desea resolver el problema original) y se cambiarán las W por Z (puesto que $W = Z$ para $t = 0$). A partir de la tabla II, la variable entrante es x_2, la variable que sale es s_1 y la entrada pivote está sombreada. Al aplicar operaciones elementales con renglones (omitiendo la columna t), se obtiene la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{R}\\
\hline
x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4\\
x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 5\\
\hline
Z & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 13
\end{array}$$

indicadores

Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 13. Esto ocurre cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 4$.

Aquí se presenta un resumen del procedimiento que involucra variables artificiales.

Es útil revisar los pasos que se realizaron para resolver el problema:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9 \tag{14}$$

$$x_1 - x_2 \geq 1 \tag{15}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Se escribe la desigualdad (14) como:

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \tag{16}$$

Como la desigualdad (15) involucra al símbolo $\geq$ y la constante situada al lado derecho no es negativa, se escribe la desigualdad (15) en una forma que tiene tanto una variable de excedencia como una variable artificial:

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1 \tag{17}$$

La ecuación objetivo artificial a considerar es $W = x_1 + 2x_2 - Mt$ o, de manera equivalente,

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0 \tag{18}$$

La matriz de coeficientes aumentada del sistema formado por las ecuaciones (16) a (18) es

$$\begin{array}{c|cccccc|c} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ t & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline W & -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}$$

Ahora, se elimina M de la columna de la variable artificial y se reemplaza con 0 usando operaciones elementales con renglones. La tabla simplex I resultante corresponde a la solución básica factible inicial del problema artificial, en el que las variables de decisión x_1 y x_2 y la variable de excedencia s_2 son cada una igual a 0:

APLÍQUELO ▶

6. La compañía GHI fabrica dos modelos de tablas para nieve, estándar y de lujo, en dos diferentes plantas de manufactura. La producción máxima en la planta I es de 1200 tablas mensuales, mientras que la producción máxima en la planta II es de 1000 al mes. Debido a las obligaciones contractuales, el número de modelos de lujo producidos en la planta I no puede exceder el número de modelos estándar producidos en la misma planta I en más de 200 piezas. La utilidad por la fabricación de tablas para nieve de los modelos estándar y de lujo en la planta I es de \$40 y \$60, respectivamente, mientras que para la planta II es de \$45 y \$50, respectivamente. Este mes, GHI recibió un pedido por 1000 tablas para nieve del modelo estándar y 800 tablas del modelo de lujo. Determine cuántas tablas de cada modelo deben producirse en cada planta para satisfacer el pedido y maximizar la utilidad. [*Sugerencia:* Sea x_1 el número de modelos estándar producidos y x_2 el número de modelos de lujo fabricados en la planta I].

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c|cccccc|c} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ t & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline W & -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}$$

Las variables básicas s_1 y t ubicadas en la columna B de la tabla corresponden a las variables de no decisión de las ecuaciones (16) y (17) que tienen coeficientes positivos. Ahora, se aplicará el método simplex hasta que se obtenga una solución básica factible en la que la variable artificial, t, sea igual a 0. Después se podrá eliminar la columna de la variable artificial, cambiar las W por Z, y continuar el procedimiento hasta obtener el valor máximo de Z.

EJEMPLO 1 Variables artificiales

Utilice el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 12 \tag{19}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20 \tag{20}$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \tag{21}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución: Las ecuaciones (19), (20) y (21) involucrarán dos variables de holgura, s_1 y s_2, para las dos restricciones $\leq$, además de una variable de excedencia s_3 y una variable artificial t para la restricción $\geq$. Entonces, se tiene

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + s_1 & & = 12 \qquad (22)\\
x_1 + 2x_2 + s_2 & & = 20 \qquad (23)\\
-x_1 + x_2 - s_3 + t & & = 2 \qquad (24)
\end{array}
$$

Se considera a $W = Z - Mt = 2x_1 + x_2 - Mt$ como la ecuación objetivo artificial o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt + W = 0 \qquad (25)$$

donde M es un número positivo grande. Ahora construyamos la matriz aumentada de las ecuaciones (22) a la (25):

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20\\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2\\
\hline
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & M & 1 & 0
\end{array}
$$

Para obtener la tabla simplex I, se reemplaza la M de la columna de la variable artificial con un 0 sumando $(-M)$ veces el renglón 3 al renglón 4:

TABLA SIMPLEX I

$$
\begin{array}{rc|rrrrrrr|r|l}
 & & & \begin{array}{c}\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow\end{array} & & & & & & & \\
 & \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
 & s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 \div 1 = 12\\
 & s_2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 \div 2 = 10\\
\begin{array}{l}\text{variable} \leftarrow\\ \text{saliente}\end{array} & t & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = \ \ 2\\
\hline
 & W & -2+M & -1-M & 0 & 0 & M & 0 & 1 & -2M & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hspace{14em}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

Las variables s_1, s_2 y t de la columna B —esto es, las variables básicas— son las variables que no son de decisión y tienen coeficientes positivos en las ecuaciones (22) a la (24). Como M es un número positivo grande, $(-M)$ es el indicador más negativo. La variable entrante es x_2, la variable saliente es t y la entrada pivote está sombreada. Se continúa para obtener la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

$$
\begin{array}{rc|rrrrrrr|r|l}
 & & \begin{array}{c}\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow\end{array} & & & & & & & & \\
 & \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
\begin{array}{l}\text{variable} \leftarrow\\ \text{saliente}\end{array} & s_1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 10 & 10 \div 2 = 5\\
 & s_2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 16 & 16 \div 3 = 5\frac{1}{3}\\
 & x_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & \\
\hline
 & W & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+M & 1 & 2 & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hspace{14em}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

La solución básica factible correspondiente a la tabla II tiene $t = 0$. Por eso se elimina la columna t y se cambian las W por Z en las tablas siguientes. A continuación se obtiene la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

$$\begin{array}{c|cccccc|c|}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \text{R} \\ \hline
x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\
s_2 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 7 \\ \hline
Z & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 17 \\ \hline
 & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \frac{3}{2}\quad 0\quad \frac{1}{2}}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}$$

Todos los indicadores son no negativos. Por lo tanto, el valor máximo de Z es 17. Esto ocurre cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Restricciones de igualdad

Cuando ocurre una restricción de *igualdad* de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad \text{donde } b \geq 0$$

en un problema de programación lineal, se utilizan variables artificiales en el método simplex. Para ilustrarlo, considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6 \qquad \textbf{(26)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La restricción (26) ya está expresada como una ecuación, de modo que no es necesaria una variable de holgura. Como $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ no es una solución factible, no se tiene un punto de inicio evidente para usar el método simplex. Por lo tanto, se crea un problema artificial añadiendo primero una variable artificial t al lado izquierdo de la ecuación (26):

$$x_1 + x_2 - x_3 + t = 6$$

Aquí, una solución básica factible obvia es $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $t = 6$. La función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - Mt$$

donde M es un número positivo grande. El método simplex se aplica a este problema artificial hasta que se obtenga una SBF en la que $t = 0$. Esta solución dará una SBF inicial para el problema original y, entonces, se procederá como antes.

En general, el método simplex puede utilizarse para

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_m
\end{array}\right\} \qquad \textbf{(27)}$$

y $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$. El simbolismo $\{\leq, \geq, =\}$ significa que existe una de las relaciones "$\leq$", "$\geq$" o "$=$" para una restricción.

Para cada $b_i < 0$, se multiplica la desigualdad correspondiente por -1 (lo cual cambia el sentido de la desigualdad). Si, con todas las $b_i \geq 0$, todas las restricciones incluyen "$\leq$", el problema está en la forma estándar y se aplican directamente las técnicas simplex de las secciones anteriores. Si, *con todas las* $b_i \geq 0$, alguna restricción incluye "≥" o "=", se empieza con un problema artificial que se obtiene como sigue.

Cada restricción que contenga "≤" se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura s_i (con coeficiente $+1$):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

Cada restricción que contenga "≥" se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura s_j (con coeficiente -1) y una variable artificial t_j:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - s_j + t_j = b_j$$

Cada restricción que contenga "=" se reescribe como una ecuación con una variable artificial t_k insertada:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + t_k = b_k$$

Las variables artificiales incluidas en este problema serán, por ejemplo, t_1, t_2 y t_3, entonces la función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt_1 - Mt_2 - Mt_3$$

donde M es un número positivo grande. Una solución básica factible inicial ocurre cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ y cada variable *de excedencia* es igual a 0.

Después de obtener una tabla simplex inicial, se aplica el método simplex hasta llegar a una tabla que corresponda a una SBF en la que *todas* las variables artificiales sean iguales a 0. Después se eliminan las columnas de las variables artificiales, se cambian las W por Z y se procede a aplicar los procedimientos de las secciones anteriores.

EJEMPLO 2 Restricción de igualdad

Utilice el método simplex para maximizar $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$ sujeta a

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6 \tag{28}$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -2 \tag{29}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{30}$$

Solución: Las restricciones (28) y (29) tendrán las formas indicadas en (27) (esto es, las b positivas) si se multiplican ambos miembros de cada restricción por -1:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \tag{31}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \tag{32}$$

Como las restricciones (31) y (32) involucran "=" y "≥", tendrán lugar dos variables artificiales, t_1 y t_2. Las ecuaciones para el problema artificial son

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + t_1 \qquad = 6 \tag{33}$$

y

$$x_1 + x_2 - x_3 - s_2 \qquad + t_2 = 2 \tag{34}$$

Aquí el subíndice 2 en s_2 refleja el orden de las ecuaciones. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1 - Mt_2$ o, de manera equivalente,

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0 \tag{35}$$

donde M es un número positivo grande. La matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones (33) a la (35) es

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & -3 & 2 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array}$$

Ahora se usan operaciones elementales con renglones para eliminar las M de *todas* las columnas de variables artificiales. Sumando $-M$ veces el renglón 1 al renglón 3 y $-M$ veces el renglón 2 al renglón 3, se obtiene la tabla simplex inicial I:

TABLA SIMPLEX I

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|c|c}
 & \text{B} & x_1 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_2} & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
 & t_1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \div 2 = 3\\
\text{variable saliente} \leftarrow & t_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = 2\\
\hline
 & W & -1-2M & -3-3M & 2-M & M & 0 & 0 & 1 & -8M & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hspace{16em}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

A continuación, se obtienen las tablas simplex II y III:

TABLA SIMPLEX II

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|c|c}
 & \text{B} & x_1 & x_2 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_3} & s_2 & t_1 & t_2 & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
\text{variable saliente} \leftarrow & t_1 & -1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \div 4 = \frac{1}{2}\\
 & x_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\
\hline
 & W & 2+M & 0 & -1-4M & -3-2M & 0 & 3+3M & 1 & 6-2M & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hspace{16em}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

TABLA SIMPLEX III

$$
\begin{array}{cc|ccccccc|c|c}
 & \text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{s_2} & t_1 & t_2 & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
\text{variable saliente} \leftarrow & x_3 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1\\
 & x_2 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \\
\hline
 & W & \frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4}+M & \frac{5}{2}+M & 1 & \frac{13}{2} & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hspace{14em}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}
$$

Para la solución básica factible correspondiente a la tabla III, las variables artificiales t_1 y t_2 son 0. Ahora pueden eliminarse las columnas t_1 y t_2 y cambiar las W por Z. A continuación, se obtiene la tabla simplex IV:

TABLA SIMPLEX IV

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & Z & \text{R}\\
\hline
s_2 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\
x_2 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 3\\
\hline
Z & \frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 & 1 & 9\\
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hspace{8em}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}
$$

Como todos los indicadores son no negativos, se ha llegado a la tabla final. El valor máximo de Z es 9 y ocurre cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 0$.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Regiones factibles vacías

Es posible que el método simplex termine y no todas las variables artificiales sean iguales a 0. Puede demostrarse que en esta situación *la región factible del problema original está vacía* y, en consecuencia, *no existe solución óptima.* El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 3 Región factible vacía

Utilice el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ sujeta a

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \qquad (36)$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (37)$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: Como la restricción (36) es de la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$, donde $b_1 \geq 0$, aparecerá una variable artificial. Las ecuaciones por considerar son

$$-x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 2 \qquad (38)$$

y

$$x_1 + x_2 + s_2 = 1 \qquad (39)$$

donde s_1 es una variable de excedencia, s_2 es una variable de holgura y t_1 es artificial. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1$ o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt_1 + W = 0 \qquad (40)$$

La matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones (38) a la (40) es

$$\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
\hline
-2 & -1 & 0 & 0 & M & 1 & 0
\end{array}$$

Las tablas simplex son como sigue:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{rc|cccccc|c|l}
 & & & \begin{array}{c}\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow\end{array} & & & & & & \\
 & \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
\hline
 & t_1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = 2\\
\begin{array}{c}\text{variable} \leftarrow\\ \text{saliente}\end{array} & s_2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \div 1 = 1\\
\hline
 & W & -2+M & -1-M & M & 0 & 0 & 1 & -2M &
\end{array}$$

indicadores

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W & \text{R}\\
\hline
t_1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\
x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
\hline
W & -1+2M & 0 & M & 1+M & 0 & 1 & 1-M
\end{array}$$

indicadores

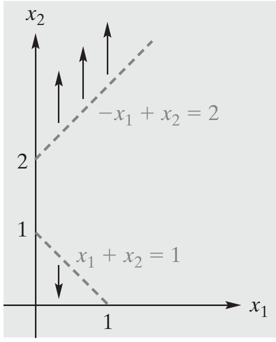


FIGURA 5.21 Región factible vacía (no existe solución).

Como M es un número positivo grande, en la tabla simplex II los indicadores son no negativos, de modo que el método simplex termina. El valor de la variable artificial t_1 es 1. Por lo tanto, como se estableció antes, la región factible del problema original está vacía y, entonces, no existe solución. Este resultado puede obtenerse de manera geométrica. En la figura 5.21 se muestran las gráficas de $-x_1 + x_2 = 2$ y $x_1 + x_2 = 1$ para $x_1, x_2 \geq 0$. Puesto que no existe un punto (x_1, x_2) que al mismo tiempo esté por encima de la recta $-x_1 + x_2 = 2$ y por debajo de $x_1 + x_2 = 1$, de tal forma que $x_1, x_2 \geq 0$, la región factible está vacía y, por lo tanto, no existe solución.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

En la siguiente sección se usará el método simplex para resolver problemas de minimización.

PROBLEMAS 5.6

Utilice el método simplex para resolver los siguientes problemas.

1. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 6x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Maximizar

$$Z = x_1 - 10x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2 - x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Maximizar

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq -6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 6x_2 &\geq 12 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

11. Maximizar

$$Z = -3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$Z = 2x_1 - 8x_2$$

sujeta a

$$x_1 - 2x_2 \geq -12$$
$$-x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

13. Producción Una compañía fabrica dos tipos de escritorios: Estándar y Ejecutivo. Cada tipo requiere de los tiempos de ensamblado y acabado que se dan en la tabla siguiente:

	Tiempo de ensamblado	Tiempo de acabado	Utilidad por unidad
Estándar	1 hr	2 hr	$40
Ejecutivo	2 hr	3 hr	$50

La utilidad sobre cada unidad también está indicada. El número de horas disponibles por semana en el departamento de ensamblado es de 200 y en el departamento de acabado de 500. A consecuencia de un contrato con el sindicato, al departamento de acabado se le garantizan al menos 300 horas de trabajo a la semana. ¿Cuántas unidades a la semana de cada tipo de escritorio debe producir la compañía para maximizar la utilidad?

14. Producción Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere el uso de tiempo en las máquinas A y B que se da en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 hr	1 hr
Producto Y	2 hr	1 hr
Producto Z	2 hr	2 hr

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 30, respectivamente. La utilidad por unidad de X, Y y Z es de $50, $60 y $75, respectivamente. La siguiente semana deben producirse al menos cinco unidades de Z. ¿Cuál debe ser el plan de producción en ese periodo para alcanzar la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

15. Inversiones El folleto informativo de un fondo de inversión establece que todo el dinero está invertido en bonos que están considerados como A, AA y AAA; no más de 30% de la inversión total está en bonos A y AA y al menos 50% está en bonos AA y AAA. Los bonos A, AA y AAA obtienen, respectivamente, 8, 7 y 6% anual. Determine los porcentajes de la inversión total que serán comprometidos a cada tipo de bono de modo que el fondo maximice el rendimiento anual. ¿Cuál es ese rendimiento?

Objetivo

Mostrar cómo resolver un problema de minimización cambiando la función objetivo de modo que resulte en un problema de maximización.

5.7 Minimización

Hasta aquí se ha utilizado el método simplex para *maximizar* funciones objetivo. En general, para *minimizar* una función es suficiente con maximizar su negativo. Para entender por qué, considere la función $f(x) = x^2 - 4$. En la figura 5.22(a), observe que el valor mínimo de f es -4 y ocurre cuando $x = 0$. En la figura 5.22(b) se muestra la gráfica de $g(x) = -f(x) = -(x^2 - 4)$. Esta gráfica es la reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f. Observe que el valor máximo de g es 4 y ocurre cuando $x = 0$. Por lo tanto, el valor mínimo de $x^2 - 4$, es el negativo del valor máximo de $-(x^2 - 4)$. Esto es,

$$\text{mín } f = -\text{máx}(-f)$$

De manera alternativa, piense en un punto C ubicado sobre la mitad positiva de la recta numérica que se desplaza hacia la izquierda. Conforme esto sucede, el punto $-C$ se desplaza

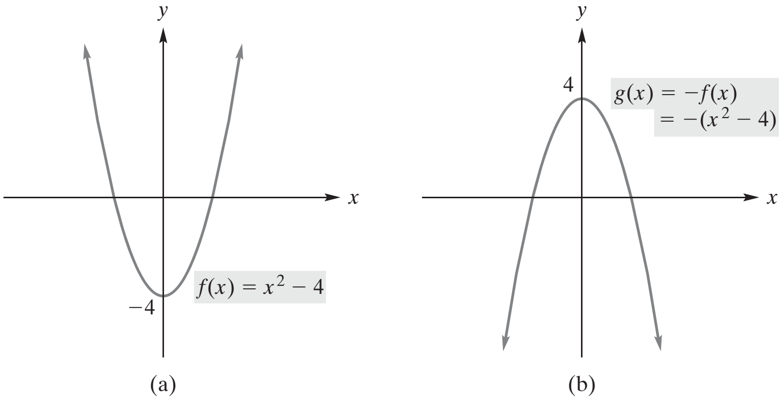


FIGURA 5.22 El valor mínimo de $f(x)$ es igual al negativo del valor máximo de $-f(x)$.

hacia la derecha. Es claro que si, por alguna razón, C se detiene, lo hace en el mínimo valor que encuentra. Si C se detiene, también lo hace $-C$, en el máximo valor que encuentra. Como este valor de $-C$ es aún el negativo del valor de C, se observa que

$$\text{mín } C = -\text{máx}(-C)$$

El problema del ejemplo 1 se resolverá de manera más eficiente en el ejemplo 4 de la sección 5.8.

EJEMPLO 1 Minimización

Utilice el método simplex para minimizar $Z = x_1 + 2x_2$ sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (3)$$

Solución: Para minimizar Z se puede maximizar $-Z = -x_1 - 2x_2$. Observe que cada una de las restricciones (1) y (2) tiene la forma $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$, donde $b \geq 0$. Por lo tanto, sus ecuaciones involucran dos variables de excedencia s_1 y s_2, cada una con coeficiente de -1, y dos variables artificiales t_1 y t_2:

$$-2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 1 \qquad (4)$$

$$-x_1 + x_2 - s_2 + t_2 = 2 \qquad (5)$$

Como hay *dos* variables artificiales, se maximiza la función objetivo

$$W = (-Z) - Mt_1 - Mt_2$$

donde M es un número positivo grande. En forma equivalente,

$$x_1 + 2x_2 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0 \qquad (6)$$

La matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones (4) a la (6) es:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{rrrrrrrr}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \\
\end{array} \\
\left[\begin{array}{rrrrrrr|r}
-2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & M & M & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

A continuación, se obtienen las tablas simplex I, II y III:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{rc|ccccccc|c|l}
 & \text{B} & x_1 & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{x_2} & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \text{R} & \textit{Cocientes} \\
\substack{\text{variable}\\ \text{saliente}} \leftarrow & t_1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \div 1 = 1 \\
 & t_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = 2 \\
\hline
 & W & 1+3M & 2-2M & M & M & 0 & 0 & 1 & -3M & \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\hphantom{1+3M \quad 2-2M \quad M \quad M \quad 0 \quad 0}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}$$

TABLA SIMPLEX II

variable
entrante
↓

$$\begin{array}{rc|ccccccc|c|l}
 & B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & R & \\
 & x_2 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \textit{Cocientes} \\
\text{variable saliente} \leftarrow & t_2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \div 1 = 1 \\
\hline
 & W & 5-M & 0 & 2-M & M & -2+2M & 0 & 1 & -2-M &
\end{array}$$

indicadores

TABLA SIMPLEX III

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & R \\
x_2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
s_1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
W & 3 & 0 & 0 & 2 & M & -2+M & 1 & -4
\end{array}$$

indicadores

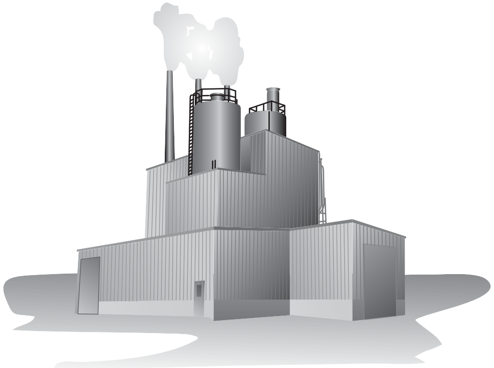
La solución básica factible correspondiente a la tabla III tiene ambas variables artificiales iguales a 0. De este modo, las columnas t_1 y t_2 ya no son necesarias. Sin embargo, en las columnas x_1, x_2, s_1 y s_2 los indicadores son no negativos y, en consecuencia, una solución óptima ha sido alcanzada. Como $W = -Z$ cuando $t_1 = t_2 = 0$, el valor máximo de $-Z$ es -4. Por lo tanto, el valor *mínimo* de Z es $-(-4) = 4$. Esto ocurre cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Aquí se presenta un ejemplo interesante que trata sobre controles ambientales.

EJEMPLO 2 Reducción de emisiones de polvo

Una planta de cemento produce 2 500 000 barriles de cemento por año. Los hornos emiten 2 lb de polvo por cada barril producido. Una dependencia gubernamental para protección del ambiente requiere que la planta reduzca sus emisiones de polvo a no más de 800 000 lb anuales. Existen dos dispositivos de control de emisiones disponibles, A y B. El dispositivo A reduce las emisiones a $\frac{1}{2}$ lb por barril y su costo es de \$0.20 por barril de cemento producido. Con el dispositivo B, las emisiones son reducidas a $\frac{1}{5}$ de libra por barril y el costo es de \$0.25 por barril de cemento producido. Determine el plan de acción más económico que la planta debe asumir de modo que cumpla con el requerimiento gubernamental y a la vez mantenga su producción anual de 2 500 000 barriles de cemento.[5]



Solución: Se debe minimizar el costo anual del control de emisiones. Sean x_1, x_2 y x_3 el número anual de barriles de cemento producidos en hornos que utilizan el dispositivo A,

---

[5] Este ejemplo está adaptado a partir de Robert E. Kohn, "A Mathematical Model for Air Pollution Control", *School Science and Mathematics*, 69 (1969), pp. 487-494.

el B y los que no usan dispositivo, respectivamente. Entonces $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y el costo anual del control de emisiones es:

$$C = \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3 \tag{7}$$

Como se producen 2 500 000 barriles de cemento cada año,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\,500\,000 \tag{8}$$

El número de libras de polvo emitidas anualmente por los hornos que utilizan el dispositivo A, el dispositivo B y sin dispositivo son $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{5}x_2$ y $2x_3$, respectivamente. Como el número total de libras de emisión de polvo no debe ser mayor que 800 000,

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + 2x_3 \leq 800\,000 \tag{9}$$

Para minimizar C sujeta a las restricciones (8) y (9), donde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, primero se maximiza $-C$ utilizando el método simplex. Las ecuaciones por considerar son

$$x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 2\,500\,000 \tag{10}$$

y

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + 2x_3 + s_2 = 800\,000 \tag{11}$$

donde t_1 y s_2 son la variable artificial y la variable de holgura, respectivamente. La ecuación objetivo artificial es $W = (-C) - Mt_1$ o, en forma equivalente,

$$\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3 + Mt_1 + W = 0 \tag{12}$$

donde M es un número positivo grande. La matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones (10) a la (12) es:

$$\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & W & \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\,500\,000 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 0 & 0 & 800\,000 \\
\hline
\frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & M & 1 & 0
\end{array}$$

Después de determinar la tabla simplex inicial, se obtiene (luego de tres tablas adicionales) la tabla final:

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & -C & \text{R} \\
x_2 & 0 & 1 & -5 & -\frac{10}{3} & 0 & 1\,500\,000 \\
x_1 & 1 & 0 & 6 & \frac{10}{3} & 0 & 1\,000\,000 \\
\hline
-C & \underbrace{0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{6}}_{\text{indicadores}} & & & & 1 & -575\,000
\end{array}$$

Observe que W es reemplazada por $-C$ cuando $t_1 = 0$. El valor máximo de $-C$ es $-575\,000$ y ocurre cuando $x_1 = 1\,000\,000$, $x_2 = 1\,500\,000$ y $x_3 = 0$. Por lo tanto, el costo anual *mínimo* del control de emisiones debe ser $-(-575\,000) = \$575\,000$. El dispositivo A debe instalarse en hornos que produzcan 1 000 000 barriles de cemento anuales y el dispositivo B en hornos que produzcan 1 500 000 barriles anuales.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

PROBLEMAS 5.7

Use el método simplex para resolver los problemas siguientes.

1. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 7 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Minimizar

$$Z = 12x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \geq 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_3 \leq -4$$
$$x_2 + x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Minimizar

$$Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$
$$2x_1 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. Minimizar

$$Z = -x_1 - 3x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Minimizar

$$Z = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

9. Minimizar

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

11. Control de emisiones Una planta de cemento produce 3 300 000 barriles de cemento por año. Los hornos emiten 2 libras de polvo por cada barril producido. La planta debe reducir sus emisiones a no más de 1 000 000 libras anuales. Hay dos dispositivos de control disponibles, A y B. El dispositivo A reducirá las emisiones a $\frac{1}{2}$ libra por barril y el costo es de \$0.25 por barril de cemento producido. Con el dispositivo B, las emisiones son reducidas a $\frac{1}{4}$ de libra por barril y el costo es de \$0.40 por barril de cemento producido. Determine el plan de acción más económico que la planta debe asumir de modo que mantenga su producción anual de exactamente 3 300 000 barriles de cemento.

12. Lotes de construcción Un desarrollador puede comprar lotes por \$300 000 en la Avenida Baltic y por \$400 000 en Park Place. En cada lote de la Avenida Baltic puede construir un edificio de apartamentos de seis pisos y en cada lote de Park Place puede construir un edificio de apartamentos de cuatro pisos. El ayuntamiento exige que su desarrollo añada 24 pisos de apartamentos en el vecindario y, también, requiere que cada desarrollo aporte por lo menos ocho puntos de embellecimiento a la ciudad. El desarrollador ganará un punto por cada lote de la Avenida Baltic y dos puntos por cada lote de Park Place. ¿Cuántos lotes debe comprar el desarrollador en la Avenida Baltic y en Park Place para minimizar sus costos y cuál es su costo mínimo?

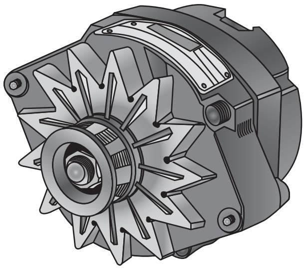
13. Costos de transportación Un vendedor tiene tiendas en Columbus y Dayton y bodegas en Akron y Springfield. Cada tienda requiere del envío de exactamente 150 reproductores de video. En la bodega de Akron hay 200 reproductores de video y en la de Springfield hay 150.

Los costos de transportación para enviar reproductores de video desde los almacenes hasta las tiendas están dados en la tabla siguiente:

	Columbus	Dayton
Akron	\$5	\$7
Springfield	\$3	\$2

Por ejemplo, el costo para enviar un reproductor desde Akron a la tienda de Columbus es de \$5. ¿Cómo debe pedir el vendedor los reproductores de modo que los requerimientos de las tiendas se satisfagan y los costos totales de transportación se minimicen? ¿Cuál es el costo mínimo de transportación?

14. Compra de piezas Un fabricante de automóviles compra alternadores de dos proveedores, X y Y. El fabricante tiene dos plantas, A y B, y requiere exactamente de 7000 alternadores para la planta A y de exactamente 5000 para la planta B. El proveedor X cobra \$300 y \$320 por los alternadores (incluyendo costos de transporte) A y B, respectivamente. Para estos precios, X requiere que el fabricante de automóviles ordene al menos un total de 3000 unidades; sin embargo, X no puede proveer más de 5000 unidades. El proveedor Y cobra \$340 y \$280 por cada alternador, A y B, respectivamente, y requiere una orden mínima de 7000 piezas. Determine cómo debe hacer los pedidos de alternadores el fabricante de automóviles para que su costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?



15. Producción de papel para envoltura Una compañía de papel almacena su papel para envoltura en rollos de 48 pulgadas de ancho, llamados rollos de almacenamiento, y los corta en anchos más pequeños dependiendo de los pedidos de los clientes. Suponga que se recibe un pedido de 50 rollos de papel de 15 pulgadas de ancho y de 60 rollos de 10 pulgadas de ancho. A partir de un rollo de almacenamiento, la compañía puede cortar tres rollos de 15 pulgadas de ancho y un rollo de 3 pulgadas de ancho. (Vea la figura 5.23). Como el rollo de 3 pulgadas de ancho no puede utilizarse en este pedido, es el recorte que se desperdicia de este rollo.

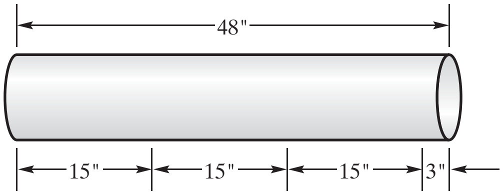


FIGURA 5.23

De igual modo, a partir de un rollo de almacenamiento se pueden cortar dos rollos de 15 pulgadas de ancho, un rollo de 10 pulgadas de ancho y otro de 8 pulgadas de ancho. En este caso, el desperdicio sería de 8 pulgadas. La tabla siguiente indica el número de rollos de 15 y 10 pulgadas, junto con el desperdicio, que pueden cortarse a partir de un rollo de almacenamiento:

Ancho del rollo	15 pulg	3	2	1	—
	10 pulg	0	1	—	—
Desperdicio		3	8	—	—

(a) Complete las últimas dos columnas de la tabla. (b) Suponga que la compañía tiene suficientes rollos de almacenamiento para cubrir la orden y que *al menos* 50 rollos de 15 pulgadas de ancho y *al menos* 60 rollos de 10 pulgadas de ancho de papel para envoltura serán cortados. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los números de rollos de almacenamiento que se cortan en una de las formas descritas en las columnas 1 a 4 de la tabla, respectivamente, determine los valores de las x en tal forma que se minimice el desperdicio total. (c) ¿Cuál es la cantidad mínima de desperdicio total?

Objetivo

Presentar de manera informal y luego definir formalmente el dual de un problema de programación lineal.

5.8 Dual

Existe un principio fundamental, llamado *dualidad*, que permite resolver un problema de maximización al resolver un problema de minimización relacionado. A continuación, se ilustrará esto.

Tabla 5.2

	Máquina A	Máquina B	Utilidad por unidad
Manual	1 h	1 h	\$10
Eléctrico	2 h	4 h	\$24
Horas disponibles	120	180	

Suponga que una compañía fabrica dos tipos de podadoras para jardín, manuales y eléctricas, y cada una requiere el uso de las máquinas A y B para su producción. En la tabla 5.2 se indica que una podadora manual requiere del uso de A durante 1 hora y de B durante otra hora. Las podadoras eléctricas requieren de A durante 2 horas y de B durante 4 horas. Los números máximos de horas disponibles por mes para las máquinas A y B son de 120 y 180, respectivamente. La utilidad por una podadora manual es de \$10 y por una eléctrica es de \$24. Suponiendo que la compañía puede vender todas las podadoras que produce, determine la utilidad mensual máxima. Si x_1 y x_2 son los números de podadoras manuales y eléctricas que se producen por mes, respectivamente, entonces se desea maximizar la función de utilidad mensual

$$P = 10x_1 + 24x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \tag{1}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 180 \tag{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Al escribir las restricciones (1) y (2) como ecuaciones, se tiene

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \qquad (3)$$

y

$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 180$$

donde s_1 y s_2 son variables de holgura. En la ecuación (3), $x_1 + 2x_2$ es el número de horas que utiliza la máquina A. Como hay disponibles 120 horas para A, entonces s_1 es el número de horas disponibles que *no* se utilizan para la producción. Esto es, s_1 representa para A la capacidad no usada (en horas). De igual modo, s_2 representa la capacidad no utilizada para B. Al resolver este problema por el método simplex, se encuentra que la tabla final es:

$$\begin{array}{c} \text{B} \\ x_1 \\ x_2 \\ \\ P \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{array}}_{\text{indicadores}} \qquad (4)$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & P & & \text{R} \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & & 60 \\ x_2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & 30 \\ \hline P & 0 & 0 & 8 & 2 & 1 & & 1320 \end{array}$$

Así, la utilidad máxima mensual es de \$1320 y ocurre cuando $x_1 = 60$ y $x_2 = 30$.

Ahora, se verá la situación desde un punto de vista diferente. Suponga que la compañía desea rentar sus máquinas A y B. ¿Cuál es la renta mensual mínima que debe cobrar? Ciertamente, si el cobro es muy alto, nadie le rentará las máquinas. Por otra parte, si el cobro es muy bajo, no le convendría rentarlas todo el tiempo. Es obvio que la renta mínima debe ser de \$1320. Esto es, el mínimo que la compañía debe cobrar es la utilidad que podría tener utilizando ella misma las máquinas. Podemos llegar a este costo de renta mínimo de manera directa, resolviendo un problema de programación lineal.

Sea F el costo de la renta mensual. Para determinar F, se supone que la compañía asigna valores monetarios a cada hora de capacidad ocupada en las máquinas A y B. Sean estos valores y_1 y y_2, respectivamente, donde $y_1, y_2 \geq 0$. Entonces, el valor mensual de la máquina A es $120y_1$ y el de la máquina B es $180y_2$. Por lo tanto,

$$F = 120y_1 + 180y_2$$

El valor total del tiempo de máquina para producir una serie de podadoras manuales es $1y_1 + 1y_2$. Esto debe ser al menos igual a los \$10 de utilidad que la compañía puede recibir por producir dichas podadoras. Si no, la compañía podría ganar más dinero utilizando el tiempo de la máquina para producir una serie de podadoras manuales. De acuerdo con esto,

$$1y_1 + 1y_2 \geq 10$$

De igual modo, el valor total del tiempo de máquina para producir una podadora eléctrica debe ser al menos de \$24:

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24$$

Por lo tanto, la compañía desea

$$\text{minimizar } F = 120y_1 + 180y_2$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 \geq 10 \qquad (5)$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24 \qquad (6)$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Para minimizar F, se maximiza $-F$. Como las restricciones (5) y (6) tienen la forma $a_1y_1 + a_2y_2 \geq b$, donde $b \geq 0$, se considerará un problema artificial. Si r_1 y r_2 son variables de excedencia t_1 y t_2 son variables artificiales, entonces se quiere maximizar

$$W = (-F) - Mt_1 - Mt_2$$

donde M es un número positivo grande, tal que

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - r_1 + t_1 &= 10 \\ 2y_1 + 4y_2 - r_2 + t_2 &= 24 \end{aligned}$$

y las y, r y t son no negativas. La tabla simplex final para este problema (con las columnas de las variables artificiales eliminadas y W cambiada a $-F$) es:

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\text{B} & y_1 & y_2 & r_1 & r_2 & -F & \text{R} \\
\hline
y_1 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 8 \\
y_2 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\
\hline
-F & 0 & 0 & 60 & 30 & 1 & -1320 \\
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad 60 \quad 30}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}$$

Como el valor máximo de $-F$ es -1320, el valor *mínimo* de F es $-(-1320) = \$1320$ (como se anticipó). Esto ocurre cuando $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$. Por lo tanto, se ha determinado el valor óptimo de un problema de programación lineal (maximización de utilidad) encontrando el valor óptimo de otro problema de programación lineal (minimización del costo de la renta).

Los valores $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$ podrían haberse anticipado a partir de la tabla final del problema de maximización. En (4), el indicador 8 de la columna s_1 significa que en el nivel óptimo de producción, si s_1 aumenta una unidad, entonces la utilidad P *disminuye* en 8. Esto es, 1 hora de capacidad sin uso de A disminuye la utilidad máxima en \$8. Entonces, 1 hora de capacidad de A tiene un valor monetario de \$8. Se dice que el **precio sombra** de 1 hora de capacidad de A es de \$8. Ahora, recuerde que en el problema de la renta y_1 es el valor de 1 hora de capacidad de A. Así, y_1 debe ser igual a 8 en la solución óptima para ese problema. De manera similar, como en la columna s_2 el indicador es 2, el precio sombra de 1 hora de capacidad de B es de \$2, el cual es el valor de y_2 en la solución óptima del problema de la renta.

Ahora se analizará la estructura de los dos problemas de programación lineal:

Maximizar

$$P = 10x_1 + 24x_2$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 180 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Minimizar

$$F = 120y_1 + 180y_2$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 10 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geq 24 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

Observe que en (7) las desigualdades son todas $\leq$, pero en (8) son todas $\geq$. En el problema de minimización, los coeficientes de la función objetivo son los términos constantes en (7). Los términos constantes en (8) son los coeficientes de la función objetivo del problema de maximización. Los coeficientes de las y_1 en (8) son los coeficientes de x_1 y x_2 en la primera restricción de (7); los coeficientes de las y_2 en (8) son los coeficientes de x_1 y x_2 en la segunda restricción de (7). El problema de minimización es llamado el *dual* del problema de maximización y viceversa.

En general, es posible asociar cualquier problema dado de programación lineal con otro problema de programación lineal llamado su **dual**. El problema dado se llama **primal**. Si el primal es un problema de maximización, entonces su dual es un problema de minimización. De manera similar, si el problema primal implica minimización, su dual implica maximización.

Cualquier problema primal de maximización puede escribirse en la forma indicada en la tabla 5.3. Observe que no existen restricciones sobre las b.[6] El correspondiente problema

---

[6] Si una restricción de desigualdad incluye $\geq$, al multiplicar ambos lados por -1 se obtiene una desigualdad que incluye $\leq$. Si una restricción es una igualdad, puede reescribirse en términos de dos desigualdades: una que involucre $\leq$ y otra que involucre $\geq$.

dual de minimización puede escribirse en la forma indicada en la tabla 5.4. De manera similar, cualquier problema primal de minimización puede escribirse en la forma de la tabla 5.4 y su dual es el problema de maximización que se da en la tabla 5.3.

Tabla 5.3 Primal (dual)

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\} \tag{9}$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$

Tabla 5.4 Dual (primal)

Minimizar $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$
sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{array}\right\} \tag{10}$$

y $y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0$

Ahora se comparará el primal y su dual en las tablas 5.3 y 5.4. Por conveniencia, cuando aquí se habla de restricciones, se hace referencia a aquéllas mostradas en (9) o (10); no se incluirán las condiciones de no negatividad. Observe que si todas las restricciones del problema primal involucran $\le$ ($\ge$), entonces todas las restricciones en su dual involucran $\ge$ ($\le$). En la función objetivo del dual, los coeficientes son los términos constantes de las restricciones del primal. De manera similar, los términos constantes en las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal. La matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del dual es la *transpuesta* de la matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del primal. Esto es,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si el primal involucra n variables de decisión y m variables de holgura, entonces el dual involucra m variables de decisión y n variables de holgura. Debe observarse que el dual del *dual* es el primal.

Existe una relación importante entre el primal y el dual:

Si el primal tiene una solución óptima, también la tiene el dual, y el valor óptimo de la función objetivo del primal es *el mismo* valor óptimo que el del dual.

Además, suponga que la función objetivo del primal es

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Entonces,

> si s_1 es la variable de holgura asociada con la *i*-ésima restricción del dual, entonces el indicador de la columna s_i de la tabla simplex final del dual es el valor de x_i en la solución óptima del primal.

Por eso es que puede resolverse el problema primal con solo resolver el dual. En ocasiones, esto es más conveniente que resolver de manera directa el primal. El vínculo entre el primal y el dual puede expresarse en forma muy sucinta usando notación matricial. Sean

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \; c_2 \cdots c_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces la función objetivo del problema primal puede escribirse como

$$Z = CX$$

Además, si se escribe

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

entonces el sistema de restricciones para el problema primal se transforma en

$$AX \leq B \quad \text{y} \quad X \geq 0$$

donde se entiende que $\leq$ ($\geq$), entre matrices del mismo tamaño, significa que la desigualdad abarca cada par de entradas correspondientes. Ahora sea

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$

El problema dual tiene una función objetivo dada por,

$$W = B^{\mathrm{T}}Y$$

y su sistema de restricciones es:

$$A^{\mathrm{T}}Y \geq C^{\mathrm{T}} \quad \text{y} \quad Y \geq 0$$

EJEMPLO 1 Determinación del dual de un problema de maximización

Encuentre el dual de:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

APLÍQUELO ▶

7. Encuentre el dual del problema siguiente: suponga que una compañía tiene $60 000 para comprar materiales y fabricar tres tipos de dispositivos. La compañía tiene asignadas un total de 2000 horas para tiempo de ensamblado y 120 horas para empacar los dispositivos. La tabla siguiente proporciona los costos, el número de horas y la utilidad por dispositivo de cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo por dispositivo	$300	$220	$180
Horas de ensamblado por dispositivo	20	40	20
Horas de empacado por dispositivo	3	1	2
Utilidad	$300	$200	$200

Solución: El primal tiene la forma de la tabla 5.3. Así, el dual es

$$\text{minimizar } W = 10y_1 + 10y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\ 0y_1 + y_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

8. Encuentre el dual del siguiente problema: una persona decide tomar dos diferentes suplementos dietéticos. Cada suplemento contiene dos ingredientes esenciales, A y B, para los cuales existen requerimientos mínimos diarios y cada uno contiene un tercer ingrediente, C, que debe minimizarse.

	Suplemento 1	Suplemento 2	Requerimiento diario
A	20 mg/oz	6 mg/oz	98 mg
B	8 mg/oz	16 mg/oz	80 mg
C	6 mg/oz	2 mg/oz	

EJEMPLO 2 Determinación del dual de un problema de minimización

Encuentre el dual de la siguiente función:

$$\text{Minimizar } Z = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$3x_1 - x_2 \geq 2 \tag{11}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1 \tag{12}$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 3 \tag{13}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: Como el primal es un problema de minimización, se desea que las restricciones (12) y (13) involucren $\geq$. (Vea la tabla 5.4). Multiplicando ambos lados de (12) y (13) por -1, se obtiene $-x_1 - x_2 \geq -1$ y $4x_1 - x_2 \geq -3$. De este modo, las restricciones (11) a la (13) se convierten en

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 2 \\ -x_1 - x_2 &\geq -1 \\ 4x_1 - x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

El dual es

$$\text{maximizar } W = 2y_1 - y_2 + 3y_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3y_1 - y_2 + 4y_3 &\leq 4 \\ -y_1 - y_2 - y_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

y $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

9. Una compañía produce tres clases de dispositivos que requieren tres diferentes procesos de producción. La compañía ha destinado un total de 300 horas al proceso 1, 400 horas al proceso 2 y 600 horas al proceso 3. La tabla siguiente da el número de horas por dispositivo para cada proceso:

	Disp. 1	Disp. 2	Disp. 3
Proceso 1	30	15	10
Proceso 2	20	30	20
Proceso 3	40	30	25

Si la utilidad es de \$30 por el dispositivo 1, de \$20 por el dispositivo 2 y de \$20 por el dispositivo 3, use el dual y el método simplex para determinar el número de dispositivos de cada clase que la compañía debe producir con el fin de maximizar la utilidad.

EJEMPLO 3 Aplicación del método simplex al dual

Utilice el dual y el método simplex para

$$\text{maximizar } Z = 4x_1 - x_2 - x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: El dual es

$$\text{minimizar } W = 4y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$3y_1 + y_2 \geq 4 \qquad \textbf{(14)}$$

$$y_1 + y_2 \geq -1 \qquad \textbf{(15)}$$

$$-y_1 + y_2 \geq -1 \qquad \textbf{(16)}$$

y y_1, $y_2 \geq 0$. Para utilizar el método simplex se deben tener constantes no negativas en (15) y (16). Al multiplicar ambos lados de estas ecuaciones por -1, se obtiene:

$$-y_1 - y_2 \leq 1 \qquad \textbf{(17)}$$

$$y_1 - y_2 \leq 1 \qquad \textbf{(18)}$$

Como (14) involucra $\geq$, se requiere de una variable artificial. Las ecuaciones correspondientes de (14), (17) y (18) son, respectivamente,

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 - s_1 + t_1 &= 4 \\ -y_1 - y_2 + s_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

y

$$y_1 - y_2 + s_3 = 1$$

donde t_1 es una variable artificial, s_1 es una variable de excedenci s_2 y s_3 son variables de holgura. Para minimizar W, se maximiza $-W$. La función objetivo artificial es $U = (-W) - Mt_1$, donde M es un número positivo grande. Después de hacer los cálculos, encontramos que la tabla simplex final es:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \text{B} & y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & s_3 & -W & \text{R} \\ \hline y_2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ s_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ y_1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ \hline -W & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}$$

indicadores

El valor máximo de $-W$ es $-\frac{11}{2}$, de modo que el valor *mínimo* de W es $\frac{11}{2}$. De aquí que el valor máximo de Z sea también $\frac{11}{2}$. Note que los indicadores de las columnas s_1, s_2 y s_3 son $\frac{3}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Por lo tanto, el valor máximo de Z ocurre cuando $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{1}{2}$.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

En el ejemplo 1 de la sección 5.7 se usó el método simplex para

$$\text{minimizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a:

$$-2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2$$

Este estudio muestra la ventaja de resolver el problema dual.

y x_1, $x_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial tiene 24 entradas e involucra dos variables artificiales. La tabla del dual solo tiene 18 entradas y *ninguna variable artificial* y es más fácil de manipular, como lo mostrará el ejemplo 4. Por lo tanto, puede ser una clara ventaja resolver el dual para determinar la solución del primal.

EJEMPLO 4 Uso del dual y del método simplex

Utilice el dual y el método simplex para

$$\text{minimizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 + x_2 \geq 2$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: El dual es

$$\text{maximizar } W = y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$-2y_1 - y_2 \leq 1$$
$$y_1 + y_2 \leq 2$$

y $y_1, y_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial es la tabla I:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{rcccccc|cl}
 & \text{B} & \overset{\substack{\text{variable}\\ \text{entrante}\\ \downarrow}}{y_1} & y_2 & s_1 & s_2 & W & \text{R} & \textit{Cocientes}\\
 & s_1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\begin{array}{c}\text{variable}\\ \text{saliente}\end{array} \leftarrow & s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = 2\\
\hline
 & W & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{-1 \quad -2 \quad 0 \quad 0}}_{\text{indicadores}}} & & &
\end{array}$$

Después se obtiene la tabla II.

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{cccccc|c}
\text{B} & y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & W & \text{R}\\
s_1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\
y_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\
\hline
W & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4\\
 & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0 \quad 2}}_{\text{indicadores}}} & &
\end{array}$$

Como en la tabla II todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de W es 4. De aquí que el valor mínimo de Z sea también 4. Los indicadores 0 y 2 ubicados en las columnas s_1 y s_2 de la tabla II, significan que el valor mínimo de Z ocurre cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

PROBLEMAS 5.8

En los problemas del 1 al 8, encuentre los duales. No los resuelva.

1. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$3x_1 - x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Minimizar

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Minimizar

$$Z = 8x_1 + 12x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$-x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 \geq 11$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

6. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 5x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 7$$
$$3x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Minimizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$-4x_1 + 3x_2 \geq -10$$
$$8x_1 - 10x_2 \leq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En los problemas 9 a 14, resuelva utilizando los duales y el método simplex.

9. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 4x_2 \geq 28$$
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$-3x_1 + 8x_2 \geq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

11. Maximizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

12. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 6x_2$$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

13. Minimizar

$$Z = 6x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

14. Minimizar

$$Z = 2x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

15. Publicidad Una compañía está comparando los costos de publicidad en dos medios —periódico y radio—. La tabla siguiente muestra el número de personas, por grupo de ingresos, que alcanza cada uno de estos medios por cada unidad monetaria de publicidad.

	Menos de $40 000	Más de $40 000
Periódico	40	100
Radio	50	25

La compañía quiere captar al menos 80 000 personas con ingresos menores de $40 000 y al menos 60 000 con ingresos de $40 000 o más. Utilice el dual y el método simplex para determinar las cantidades que la compañía debe gastar en publicidad en periódico y en radio de modo que capte este número de personas con un costo mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo de publicidad?

16. Programación para camiones de entrega Debido al incremento de las ventas, un servicio de comidas considera que debe alquilar camiones de entrega adicionales. Las necesidades mínimas son de 12 unidades con espacio refrigerado y no refrigerado. En el mercado de alquiler, se dispone de dos tipos estándar de camiones. El tipo A tiene 2 unidades de espacio refrigerado y 1 unidad de espacio no refrigerado. El tipo B tiene 2 unidades de espacio refrigerado y 3 unidades de espacio no refrigerado. Los costos por milla son de \$0.40 para A y de \$0.60 para B. Use el dual y el método simplex para encontrar el costo total mínimo por milla y el número necesario de camiones de cada tipo para alcanzar dicho objetivo.

17. Costos de mano de obra Una compañía paga a sus trabajadores calificados y semicalificados de su departamento de ensamblado \$14 y \$8 por hora, respectivamente. En el departamento de embarques, a los empleados se les paga \$9 por hora y a los aprendices \$7.25 por hora. La compañía requiere al menos de 90 trabajadores en el departamento de ensamblado y 60 empleados en el de embarques. Debido a acuerdos sindicales, deben emplearse al menos el doble de trabajadores semicalificados que de calificados. También, deben contratarse al menos el doble de los empleados de embarques que de aprendices. Utilice el dual y el método simplex para determinar el número de trabajadores de cada tipo que la compañía debe emplear de modo que el total de salarios por hora sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo en salarios por hora?

Repaso del capítulo 5

Términos y símbolos importantes

Sección 5.1 **Desigualdades lineales con dos variables**
desigualdad lineal semiplano (abierto, cerrado)
sistema de desigualdades

Sección 5.2 **Programación lineal**
restricción función lineal en x y y programación lineal
función objetivo solución factible condiciones de no negatividad
región factible línea de isoutilidad vértice
región factible acotada región factible no acotada
región factible no vacía región factible vacía
línea de isocosto solución no acotada

Sección 5.3 **Soluciones óptimas múltiples**
soluciones óptimas múltiples

Sección 5.4 **Método simplex**
problema de programación lineal estándar
variable de holgura variable de decisión solución básica factible
variable no básica variable básica tabla simplex renglón objetivo
variable entrante indicador variable saliente entrada pivote

Sección 5.5 **Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones múltiples**
degeneración solución no acotada soluciones óptimas múltiples

Sección 5.6 **Variables artificiales**
problema artificial variable artificial función objetivo artificial variable de excedencia

Sección 5.7 **Minimización**
mín $C = -\text{máx}(-C)$

Sección 5.8 **Dual**
precio sombra dual primal

Resumen

La solución para un sistema de desigualdades lineales consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades. En forma geométrica, es la intersección de todas las regiones determinadas por las desigualdades.

La programación lineal involucra la maximización o minimización de una función lineal (la función objetivo) sujeta a un sistema de restricciones, las cuales son desigualdades lineales o ecuaciones lineales. Uno de los métodos útiles para encontrar una solución óptima para una región factible no vacía es el método de los vértices. En este, la función objetivo se evalúa en cada uno de los vértices de la región factible y se selecciona un vértice en el que dicha función sea óptima.

Para un problema que involucre más de dos variables, el método de los vértices es poco práctico o imposible. En su lugar se utiliza un método matricial conocido como método simplex que es eficiente y completamente mecánico.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 10, resuelva la desigualdad o el sistema de desigualdades.

1. $-3x + 2y > -6$

2. $5x - 2y + 10 \geq 0$

3. $3x \leq -5$

4. $-x < 2$

5. $\begin{cases} y - 3x < 6 \\ x - y > -3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ x + y > 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ -2x - y \leq 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x > y \\ x + y < 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x + 2y > -6 \\ 3x - 2y > -7 \\ x \geq 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x < 3 \\ y < 7 \end{cases}$

En los problemas del 11 al 18, no utilice el método simplex.

11. Maximizar

$$Z = x - 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y - x &\leq 2 \\ x + y &\leq 4 \\ x &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$Z = 3x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 8 \\ x &\leq 3 \\ y &\geq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

13. Minimizar

$$Z = 2x - y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - y &\geq -2 \\ x + y &\geq 1 \\ x - 2y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

14. Minimizar

$$Z = x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 12 \\ 4x + 3y &\leq 15 \\ x - 6y &\leq 0 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

15. Minimizar

$$Z = 2x + 3y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 5 \\ 2x + 5y &\leq 10 \\ 5x + 8y &\geq 20 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

[7]**16.** Minimizar

$$Z = 2x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\geq 4 \\ -x + 3y &\leq 18 \\ x &\leq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

[7]**17.** Maximizar

$$Z = 4x + 8y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 8 \\ 3x + 2y &\leq 12 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

18. Maximizar

$$Z = 4x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 16 \\ 3x + 2y &\geq 24 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

En los problemas del 19 al 28, utilice el método simplex.

19. Maximizar

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

20. Maximizar

$$Z = 18x_1 + 20x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

---

[7] Los problemas 16 y 17 se refieren a la sección 5.3.

21. Minimizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

22. Minimizar

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

23. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

24. Minimizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

25. Minimizar

$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq -1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

26. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

[8]**27.** Maximizar

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

[8]**28.** Minimizar

$$Z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva los problemas 29 y 30 utilizando duales y el método simplex.

29. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 35 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 25 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

30. Maximizar

$$Z = x_1 - 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

31. Orden de producción Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere del uso de tiempo de las máquinas A y B, como se indica en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 hr	1 hr
Producto Y	2 hr	1 hr
Producto Z	2 hr	2 hr

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 34, respectivamente. La utilidad por unidad sobre X, Y y Z es de \$10, \$15 y \$22, respectivamente. ¿Cuál debe ser la orden de producción semanal para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

32. Repita el problema 31 si la compañía debe producir al menos un total de \$300 unidades por semana.

33. Transportación de petróleo Una compañía petrolera tiene instalaciones de almacenamiento para combustible de calefacción en las ciudades A, B, C y D. Las ciudades C y D necesitan cada una exactamente 500 000 galones de combustible. La compañía determina que A y B pueden proveer cada una un máximo de 600 000 galones para satisfacer las necesidades de C y D. La tabla

---

[8] Los problemas 27 y 28 se refieren a la sección 5.5.

que se muestra a continuación proporciona los costos por galón para transportar el combustible entre las ciudades:

	Desde	
Hasta	C	D
A	\$0.01	\$0.02
B	0.02	0.04

¿Cómo debe distribuirse el combustible para minimizar el costo total del transporte? ¿Cuál es el costo mínimo de transporte?

34. Utilidad Jason opera un negocio desde su casa vendiendo dos juegos para computadoras: “Space Traders” y “Green Dwarf”. Tres amigos, Nicole, Hillary y Katie, instalan estos juegos para Jason y cada uno de ellos debe hacer parte del trabajo en la instalación de cada juego. El tiempo que cada amigo invierte en cada juego se da en la tabla siguiente:

	Nicole	Hillary	Katie
Space Traders	30 min	20 min	10 min
Green Dwarf	10 min	10 min	50 min

Los amigos de Jason tienen otro trabajo que hacer, pero determinan que cada mes pueden invertir hasta 300, 200 y 500 minutos, respectivamente, para trabajar en los juegos de Jason. Este obtiene una utilidad de \$5 en cada venta de Space Traders y \$9 en cada venta de Green Dwarf. ¿Cuántos juegos de cada tipo debe vender Jason cada mes para maximizar la utilidad, y cuál será esta utilidad máxima?

35. Formulación de una dieta En un zoológico, un técnico debe formular una dieta para cierto grupo de animales con base en dos productos comerciales, el alimento A y el alimento B. Cada 200 gramos del alimento A contienen 16 gramos de grasa, 32 gramos de carbohidratos y 4 gramos de proteína. Cada 200 gramos del alimento B contienen 8 gramos de grasa, 64 gramos de carbohidratos y 10 gramos de proteína. Los requerimientos mínimos diarios son 176 gramos de grasa, 1024 gramos de carbohidratos y 200 gramos de proteína. Si el alimento A cuesta 8 centavos por cada 100 gramos y el alimento B cuesta 22 centavos por cada 100 gramos, ¿cuántos gramos de cada alimento deben utilizarse para cumplir con los requerimientos diarios al menor costo? (Suponga que existe un costo mínimo).

En los problemas 36 y 37, no utilice el método simplex. Redondee sus respuestas a dos decimales.

36. Minimizar

$$Z = 4.2x - 2.1y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\leq 3.4 + 1.2x \\ y &\leq -7.6 + 3.5x \\ y &\leq 18.7 - 0.6x \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

37. Maximizar

$$Z = 12.4x + 8.3y$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 1.4x + 1.7y &\leq 15.9 \\ -3.6x + 2.6y &\leq -10.7 \\ -1.3x + 4.3y &\leq -5.2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

EXPLORE Y AMPLÍE Terapias con medicamentos y radiación[9]

Con frecuencia existen formas alternativas de tratamiento para pacientes a los que se les diagnostica una enfermedad compleja en particular. Cada tratamiento puede tener no solo efectos positivos en el paciente, sino también efectos negativos como toxicidad o malestar. Un médico debe saber hacer la mejor elección de un tratamiento o la mejor combinación de diversos tratamientos. Esta elección dependerá no solo de los efectos curativos, sino también de los efectos tóxicos y del malestar.

Suponga que usted es un médico que tiene un paciente de cáncer bajo su cuidado y existen dos posibles tratamientos disponibles: administración de medicamentos y terapia con radiación. Suponga que la eficacia de los tratamientos está expresada en unidades comunes, por ejemplo, unidades curativas. La medicina contiene 1000 unidades curativas por onza y la radiación proporciona 1000 unidades curativas por minuto. Sus análisis indican que el paciente debe recibir al menos 3000 unidades curativas.

Sin embargo, en cada tratamiento está implícito un grado de toxicidad. Suponga que los efectos tóxicos de cada tratamiento están medidos en una unidad común de toxicidad, por ejemplo, una unidad tóxica. La medicina contiene 400 unidades tóxicas por onza y la radiación produce 1000 unidades tóxicas por minuto. Con base en sus estudios, usted cree que el paciente no debe recibir más de 2000 unidades tóxicas.

Además, cada tratamiento implica un grado de malestar para el paciente. La medicina provoca el triple de malestar por onza que la radiación por minuto.

La tabla 5.5 presenta un resumen de esta información. El problema que se plantea es determinar las dosis de medicina y radiación que pueden satisfacer los requerimientos curati-

---

[9] Adaptado de R. S. Ledley y L. B. Lusted, “Medical Diagnosis and Modern Decision Making”, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. XIV; *Mathematical Problems in the Biological Sciences* (American Mathematical Society, 1962).

vos y de toxicidad y, al mismo tiempo, minimizar el malestar del paciente.

Tabla 7.5

	Unidades curativas	Unidades tóxicas	Malestar relativo
Medicina (por onza)	1000	400	3
Radiación (por minuto)	1000	1000	1
Requerimiento	≥ 3000	≤ 2000	

Sea x_1 el número de onzas de la medicina y x_2 el número de minutos de radiación a ser administrados. Entonces, usted quiere minimizar el malestar D dado por

$$D = 3x_1 + x_2$$

sujeta a la condición curativa

$$1000x_1 + 1000x_2 \geq 3000$$

y a la condición de toxicidad

$$400x_1 + 1000x_2 \leq 2000$$

donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Debe reconocerse que este es un problema de programación lineal. Al graficar, se obtiene la región factible de la figura 5.24. Los vértices son (3, 0), (5, 0) y $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

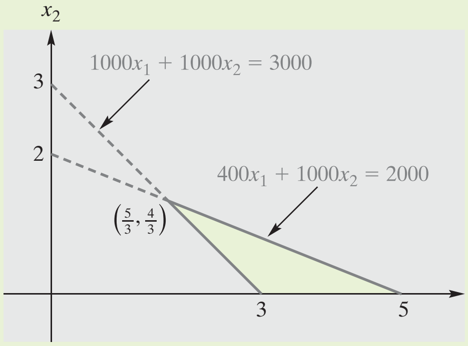


FIGURA 5.24 Región factible para el problema de la terapia con medicamentos y radiación.

Al evaluar D en cada vértice se obtiene lo siguiente:

$$\text{en } (3, 0) \quad D = 3(3) + 0 = 9$$

$$\text{en } (5, 0) \quad D = 3(5) + 0 = 15$$

y

$$\text{en } \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad D = 3\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{19}{3} \approx 6.3$$

Como D es mínimo en $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, usted debe prescribir un tratamiento de $\frac{5}{3}$ de onza de la medicina y $\frac{4}{3}$ minutos de radiación. Así, al resolver un problema de programación lineal, ha determinado el "mejor" tratamiento para el paciente.

El Instituto Nacional de Salud de Estados Unidos tiene un sitio en internet, `www.nih.gov/health`, que contiene información actualizada en diversas áreas relacionadas con la salud.

Usted podría querer buscar también en Internet sitios que utilicen aplicaciones digitales para demostrar el método simplex. Solo introduzca "método simplex" y "applet" en cualquier buscador de internet.

Problemas

1. Suponga que hay disponibilidad de tratamientos medicinales y por radiación para un paciente. Cada onza de medicamento contiene 500 unidades curativas y 400 unidades tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000 unidades curativas y 600 unidades tóxicas. El paciente requiere al menos de 2000 unidades curativas y puede tolerar no más de 1400 unidades tóxicas. Si cada onza de la medicina provoca el mismo malestar que cada minuto de radiación, determine las dosis apropiadas de medicamento y radiación de modo que se minimice el malestar del paciente. Use el método geométrico en una calculadora gráfica si tiene alguna disponible.

2. Suponga que el medicamento A, el B y la terapia con radiación son tratamientos disponibles para un paciente. Cada onza de la medicina A contiene 600 unidades curativas y 500 tóxicas. Cada onza de la medicina B contiene 500 unidades curativas y 100 tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000 unidades curativas y 1000 tóxicas. El paciente requiere al menos de 3000 unidades curativas y puede tolerar no más de 2000 unidades tóxicas. Si cada onza de A y cada minuto de radiación provocan el mismo malestar, y cada onza de B provoca dos veces más malestar que cada onza de A, determine las dosis apropiadas de medicamentos y radiación de modo que se minimice el malestar del paciente. Utilice el método simplex.

3. ¿Cuál método cree usted que es más fácil de ejecutar en programación lineal, el método simplex o un método geométrico asistido con tecnología? Dé razones que apoyen su respuesta.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

6

El filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento, la más famosa de las cuales iba más o menos así: el guerrero Aquiles acepta competir en una carrera contra una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga solo 1 metro por segundo, por eso a la tortuga se le da una ventaja de 10 metros desde la línea de salida. Como Aquiles es mucho más rápido, aún así debería ganar. Pero para el momento en que haya cubierto los primeros 10 metros y llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya habrá avanzado 1 metro y aún lleva la delantera. Luego, después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga habrá avanzado 0.1 metros y aún llevará la delantera; cuando Aquiles haya cubierto ese 0.1 de metro, la tortuga habrá avanzado 0.01 metros y aún llevará la delantera, y así sucesivamente. Por lo tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. La posición de Aquiles en el tiempo t después de haber iniciado la carrera es $(10 \text{ m/s})t$. La posición de la tortuga en el mismo tiempo t es $(1 \text{ m/s})t + 10$ m. Cuando estas posiciones son iguales, Aquiles y la tortuga están uno al lado de la otra. Al despejar t de la ecuación resultante

$$(10 \text{ m/s})t = (1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}$$

se encuentra el tiempo en el que Aquiles empareja a la tortuga.

La solución es $t = 1\frac{1}{9}$ segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido $\left(1\frac{1}{9}\text{ s}\right)(10 \text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$ metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a quienes lo escuchaban era cómo podría ser que

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 11\frac{1}{9}$$

donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema consiste en el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Si se utiliza la notación de límite y la fórmula de la sección 1.6 para la suma de una sucesión geométrica finita, se escribe

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} 10^{1-n} = \lim_{k\to\infty} \frac{10\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

y se encuentra la suma de esta sucesión geométrica infinita particular. (En la sección 1.6 se demostró que, para una secuencia infinita con un primer término a y radio común r, existe la suma de la secuencia infinita y está dada por $\frac{a}{1-r}$, *siempre que* $|r| < 1$).

Objetivo

Estudiar los límites y sus propiedades básicas.

6.1 Límites

Quizá usted ha estado en un estacionamiento en el que puede "aproximarse" al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo y ni siquiera rozarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas y está implícita en el concepto de *límite*, en el cual se sustentan los fundamentos del cálculo. Básicamente, se hará que una variable "se aproxime" a un valor particular y se examinará el efecto que tiene sobre los valores de una función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Aunque esta función no está definida en $x = 1$, podría ser interesante observar el comportamiento de los valores de la función cuando x se acerca mucho a 1. En la tabla 6.1 se dan algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores que 1 y sus correspondientes valores funcionales. Observe que, a medida que x asume valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda* ($x < 1$) o *por la derecha* ($x > 1$), los valores correspondientes de $f(x)$ se acercan cada vez más a un solo número, a saber, el 3. Esto también resulta claro en la gráfica de f en la figura 6.1. Observe que aunque la función no está definida en $x = 1$ (como lo indica el pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3 conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto, se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3 y se escribe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Se puede hacer $f(x)$ tan cercana a 3 como se desee, y mantenerla así de cerca, al seleccionar un valor de x lo suficientemente cercano a 1, pero diferente de 1. El límite existe en 1, aunque 1 no se encuentre en el dominio de f.

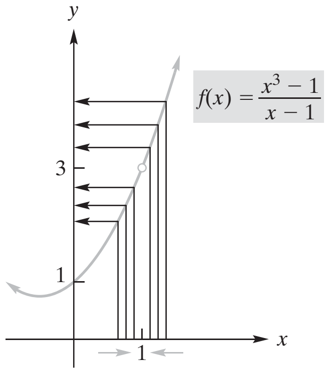


FIGURA 6.1 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Tabla 6.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

También puede considerarse el límite de una función cuando x se aproxima a un número que está en el dominio. A continuación se examinará el límite de $f(x) = x + 3$ cuando x se aproxima a 2:

$$\lim_{x \to 2} (x + 3)$$

Obviamente, si x está cercana a 2 (pero no es igual a 2), entonces $x + 3$ está cercano a 5. Esto también resulta claro en la tabla y en la gráfica de la figura 6.2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5$$

Dada una función f y un número a, *puede* haber dos formas de asociar un número con el par (f, a). Una manera consiste en la *evaluación de f en a*, a saber, $f(a)$. Ésta *existe* precisamente cuando a está en el dominio de f. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, como en el primer ejemplo, entonces $f(1)$ no *existe*. Otra forma de asociar un número con el par (f, a) es *el límite de*

$x < 2$	
x	$f(x)$
1.5	4.5
1.9	4.9
1.95	4.95
1.99	4.99
1.999	4.999

$x > 2$	
x	$f(x)$
2.5	5.5
2.1	5.1
2.05	5.05
2.01	5.01
2.001	5.001

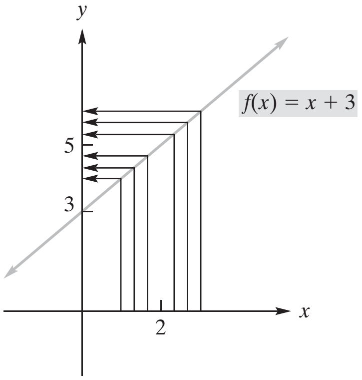


FIGURA 6.2 $\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5.$

$f(x)$ *cuando* x *se aproxima a* a, lo cual se denota por $\lim_{x \to a} f(x)$. Se han dado dos ejemplos, a continuación se presenta el caso general.

Definición

El límite de $f(x)$ *cuando* x *se aproxima a* a es el número L, que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

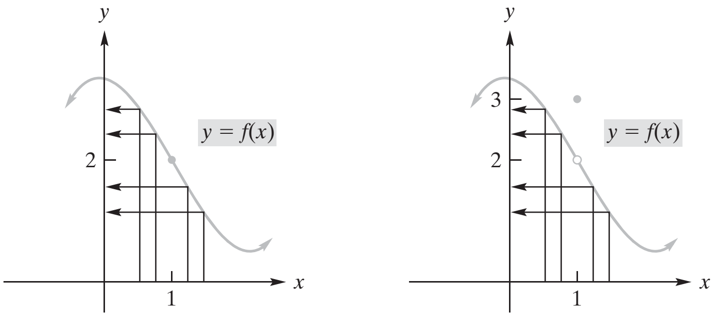
siempre y cuando los valores de $f(x)$ puedan volverse tan cercanos a L como se desee, y mantenerse así de cercanos, al asumir una x lo suficientemente cercana pero diferente de a. Si tal número no existe, se dice que el límite de $f(x)$ *no existe*.

Debe enfatizarse que cuando es necesario encontrar un límite, no estamos interesados en lo que pasa con $f(x)$ cuando x es igual a a, sino solamente en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es cercana a a. De hecho, aun cuando el valor $f(a)$ *existiera*, la definición anterior lo elimina de manera explícita. En el segundo ejemplo, $f(x) = x + 3$, se tiene $f(2) = 5$ y también $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$, pero es muy posible tener una función f y un número a para los cuales existen tanto $f(a)$ como $\lim_{x \to a} f(x)$ y son números diferentes. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a. Esto es, el límite debe ser el mismo ya sea que x se acerque a a por la izquierda o por la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica

a. Estime $\lim_{x \to 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 6.3(a).

Solución: Si se observan en la gráfica los valores de x cercanos a 1, se advierte que $f(x)$ está cercana a 2. Además, cuando x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ parece estar cada vez más



(a) (b)

FIGURA 6.3 Investigación de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

cercana a 2. Así, se estima que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

b. Estime $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 6.3(b).

Solución: Aunque $f(1) = 3$, este hecho no tiene importancia en cuanto al límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Se observa que cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ parece aproximarse a 2. Por lo tanto, se estima que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Hasta ahora, todos los límites considerados existen efectivamente. A continuación, se verán algunas situaciones en las que no existe un límite.

APLÍQUELO ▶

1. Los cajeros utilizan a diario la función mayor entero, que se denota como $f(x) = [x]$, al dar cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de dinero necesario para cada monto de cambio que se debe entregar (por ejemplo, si a un cliente se le deben \$1.25 (dólares estadounidenses) de cambio, recibirá un billete de \$1; por lo tanto $[1.25] = 1$). Formalmente, $[x]$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x. Haga la gráfica de f, la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora gráfica en el rectángulo de visualización estándar (esta función se encuentra en el menú de números y se denomina "integer part"). Explore esta gráfica con el comando TRACE. Determine si existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

EJEMPLO 2 Límites que no existen

a. Estime $\lim_{x\to -2} f(x)$, si es que existe, donde la gráfica de f está dada en la figura 6.4.

Solución: Cuando x se aproxima a -2 por la izquierda ($x < -2$), los valores de $f(x)$ parecen más cercanos a 1. Pero cuando x se aproxima a -2 por la derecha ($x > -2$), $f(x)$ parece más cercana a 3. Por lo tanto, cuando x tiende a -2, los valores de la función no se acercan a un solo número. Se concluye que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en $x = -2$.

b. Estime $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si es que existe.

Solución: Sea $f(x) = 1/x^2$. La tabla de la figura 6.5 proporciona los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 0. Cuando x se acerca más y más a 0, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes sin cota alguna. Esto también es claro en la gráfica. Como los valores de $f(x)$ no se acercan a un *número* cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

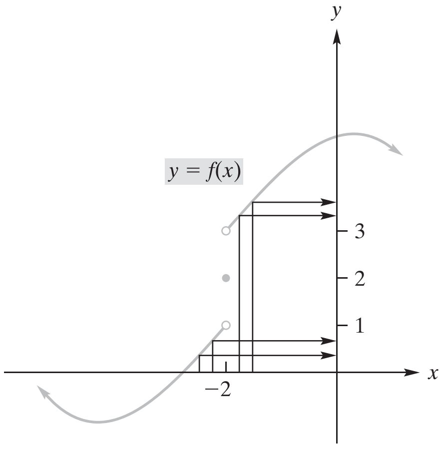


FIGURA 6.4 $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10 000
±0.001	1 000 000

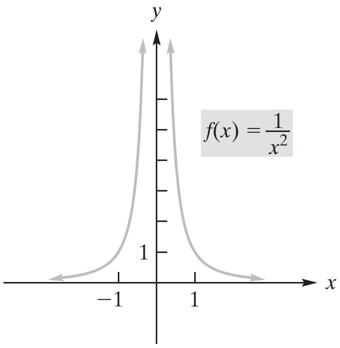


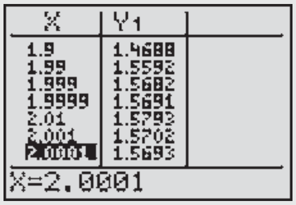
FIGURA 6.5 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ no existe.

TECNOLOGÍA

Problema: Estime $\text{lím}_{x \to 2} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}$$

Solución: Un método útil para encontrar el límite consiste en construir una tabla de valores de la función $f(x)$ cuando x es cercana a 2. A partir de la figura 6.6, se estima que el límite es 1.57. De manera alternativa, puede estimarse el límite a partir de la gráfica de f. En la figura 6.7 se muestra la gráfica de f en la ventana estándar de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero se hacen varios acercamientos alrededor de $x = 2$ y se obtiene lo que se muestra en la figura 6.8. Después de asignar valores alrededor de $x = 2$, se estima que el límite es 1.57.



X	Y1
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5691
2.01	1.5792
2.001	1.5702
2.0001	1.5693

X=2.0001

FIGURA 6.6 $\text{lím}_{x \to 2} f(x) \approx 1.57$.

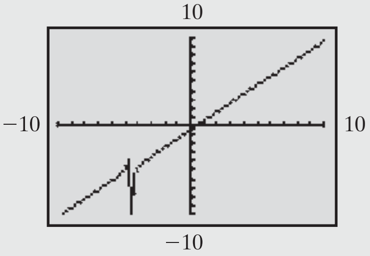
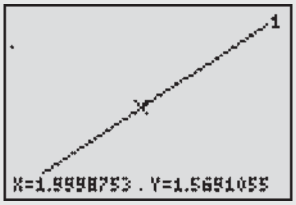


FIGURA 6.7 Gráfica de $f(x)$ en la ventana estándar.



```
X=1.9998753 . Y=1.5691055
```

FIGURA 6.8 El acercamiento y trazado alrededor de $x = 2$ proporciona $\text{lím}_{x \to 2} f(x) \approx 1.57$.

Propiedades de los límites

Para determinar límites, no siempre deseamos calcular los valores de la función o hacer el bosquejo de una gráfica. De manera alternativa, existen también varias propiedades de los límites que se pueden emplear. Las siguientes pueden parecerle razonables:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades 1 y 2 de los límites

a. $\text{lím}_{x \to 2} 7 = 7$; $\text{lím}_{x \to -5} 7 = 7$

b. $\text{lím}_{x \to 6} x^2 = 6^2 = 36$

c. $\text{lím}_{t \to -2} t^4 = (-2)^4 = 16$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si $\text{lím}_{x \to a} f(x)$ y $\text{lím}_{x \to a} g(x)$ existen, entonces

3. $$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4. $$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5. $$\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x), \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

APLÍQUELO ▶

2. El volumen de helio contenido en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio r en centímetros, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\lim_{r\to 1} V(r)$.

EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de los límites

a. $$\lim_{x\to 2}(x^2+x) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}x \qquad \text{Propiedad 3}$$
$$= 2^2 + 2 = 6 \qquad \text{Propiedad 2}$$

b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,

$$\lim_{q\to -1}(q^3 - q + 1) = \lim_{q\to -1}q^3 - \lim_{q\to -1}q + \lim_{q\to -1}1$$
$$= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1$$

c. $$\lim_{x\to 2}[(x+1)(x-3)] = \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot\lim_{x\to 2}(x-3) \qquad \text{Propiedad 4}$$
$$= \left(\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}1\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2}x - \lim_{x\to 2}3\right)$$
$$= (2+1)\cdot(2-3) = 3(-1) = -3$$

d. $$\lim_{x\to -2}3x^3 = 3\cdot\lim_{x\to -2}x^3 \qquad \text{Propiedad 5}$$
$$= 3(-2)^3 = -24$$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

APLÍQUELO ▶

3. La función de ingreso para cierto producto está dada por $R(x) = 500x - 6x^2$. Determine $\lim_{x\to 8} R(x)$.

EJEMPLO 5 Límite de una función polinomial

Sea $f(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ una función polinomial. Entonces

$$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{x\to a}(c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0)$$
$$= c_n\cdot\lim_{x\to a}x^n + c_{n-1}\cdot\lim_{x\to a}x^{n-1} + \cdots + c_1\cdot\lim_{x\to a}x + \lim_{x\to a}c_0$$
$$= c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0 = f(a)$$

Por lo tanto, se tiene la propiedad siguiente:

Si f es una función polinomial, entonces
$$\lim_{x\to a}f(x) = f(a)$$

En otras palabras, si f es un polinomio y a es cualquier número, entonces las dos formas de asociar un número con el par (f, a), a saber, la evaluación y la formación del límite, existen y son iguales.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

El resultado del ejemplo 5 permite encontrar muchos límites simplemente por evaluación. Por ejemplo, puede encontrarse

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7)$$

al sustituir -3 por x porque $x^3 + 4x^2 - 7$ es una función polinomial:

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2$$

De igual modo,

$$\lim_{h\to 3}(2(h-1)) = 2(3-1) = 4$$

Es necesario especificar que los límites no se calculan mediante una simple evaluación a menos que exista alguna regla que lo justifique. Fue posible encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque se tiene una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la evaluación puede conducir a resultados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo l(b) se tiene $f(1) = 3$, que no es el $\text{lím}_{x\to 1} f(x)$; en el ejemplo 2(a), $f(-2) = 2$, que no es el $\text{lím}_{x\to -2} f(x)$.

Las siguientes dos propiedades de límites tienen que ver con cocientes y raíces.

Si $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

6. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{lím}_{x\to a} f(x)}{\text{lím}_{x\to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

7. $$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$ Vea la nota 1 a pie de página

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\text{lím}_{x\to 1}(2x^2 + x - 3)}{\text{lím}_{x\to 1}(x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0$

b. $\displaystyle\lim_{t\to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t\to 4}(t^2 + 1)} = \sqrt{17}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

¡ADVERTENCIA!

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, puede determinarse el límite de una función racional mediante evaluación, siempre que el denominador no sea 0 en a.

Límites y manipulación algebraica

Ahora se considerarán límites para los cuales no son aplicables las propiedades de los límites y que no pueden determinarse mediante evaluación. Un resultado fundamental es el siguiente:

Si f y g son dos funciones para las cuales $f(x) = g(x)$, para toda $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

(lo cual significa que si alguno de los límites existe, entonces el otro también existe y los dos son iguales).

¡ADVERTENCIA!

La condición para la igualdad de los límites no excluye la posibilidad de que $f(a) = g(a)$. La condición solo concierne a $x \neq a$.

El resultado surge directamente a partir de la definición de *límite*, puesto que el valor de $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ depende solo de los valores de $f(x)$ para x que están muy cerca de a. De nuevo: la evaluación de f en a, $f(a)$, o su no existencia, es irrelevante en la determinación de $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ a menos que se tenga una regla específica que sea aplicable, como en el caso donde f es un polinomio.

APLÍQUELO ▶

4. La tasa de cambio de la productividad p (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p(t) = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}$$

Encuentre $\text{lím}_{t\to 2} p(t)$.

EJEMPLO 7 Determinación de un límite

Determine $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solución: Cuando $x \to -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Debido a que el límite del denominador es 0, *no es posible* utilizar la propiedad 6. Sin embargo, como lo que le suceda al cociente cuando x es igual a -1 no tiene interés, puede suponerse que $x \neq -1$ y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1 \quad \text{para } x \neq -1$$

---

[1] Si n es par, se requiere que $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ sea no negativo.

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) de la función original $\frac{x^2-1}{x+1}$ da lugar a una nueva función $x-1$, que es igual a la función original para $x \neq -1$. Por lo tanto, es aplicable el resultado fundamental desplegado en el recuadro del comienzo de esta subsección y se tiene

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

Observe que, aunque la función original no está definida en -1, *tiene* un límite cuando $x \to -1$.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

Cuando tanto $f(x)$ como $g(x)$ se aproximan a 0 a medida que $x \to a$, entonces se dice que el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la *forma* 0/0. De manera similar, se habla de la *forma* $k/0$, para $k \neq 0$, si $f(x)$ se aproxima a $k \neq 0$ a medida que $x \to a$ pero $g(x)$ se aproxima a 0 cuando $x \to a$.

En el ejemplo 7, el método para encontrar un límite mediante evaluación no funciona. Al reemplazar x por -1 se obtiene 0/0, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada 0/0, la manipulación algebraica (como en el ejemplo 7) puede resultar en una función que concuerde con la función original, excepto en el valor limitante. En el ejemplo 7 la nueva función, $x-1$, es un polinomio y su límite *puede* determinarse mediante sustitución.

Al inicio de esta sección, se encontró que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función $f(x) = (x^3-1)/(x-1)$ y también después de considerar la gráfica de f. Este límite tiene la forma 0/0. Ahora determinaremos el límite mediante la técnica descrita en el ejemplo 7.

¡ADVERTENCIA!

Con frecuencia existe confusión acerca de cuál es el principio que se usa en este ejemplo y en el ejemplo 7. El principio es:

Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq a$,

entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

EJEMPLO 8 Forma 0/0

Encuentre $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

Solución: Cuando $x \to 1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. De esta manera, se tratará de expresar el cociente en una forma diferente para $x \neq 1$. Al factorizar, se tiene

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2+x+1 \qquad \text{para } x \neq 1$$

(De manera alternativa, la división larga daría el mismo resultado). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3$$

como se mostró antes.

Ahora resuelva el problema 23 ◁

APLÍQUELO ▶

5. La longitud de un material aumenta cuando se calienta el material de acuerdo con la ecuación $l = 125 + 2x$. La rapidez con la que se incrementa la longitud está dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{125 + 2(x+h) - (125+2x)}{h}$$

Calcule este límite.

EJEMPLO 9 Forma 0/0

Si $f(x) = x^2 + 1$, encuentre $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h}$$

Aquí se trata a x como una constante porque h cambia, no x. Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. Por lo tanto, se tratará de expresar el cociente en una forma distinta, para $h \neq 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[x^2+2xh+h^2+1]-x^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}\end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se llama *cociente de diferencias.* El límite del cociente de diferencias se encuentra en el corazón del cálculo diferencial.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$= 2x$$

Nota: En la cuarta igualdad anterior, $\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)$, se usa el resultado fundamental. Cuando $\frac{h(2x+h)}{h}$ y $2x+h$ se consideran como *funciones de h*, se ven como iguales, para toda $h \neq 0$. Se deduce que sus límites son iguales cuando h se aproxima a 0.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

Un límite especial

Se concluye esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

En la figura 6.9 se muestra la gráfica de $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Aunque $f(0)$ no existe, cuando $x \to 0$ resulta claro que el límite de $(1+x)^{1/x}$ sí existe. Es aproximadamente 2.71828 y se denota por la letra e. Ésta, como usted recordará, es la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$$

puede realmente considerarse como la definición de e. Puede mostrarse que esto concuerda con la definición de e que se dio en la sección 3.1.

x	$(1+x)^{1/x}$
0.5	2.2500
0.1	2.5937
0.01	2.7048
0.001	2.7169

x	$(1+x)^{1/x}$
−0.5	4.0000
−0.1	2.8680
−0.01	2.7320
−0.001	2.7196

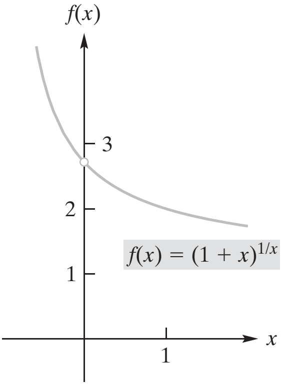


FIGURA 6.9 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

PROBLEMAS 6.1

En los problemas del 1 al 4, utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si es que existe.

1. La gráfica de f aparece en la figura 6.10.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

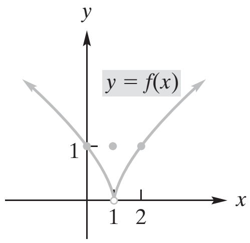


FIGURA 6.10

2. La gráfica de f aparece en la figura 6.11.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

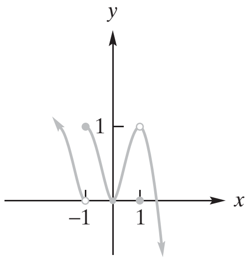


FIGURA 6.11

3. La gráfica de f aparece en la figura 6.12.
(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

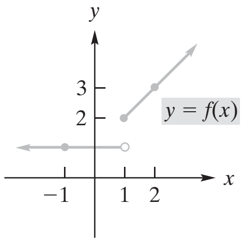


FIGURA 6.12

4. La gráfica de f aparece en la figura 6.13.
(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

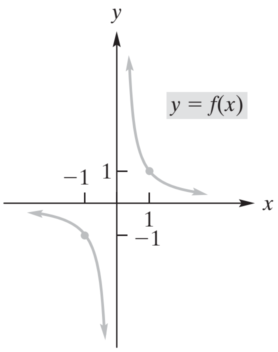


FIGURA 6.13

En los problemas del 5 al 8, utilice su calculadora para completar la tabla y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}$

x	-0.9	-0.99	-0.999	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 0} |x|^{|x|}$

x	-0.00001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

h	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

Encuentre los límites en los problemas del 9 al 34.

9. $\lim_{x\to 2} 16$

10. $\lim_{x\to 3} 2x$

11. $\lim_{t\to -5} (t^2-5)$

12. $\lim_{t\to 1/2} (3t-5)$

13. $\lim_{x\to -2} (3x^3-4x^2+2x-3)$

14. $\lim_{r\to 9} \dfrac{4r-3}{11}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t-2}{t+5}$

16. $\lim_{x\to -6} \dfrac{x^2+6}{x-6}$

17. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{t^3-4t+3}$

18. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2-5z-4}{z^2+1}$

19. $\lim_{p\to 4} \sqrt{p^2+p+5}$

20. $\lim_{y\to 15} \sqrt{y+3}$

21. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2}$

22. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$

23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3+3t^2}{t^3-4t^2}$

25. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

26. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t-2}$

27. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x+4}{x^2-16}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

30. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^4-81}{x^2+8x+15}$

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$

32. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$

33. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

35. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ trate a x como una constante.

36. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)^2+7(x+h)-3x^2-7x}{h}$ trate a x como una constante.

En los problemas del 37 al 42, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

37. $f(x)=5+2x$

38. $f(x)=2x+3$

39. $f(x)=x^2-3$

40. $f(x)=x^2+x+1$

41. $f(x)=x^3-4x^2$

42. $f(x)=2-5x+x^2$

43. Encuentre $\lim_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$. (*Sugerencia:* Primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2}+2$).

44. Encuentre la constante c tal que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. (*Sugerencia:* Encuentre el valor de c para el cual $x-3$ es un factor del numerador).

45. Planta de energía La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E=\frac{T_h-T_c}{T_h}$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío, respectivamente. Encuentre (a) $\lim_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

46. Satélite Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E=-\frac{7.0\times 10^{17}}{r}\text{ pie-lb}$$

Encuentre el límite de E cuando $r\to 7.5\times 10^7$ pies.

En los problemas del 47 al 50, utilice una calculadora graficadora para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x-3}{x^2-9}$

48. $\lim_{x\to 0} x^x$

49. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-10\sqrt{x}+21}{3-\sqrt{x}}$

50. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

51. Purificación de agua El costo de purificar agua está dado por $C = \frac{50\,000}{p} - 6500$, donde p es el porcentaje de impurezas que quedan después de la purificación. Grafique esta función en su calculadora gráfica y determine $\lim_{p\to 0} C$. Analice el significado de dicho límite.

52. Función de utilidad La función de utilidad para cierto negocio está dada por $P(x) = 225x - 3.2x^2 - 700$. Grafique esta función en su calculadora gráfica y use la función de evaluación para determinar $\lim_{x\to 40.2} P(x)$, utilice la regla acerca del límite de una función polinomial.

6.2 Límites (*continuación*)

Objetivo

Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.

Límites laterales

En la figura 6.14 se muestra la gráfica de un función f. Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x se aproxima a 0 *por la derecha*, $f(x)$ se aproxima a 1. Esto se escribe como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Por otra parte, cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ se aproxima a -1 y se escribe

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

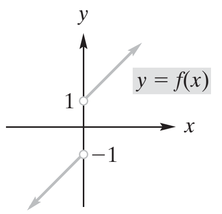


FIGURA 6.14 El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Los límites de este tipo se conocen como **límites unilaterales**. Como se mencionó en la sección anterior, el límite de una función a medida que $x \to a$ es independiente del modo en que x se aproxima a a. Por lo tanto, el límite existirá si y solo si ambos límites existen y son iguales. Entonces se concluye que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \text{ no existe}$$

Como otro ejemplo de un límite unilateral, considere $f(x) = \sqrt{x-3}$ cuando x se aproxima a 3. Como f está definida solo cuando $x \geq 3$, puede hablarse del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 por la derecha. Si x es un poco mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y de este modo $\sqrt{x-3}$ es cercano a 0. Se concluye que

$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

Este límite también es evidente si se observa la figura 6.15.

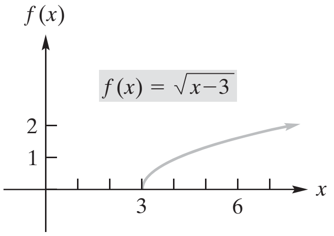


FIGURA 6.15 $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$.

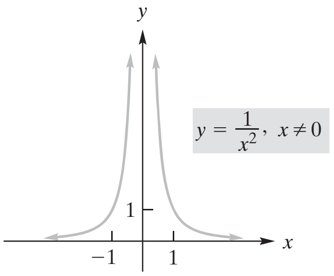
Límites infinitos

En la sección anterior se consideraron límites de la forma 0/0 —esto es, límites en los que el numerador y el denominador se aproximan a 0—. Ahora se examinarán límites en los cuales el denominador se aproxima a 0, pero el numerador se aproxima a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Aquí, cuando x se aproxima a 0, el denominador se aproxima a 0 y el numerador se aproxima a 1. A continuación se investigará el comportamiento de $f(x) = 1/x^2$ cuando x es cercana a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por lo tanto, al dividir 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. De hecho, entre más cercana a 0 esté x, mayor es el valor de $f(x)$. Por ejemplo, vea la tabla de valores de la figura 6.16, la cual también muestra la gráfica de f. Es claro que cuando $x \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ aumenta indefinidamente. De aquí que no exista el límite en 0. Se dice que cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve infinito positivamente y, en forma simbólica, se expresa este “límite infinito” al escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty = \infty$$



x	$f(x)$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.1	100
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

FIGURA 6.16 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, es posible que la razón no sea que los valores de $f(x)$ se vuelvan arbitrariamente grandes cuando x se acerca a a. Por ejemplo, vea de nuevo la situación del ejemplo 2(a) de la sección 6.1. Aquí se tiene que

$$\lim_{x\to -\ 2} f(x) \text{ no existe, pero } \lim_{x\to -2} f(x) \neq \infty$$

¡ADVERTENCIA!

En esta situación, el uso del signo "igual" no significa que el límite exista; por el contrario, es una manera específica de decir que no hay límite y *por qué* no existe.

Ahora considere la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$. (Vea la figura 6.17). Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $1/x$ se vuelve positivamente infinito; cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ se vuelve negativamente infinito. En forma simbólica, estos límites infinitos se escriben como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

x	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10 000

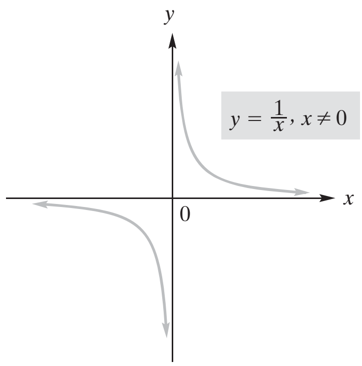


FIGURA 6.17 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

EJEMPLO 1 Límites infinitos

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2}{x+1}$

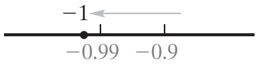


FIGURA 6.18 $x \to -1^+$.

Solución: Cuando x se aproxima a -1 por la derecha (piense en valores de x como -0.9, -0.99, etc., como se muestra en la figura 6.18), $x + 1$ se aproxima a 0 pero siempre es positivo. Como estamos dividiendo 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados, $2/(x + 1)$, son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty$$

y el límite no existe. Mediante un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$

Solución: Cuando $x \to 2$, el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por lo tanto, se dividen números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase, puede escribirse

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no existe}$$

Sin embargo, se evaluará si es posible utilizar el símbolo ∞ o $-\infty$ para ser más específicos acerca del "no existe". Observe que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ no es ∞ ni $-\infty$.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

En el ejemplo 1 se consideraron límites de la forma $k/0$, donde $k \neq 0$. Es importante que se distinga la forma $k/0$ de la forma $0/0$, la cual se estudió en la sección 6.1. Las dos formas se manejan de muy diferente manera.

EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encuentre $\lim\limits_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4}$.

Solución: Cuando $t \to 2$, *tanto* el numerador *como* el denominador se aproximan a 0 (forma 0/0). Así, primero se simplifica la fracción, para $t \neq 2$, como se hizo en la sección 6.1, y luego se toma el límite:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}$$

Ahora resuelva el problema 37 ◁

Límites al infinito

Usted debe ser capaz de obtener

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

sin ayuda de una gráfica o de una tabla. Al dividir 1 entre un número positivo grande, se obtiene como resultado un número positivo pequeño y cuando el divisor se vuelve arbitrariamente grande, los cocientes se vuelven arbitrariamente pequeños. Es posible formular un argumento similar para el límite cuando $x \to -\infty$.

Ahora se examinará la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. En la tabla 6.2 puede verse que cuando x aumenta indefinidamente al tomar valores positivos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. De la misma forma, cuando x disminuye indefinidamente al tomar valores negativos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 6.17. Allí, cuando usted se desplaza hacia la derecha sobre la curva y toma valores positivos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0 a través de valores positivos. De manera similar, cuando se desplaza hacia la izquierda a lo largo de la curva a través de valores negativos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0 a través de valores negativos. En forma simbólica, se escribe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.

Tabla 6.2 Comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1000	0.001	−1000	−0.001
10 000	0.0001	−10 000	−0.0001
100 000	0.00001	−100 000	−0.00001
1 000 000	0.000001	−1 000 000	−0.000001

APLÍQUELO ▶

6. La función de demanda para cierto producto está dada por $p(x) = \frac{10\,000}{(x+1)^2}$, donde p representa el precio y x es la cantidad vendida. Grafique esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 10] \times [0, 10\,000]$. Utilice la función TRACE para encontrar $\lim_{x \to \infty} p(x)$. Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{(x-5)^3}$

Solución: Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $x - 5$. Como el cubo de un número grande también es grande, $(x-5)^3 \to \infty$. Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{4-x}$

Solución: Cuando x se vuelve negativamente infinita, $4 - x$ se vuelve positivamente infinito. Debido a que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, se concluye que

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4-x} = \infty$$

En el siguiente análisis se necesitará de cierto límite, a saber, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p$, donde $p > 0$. Conforme x se vuelve muy grande, también se incrementa x^p. Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Así, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0}$$

donde $p > 0$.[2] Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$$

Ahora se encontrará el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2+5}{2x^2+1}$$

cuando $x \to \infty$. (Recuerde que en la sección 2.2 se mencionó que una función racional es un cociente de polinomios). A medida que x se vuelve cada vez más grande, *tanto* el numerador *como* el denominador de cualquier función racional se vuelven infinitos en valor absoluto. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que sea posible obtener una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, el numerador y el denominador se dividen entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. En este caso es x^2. Esto da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2+5}{x^2}}{\dfrac{2x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\dfrac{5}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\cdot\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}$$

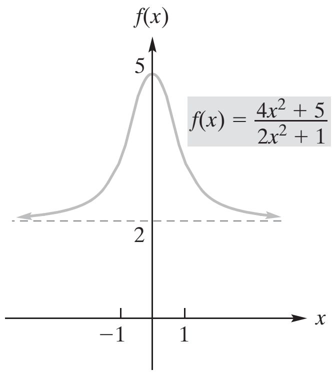


FIGURA 10.19 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Como $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5}{2x^2+1} = \frac{4+5(0)}{2+0} = \frac{4}{2} = 2$$

De manera similar, el límite cuando $x \to -\infty$ es 2. Estos límites son claros si se observa la gráfica de f en la figura 6.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x, el término que incluye la potencia más grande de x en el numerador, a saber $4x^2$, domina la suma $4x^2 + 5$, y el término dominante en el denominador, $2x^2 + 1$, es $2x^2$. Por lo tanto, cuando $x \to \infty$, $f(x)$ puede aproximarse mediante $(4x^2)/(2x^2)$. Como resultado, para determinar el límite de $f(x)$, basta determinar el límite de $(4x^2)/(2x^2)$. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

como se vio antes. En general, se tiene la regla siguiente:

Límites al infinito de funciones racionales

Si $f(x)$ es una *función racional* y a_nx^n y b_mx^m son los términos en el numerador y el denominador, respectivamente, que tienen las mayores potencias de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

---

[2] Para $\lim_{x\to-\infty} 1/x^p$, se supone que p es tal que $1/x^p$ está definida para $x < 0$.

Ahora se aplicará esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\infty$$

(Observe que en el último paso, cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3; además, $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo resulta ser muy positivo). De manera similar,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=-\infty$$

A partir de esta ilustración, se llega a la conclusión siguiente:

> Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el grado del denominador, entonces la función no tiene límite cuando $x \to \infty$ y no tiene límite cuando $x \to -\infty$.

APLÍQUELO ▶

7. Los montos anuales de ventas y de cierta compañía (en miles) están relacionados con la cantidad de dinero que se gasta en publicidad, x (en miles), de acuerdo con la ecuación $y(x) = \dfrac{500x}{x+20}$. Grafique esta función en su calculadora gráfica en la ventana [0, 1000] × [0, 550]. Utilice TRACE para explorar $\lim_{x\to\infty} y(x)$ y determine qué significa esto para la empresa.

EJEMPLO 4 Límites al infinito para funciones racionales

Encuentre el límite (si existe).

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{9x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}(0)=0$$

c. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

¡ADVERTENCIA!

La técnica anterior solo se aplica a límites *al infinito* de funciones racionales.

Para encontrar $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$, no se puede simplemente determinar el límite de $\dfrac{x^2}{8x^2}$. Esta simplificación se aplica solo en el caso $x\to\infty$ o $x\to-\infty$. En lugar de eso, se tiene

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\frac{\lim_{x\to0}x^2-1}{\lim_{x\to0}7-2x+8x^2}=\frac{0-1}{7-0+0}=-\frac{1}{7}$$

Ahora se considerará el límite de la función polinomial $f(x)=8x^2-2x$ cuando $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)$$

Debido a que un polinomio es una función racional con denominador 1, se tiene

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{1}=\lim_{x\to\infty}8x^2$$

Es decir, el límite de $8x^2-2x$ cuando $x\to\infty$ es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de x, a saber, $8x^2$. Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $8x^2$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}8x^2=\infty$$

En general, se tiene lo siguiente:

> Cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$), el límite de una *función polinomial* es igual al de su término que involucra la mayor potencia de x.

APLÍQUELO ▶

8. El costo C de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 50\,000 + 200x + 0.3x^2$. Utilice su calculadora gráfica para explorar $\lim_{x\to\infty} C(x)$ y determine lo que esto significa.

EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales

a. $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3$. Cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

b. $\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 por un número muy negativo es un número positivo muy grande.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

La técnica de enfocarse en los términos dominantes para encontrar los límites cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no necesariamente es válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \tag{1}$$

Observe que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} (x - x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

Puede demostrarse (vea el problema 62) que en (1) el límite no es 0, sino $\frac{1}{2}$.

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

APLÍQUELO ▶

9. Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que cuesta una visita de x horas es

$$f(x) = \begin{cases} \$100 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \$175 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ \$250 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ \$325 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

Encuentre $\lim_{x\to1} f(x)$ y $\lim_{x\to2.5} f(x)$.

EJEMPLO 6 Límites para una función definida por partes

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \ge 1 \\ 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to1^+} f(x)$

Solución: Aquí, x se acerca a 1 por la derecha. Para $x > 1$, se tiene $f(x) = x^2 + 1$. Por lo que,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 + 1)$$

Si x es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ se acerca a 2. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 + 1) = 2$$

b. $\lim_{x\to1^-} f(x)$

Solución: Aquí x se acerca a 1 por la izquierda. Para $x < 1$, $f(x) = 3$. De modo que,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 3 = 3$$

c. $\lim_{x\to1} f(x)$

Solución: Se quiere encontrar el límite cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, la regla de la función dependerá de si $x \ge 1$ o $x < 1$. Así, deben considerarse los límites unilaterales. El límite cuando x se aproxima a 1 existirá si y solo si ambos límites unilaterales existen y son iguales. A partir de los incisos (a) y (b),

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \ne \lim_{x\to1^-} f(x) \qquad \text{ya que } 2 \ne 3$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to1} f(x) \qquad \text{no existe}$$

d. $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Solución: Para valores muy grandes de x, se tiene $x \geq 1$, de modo que $f(x) = x^2 + 1$. Así,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

e. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solución: Para valores muy negativos de x, se tiene $x < 1$, de modo que $f(x) = 3$. Por lo que,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3$$

Todos los límites de los incisos (a) a (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de f que se presenta en la figura 6.20.

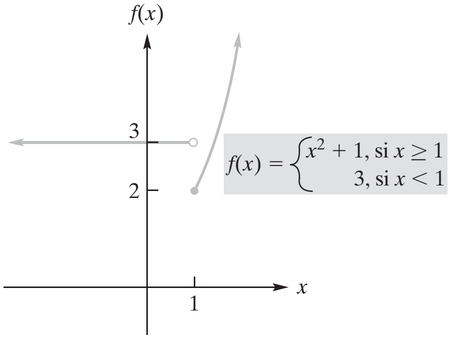


FIGURA 6.20 Gráfica de una función definida por partes.

Ahora resuelva el problema 57 ◁

PROBLEMAS 6.2

1. Para la función f dada en la figura 6.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

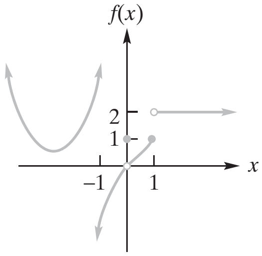


FIGURA 6.21

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to-1^+} f(x)$
(d) $\lim_{x\to-1} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$
(g) $\lim_{x\to0} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to1^-} f(x)$ **(i)** $\lim_{x\to1^+} f(x)$
(j) $\lim_{x\to1} f(x)$ **(k)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$

2. Para la función f dada en la figura 6.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

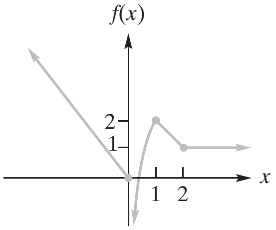


FIGURA 6.22

(a) $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to0} f(x)$
(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to1} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(g) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

En cada problema del 3 al 54, encuentre el límite. Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

3. $\lim_{x\to3^+} (x-2)$ **4.** $\lim_{x\to-1^+} (1-x^2)$ **5.** $\lim_{x\to-\infty} 5x$

6. $\lim_{x\to-\infty} -6$ **7.** $\lim_{x\to0^-} \frac{6x}{x^4}$ **8.** $\lim_{x\to2} \frac{7}{x-1}$

9. $\lim_{x\to-\infty} x^2$ **10.** $\lim_{t\to\infty} (t-1)^3$ **11.** $\lim_{h\to1^+} \sqrt{h-1}$

12. $\lim_{h\to5^-} \sqrt{5-h}$ **13.** $\lim_{x\to-2^-} \frac{-3}{x+2}$ **14.** $\lim_{x\to0^-} 2^{1/2}$

15. $\lim_{x\to1^+} (4\sqrt{x-1})$ **16.** $\lim_{x\to2^-} (x\sqrt{4-x^2})$ **17.** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+10}$

18. $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-10x}$ **19.** $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$ **21.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{2x+1}$ **22.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{3-2x}$

23. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^3+4x-3}$ **24.** $\lim_{r\to\infty} \frac{r^3}{r^2+1}$

25. $\lim_{t\to\infty} \frac{3t^3+2t^2+9t-1}{5t^2-5}$ **26.** $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{3x^3-x^2+2}$

27. $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x+1}$ **28.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{(4x-1)^3}$

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-4x-2x^3}{5x^3-8x+1}$ **30.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x-2x^3}{7-5x^3+2x^2}$

31. $\displaystyle\text{lím}_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9}$ **32.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to -3^-} \frac{3x}{9-x^2}$ **33.** $\displaystyle\text{lím}_{w\to\infty} \frac{2w^2-3w+4}{5w^2+7w-1}$

34. $\displaystyle\text{lím}_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{x^3-1}$ **35.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to\infty} \frac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$

36. $\displaystyle\text{lím}_{x\to -\infty} \frac{2x-x^2}{x^2+19x-64}$ **37.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to -3^-} \frac{5x^2+14x-3}{x^2+3x}$

38. $\displaystyle\text{lím}_{t\to 3} \frac{t^2-4t+3}{t^2-2t-3}$ **39.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$

40. $\displaystyle\text{lím}_{x\to -1} \frac{3x^3-x^2}{2x+1}$ **41.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 2^-} \left(2-\frac{1}{x-2}\right)$

42. $\displaystyle\text{lím}_{x\to -\infty} -\frac{x^5+2x^3-1}{x^5-4x^2}$ **43.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to -7^-} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$

44. $\displaystyle\text{lím}_{x\to -2^+} \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}$ **45.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 0^+} \frac{5}{x+x^2}$

46. $\displaystyle\text{lím}_{x\to -\infty} \left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ **47.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 1} x(x-1)^{-1}$ **48.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 1/2} \frac{1}{2x-1}$

49. $\displaystyle\text{lím}_{x\to 1^+} \left(\frac{-5}{1-x}\right)$ **50.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 3} \left(-\frac{7}{x-3}\right)$ **51.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to 1} |x-1|$

52. $\displaystyle\text{lím}_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right|$ **53.** $\displaystyle\text{lím}_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x}$

54. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{x}-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$

En los problemas del 55 al 58, encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

55. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\le 2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

(a) $\text{lím}_{x\to 2^+} f(x)$ **(b)** $\text{lím}_{x\to 2^-} f(x)$ **(c)** $\text{lím}_{x\to 2} f(x)$
(d) $\text{lím}_{x\to\infty} f(x)$ **(e)** $\text{lím}_{x\to -\infty} f(x)$

56. $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x\le 3 \\ -1+3x-x^2 & \text{si } x>3 \end{cases}$

(a) $\text{lím}_{x\to 3^+} f(x)$ **(b)** $\text{lím}_{x\to 3^-} f(x)$ **(c)** $\text{lím}_{x\to 3} f(x)$
(d) $\text{lím}_{x\to\infty} f(x)$ **(e)** $\text{lím}_{x\to -\infty} f(x)$

57. $g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ -x & \text{si } x>0 \end{cases}$

(a) $\text{lím}_{x\to 0^+} g(x)$ **(b)** $\text{lím}_{x\to 0^-} g(x)$ **(c)** $\text{lím}_{x\to 0} g(x)$
(d) $\text{lím}_{x\to\infty} g(x)$ **(e)** $\text{lím}_{x\to -\infty} g(x)$

58. $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ -x & \text{si } x>0 \end{cases}$

(a) $\text{lím}_{x\to 0^+} g(x)$ **(b)** $\text{lím}_{x\to 0^-} g(x)$ **(c)** $\text{lím}_{x\to 0} g(x)$
(d) $\text{lím}_{x\to\infty} g(x)$ **(e)** $\text{lím}_{x\to -\infty} g(x)$

59. Costo promedio Si c es el costo total de producir q unidades de cierto artículo, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $\bar{c}=c/q$. Por lo tanto, si la ecuación de costo total es $c=5000+6q$, entonces

$$\bar{c}=\frac{5000}{q}+6$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es de \$5030 y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es de \$1006. Por medio de la determinación de $\text{lím}_{q\to\infty}\bar{c}$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. Costo promedio Repita el problema 59, considerando que el costo fijo es de \$12 000 y que el costo variable está dado por la función $c_v=7q$.

61. Población Se pronostica que dentro de t años la población de cierta ciudad pequeña será

$$N=40\ 000-\frac{5000}{t+3}$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\text{lím}_{t\to\infty} N$.

62. Demuestre que

$$\text{lím}_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}$$

(*Sugerencia:* Racionalice el numerador al multiplicar la expresión $\sqrt{x^2+x}-x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

Después exprese el denominador en una forma tal que x sea un factor).

63. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en cierto periodo es

$$y=\frac{900x}{10+45x}$$

Si la densidad del huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

64. Si $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ x^3+k(x+1) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$, determine el valor de la constante k para la cual existe $\text{lím}_{x\to 2} f(x)$.

En los problemas 65 y 66, utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando $x=1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. Con base en sus resultados, obtenga una conclusión acerca de $\text{lím}_{x\to 0^+} f(x)$.

65. $f(x)=x^{2x}$ **66.** $f(x)=e^{1/x}$

67. Grafique $f(x)=\sqrt{4x^2-1}$. Utilice la gráfica para estimar $\text{lím}_{x\to 1/2^+} f(x)$.

68. Grafique $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$. Utilice la gráfica para estimar $\text{lím}_{x\to -3^-} f(x)$ si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ cuando sea apropiado.

69. Grafique $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & \text{si } x<2 \\ 2x+5 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$. Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen.

(a) $\text{lím}_{x\to 2^-} f(x)$ **(b)** $\text{lím}_{x\to 2^+} f(x)$ **(c)** $\text{lím}_{x\to 2} f(x)$

Objetivo

Estudiar la continuidad y encontrar puntos de discontinuidad para una función.

6.3 Continuidad

Muchas funciones tienen la propiedad de que no presentan “pausa” alguna en sus gráficas. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x)=x \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\ne 1 \\ 2 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

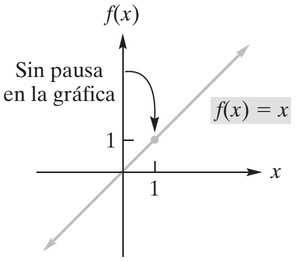


FIGURA 6.23 Es continua en 1.

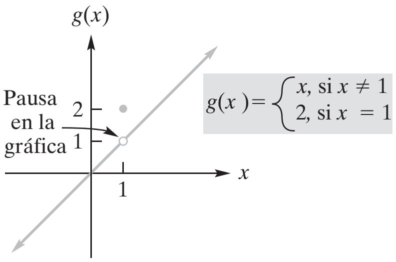


FIGURA 6.24 Es discontinua en 1.

cuyas gráficas aparecen en las figuras 6.23 y 6.24, respectivamente. La gráfica de f no tiene pausa, pero la gráfica de g tiene una pausa en $x = 1$. Dicho de otra forma, si usted fuera a trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que despegar el lápiz del papel en la gráfica de g cuando $x = 1$, pero no tendría que despegarlo en la gráfica de f. Estas situaciones pueden expresarse mediante límites. Compare el límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$ cuando x se aproxima a 1:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

mientras que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 1 \neq 2 = g(1)$$

En la sección 6.1 se puntualizó que dada una función f y un número a, existen dos formas importantes de asociar un número al par (f, a). Una es la simple evaluación, $f(a)$, la cual *existe* precisamente si a está en el dominio de f. La otra forma es $\lim_{x \to a} f(x)$, cuya existencia y determinación puede ser más desafiante. Para las funciones f y g anteriores, el límite de f a medida que $x \to 1$ es igual a $f(1)$, pero el límite de g conforme $x \to 1$ *no* es igual a $g(1)$. Por estas razones, se dice que f es *continua* en 1 y que g es *discontinua* en 1.

Definición

Una función f es **continua** en a si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en a, entonces se dice que f es **discontinua** en a y a se denomina **punto de discontinuidad** de f.

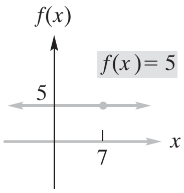


FIGURA 6.25 f es continua en 7.

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad

a. Muestre que $f(x) = 5$ es continua en 7.

Solución: Debe verificarse que las tres condiciones se cumplan. Primero, $f(7) = 5$, de modo que f está definida en $x = 7$. Segundo,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} 5 = 5$$

Por ende, f tiene un límite cuando $x \to 7$. Tercero,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 5 = f(7)$$

Por lo tanto, f es continua en 7. (Vea la figura 6.25).

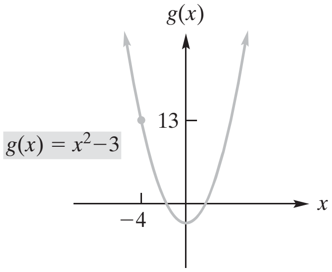


FIGURA 6.26 g es continua en -4.

b. Demuestre que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en —4.

Solución: La función g está definida en $x = -4$; $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x \to -4} g(x) = \lim_{x \to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4)$$

Por lo tanto, g es continua en -4. (Vea la figura 6.26).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Se dice que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función se conecta en todo el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo [2, 5]. De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 6.1, se mostró que para *cualquier* función polinomial f, para cualquier número a, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que

Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en cualquier intervalo. Se dice que una función es **continua en su dominio** si es continua en cada punto de su dominio. Si el dominio de tal función es el conjunto de todos los números reales, se puede decir simplemente que la función es continua.

EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^2 - 9x + 3$ son polinomiales. Por lo tanto, son continuas en su dominio respectivo. Por ejemplo, son continuas en 3.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

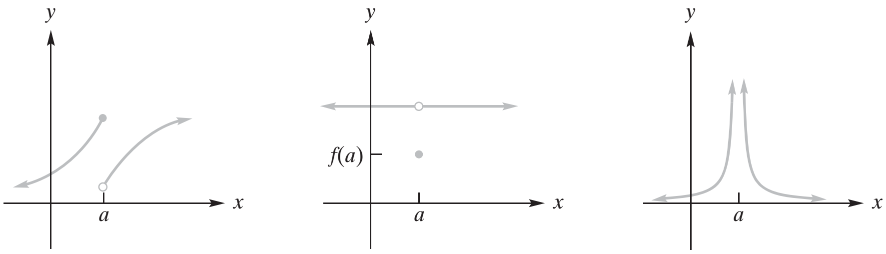
¿Cuándo es discontinua una función? Se puede decir que una función f definida en un intervalo abierto que contenga a a es discontinua en a, si

1. f no tiene límite cuando $x \to a$

o

2. cuando $x \to a$, f tiene un límite diferente de $f(a)$.

Si f no está definida en a, también se dirá, en ese caso, que f es discontinua en a. En la figura 6.27 pueden encontrarse, por inspección, puntos de discontinuidad.



Definida en *a* pero no tiene límite cuando $x \to a$

Definida en *a* y el límite cuando $x \to a$ existe, pero el límite no es $f(a)$

No definida en *a*, pero está definida en todos los valores cercanos de *a*

FIGURA 6.27 Discontinuidades en *a*.

EJEMPLO 3 Discontinuidades

a. Sea $f(x) = 1/x$. (Vea la figura 6.28). Observe que f no está definida en $x = 0$, pero está definida para cualquier otro valor de x cercano a 0. Así, f es discontinua en 0. Además, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en a cuando al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$ a medida que $x \to a$. De aquí que f tenga una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

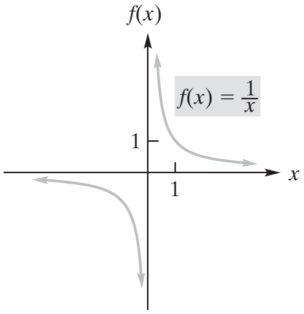


FIGURA 6.28 Discontinuidad infinita en 0.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(Vea la figura 6.29). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto, f es discontinua en 0.

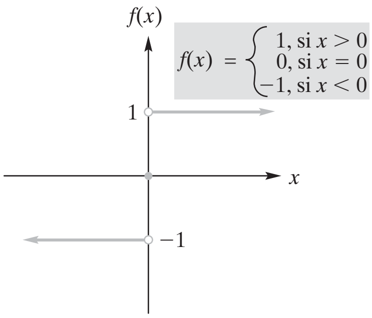


FIGURA 6.29 Función discontinua definida por partes.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

La propiedad siguiente indica dónde ocurren las discontinuidades de una función racional.

Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0 y es continua en cualquier otra parte. Así, una función racional es continua en su dominio.

La función racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1}$ es continua en su dominio, pero no está definida en -1. Es discontinua en -1. La gráfica de f es una línea recta horizontal en $y = 1$ con un “hoyo” en la coordenada $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4 Localización de discontinuidades para funciones racionales

Para cada una de las siguientes funciones, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$

Solución: Esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

que es 0 cuando $x = -4$ o $x = 2$. Así, f solo es discontinua en -4 y 2.

b. $h(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 4}$

Solución: Para esta función racional, el denominador nunca es 0. (Siempre es positivo). De este modo, h no tiene discontinuidad.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 Localización de discontinuidades en funciones definidas por partes

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Solución: Las partes que definen la función están dadas por polinomios que son continuos, entonces el único lugar en el que podría haber discontinuidad es en $x = 3$, donde ocurre la separación de las partes. Se sabe que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Y puesto que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 = 9$$

se puede concluir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$ y la función no tiene puntos de discontinuidad. Se puede obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de f en la figura 6.30.

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Solución: Como f no está definida en $x = 2$, es discontinua en 2. Sin embargo, observe que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 = \lim_{x \to 2^+} x + 2 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

demuestra que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe. (Vea la figura 6.31).

Ahora resuelva el problema 31 ◁

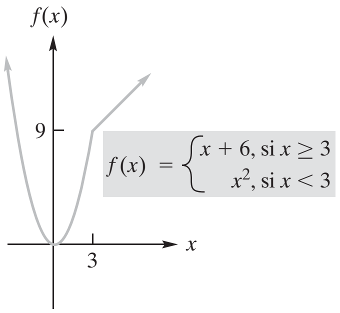


FIGURA 6.30 Función continua definida por partes.

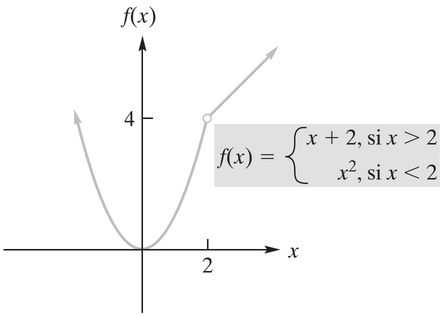


FIGURA 6.31 Función discontinua en 2.

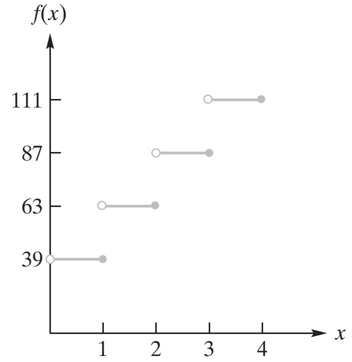


FIGURA 6.32 Función de servicio postal.

EJEMPLO 6 Función del servicio postal

La función de servicio postal

$$c = f(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 63 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 87 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 111 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

da el costo c (en centavos) de enviar por primera clase un paquete de peso x (onzas), para $0 < x \leq 4$, en julio de 2006. En su gráfica de la figura 6.32, es claro que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3 y que es constante para valores de x ubicados entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* debido a la apariencia de su gráfica.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

Hay otra manera de expresar la continuidad aparte de la dada en la definición. Si se toma el enunciado

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

y se reemplaza x por $a + h$, entonces cuando $x \to a$, se tiene que $h \to 0$; y cuando $h \to 0$ se tiene que $x \to a$. Se deduce que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$, dado que los límites existen (figura 6.33). Por lo tanto, el enunciado

Este método para expresar la continuidad en a se utiliza con frecuencia en demostraciones matemáticas.

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

suponiendo que ambos lados existen, también define continuidad en a.

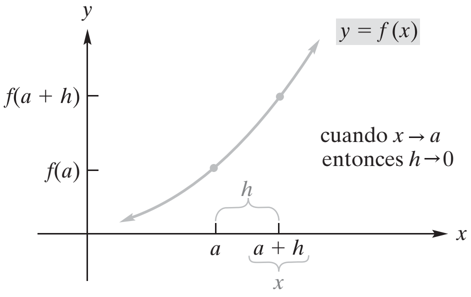


FIGURA 6.33 Diagrama para ilustrar la continuidad en a.

TECNOLOGÍA

Mediante la observación de la gráfica de una función, se tiene la capacidad de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, existe la posibilidad de equivocarse. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en ±1, pero la discontinuidad en 1 no resulta obvia al observar la gráfica de f en la figura 6.34. Por otra parte, la discontinuidad en −1 sí es obvia. Observe que f no está definida en −1 ni en 1.

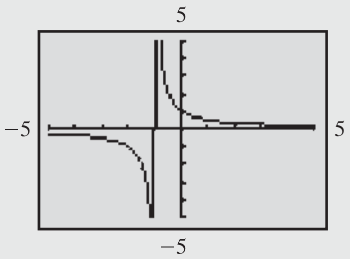
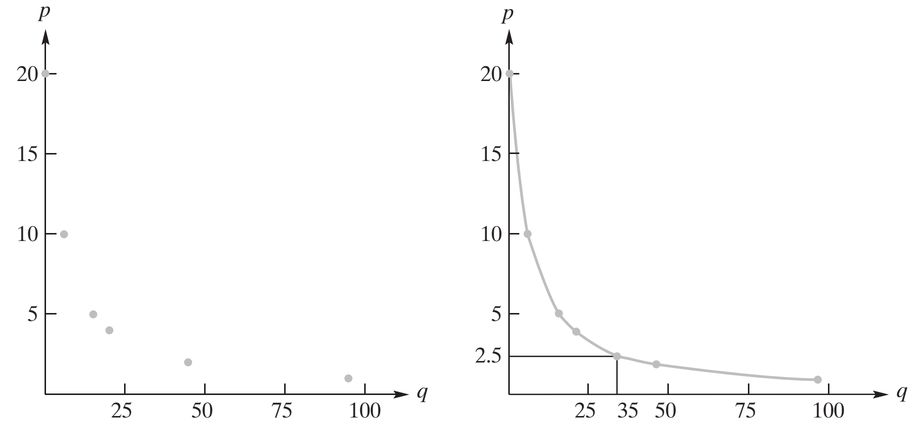


FIGURA 6.34 La discontinuidad en 1 no resulta evidente a partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

A menudo es útil describir una situación mediante una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 6.3 indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 6.35(a), trazando cada par cantidad-precio como un punto.

Tabla 6.3 Programa de demanda

Precio por unidad, p	Cantidad por semana, q
\$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95



(a) (b)

FIGURA 6.35 Visualización de datos por medio de una función continua.

Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no proporciona información del precio al cual, digamos, serán demandadas 35 unidades. Sin embargo, cuando se conectan los puntos de la figura 6.35(a) por medio de una curva suave [vea la figura 6.35(b)], se obtiene lo que se conoce como una curva de demanda. A partir de esta curva, podría estimarse que a un precio de aproximadamente \$2.50 por unidad, se demandarían 35 unidades.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica por medio de una ecuación que define una función continua f, como en la figura 6.35(b). Tal función no solo proporciona una ecuación de demanda, $p = f(q)$, para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente acerca de la naturaleza y las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$, pero desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades podría no tener significado para esta situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos, no tiene sentido.

Se destaca que las funciones de la forma $f(x) = x^a$, para una a fija, son continuas en sus dominios. En particular, las funciones de raíz (cuadrada) son continuas. También las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas en sus dominios. Así, las funciones exponenciales no tienen discontinuidades, mientras que una función logarítmica tiene solo una discontinuidad en 0 (que es una discontinuidad infinita). Se dan muchos más ejemplos de funciones continuas al observar que si f y g son continuas en sus dominios, entonces la función compuesta $f \circ g$, dada por $f \circ g(x) = f(g(x))$, es continua en su dominio. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)}$$

Es continua en su dominio. Por supuesto, es posible que esto involucre la determinación del dominio de tal función.

PROBLEMAS 6.3

En los problemas del 1 al 6, utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

1. $f(x) = x^3 - 5x; x = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x-3}{5x}; x = -3$
3. $g(x) = \sqrt{2-3x}; x = 0$
4. $f(x) = \dfrac{x}{8}; x = 2$
5. $h(x) = \dfrac{x+3}{x-3}; x = -3$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}; x = -1$

En los problemas del 7 al 12, determine si la función es continua en los puntos dados.

7. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}; -2,\ 0$
8. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{6}; 2, -2$
9. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}; 3, -3$
10. $h(x) = \dfrac{3}{x^2+9}; 3, -3$
11. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}; 2,\ 0$
12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}; 0, -1$

En los problemas del 13 al 16, proporcione una razón del por qué la función es continua en su dominio.

13. $f(x) = 2x^2 - 3$
14. $f(x) = \dfrac{2+3x-x^2}{5}$

15. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x})$

16. $f(x) = x(1 - x)$

En los problemas del 17 al 34, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

17. $f(x) = 3x^2 - 3$

18. $h(x) = x - 2$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x+4}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 2}{x^2 - 9}$

21. $g(x) = \dfrac{(2x^2 - 3)^3}{15}$

22. $f(x) = -1$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$

24. $g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + x}$

25. $h(x) = \dfrac{x - 3}{x^3 - 9x}$

26. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3 - 2x}$

27. $p(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

28. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4 - 1}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x \geq -2 \\ 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x > 2 \\ 3 - 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \\ 8x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

35. Tarifas telefónicas Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada hecha desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.08 por el primer minuto o fracción y de \$0.04 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, bosqueje la gráfica de f para $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$. Utilice esta gráfica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$.

36. La *función mayor entero*, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, está definida como el entero más grande que es menor o igual a x, donde x es cualquier número real. Por ejemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 1.999 \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$ y $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$. Bosqueje la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de x en los cuales ocurren discontinuidades.

37. Inventario Bosqueje la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x; ¿f es continua en 2?, ¿en 5?, ¿en 10?

38. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Debido a que g no está definida en $x = 0$, g es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿es continua en 0?

6.4 Continuidad aplicada a desigualdades

Objetivo

Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

En la sección 1.2 se resolvieron desigualdades lineales. Ahora se verá cómo puede aplicarse la noción de continuidad para resolver una desigualdad no lineal, como $x^2 + 3x - 4 < 0$. Esta habilidad será importante en nuestro estudio sobre el cálculo.

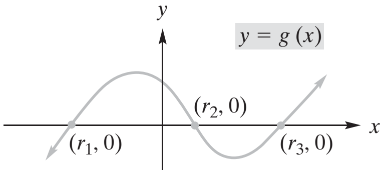


FIGURA 6.36 r_1, r_2 y r_3 son raíces de $g(x) = 0$.

Recuerde (tal y como se mencionó en la sección 2.5) que las intersecciones x de la gráfica de una función g son precisamente las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. Por lo tanto, a partir de la gráfica de $y = g(x)$ mostrada en la figura 6.36, se concluye que r_1, r_2 y r_3 son raíces de $g(x) = 0$ y cualesquiera otras raíces darán lugar a las intersecciones de x (más allá de lo que realmente se muestra en la gráfica). Suponga que efectivamente se muestran todas las raíces de $g(x) = 0$, y por ende todas las intersecciones x. Note además, en la misma figura 6.36, que las tres raíces determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje x:

$$(-\infty, r_1) \quad (r_1, r_2) \quad (r_2, r_3) \quad (r_3, \infty)$$

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

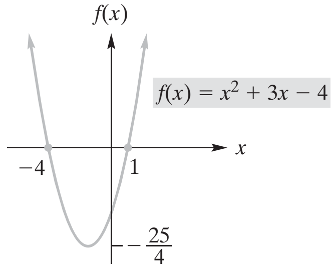


FIGURA 6.37 −4 y 1 son raíces de $f(x) = 0$.

Debido a que f es una función polinomial, es continua. Las raíces de $f(x) = 0$ son -4 y 1; de modo que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x $(-4, 0)$ y $(1, 0)$. (Vea la figura 6.37). Las raíces determinan tres intervalos sobre el eje x:

$$(-\infty, -4) \quad (-4, 1) \quad (1, \infty)$$

Considere el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, se afirma que $f(x) > 0$, o bien, $f(x) < 0$ *en todo* el intervalo. Si no fuera este el caso, entonces $f(x)$ realmente cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de f, habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje x —por ejemplo, en $(x_0, 0)$—. (Vea la figura 6.38). Pero entonces x_0 sería una raíz de $f(x) = 0$. Sin embargo, esto no puede ser porque no hay raíces de f menores que -4. De modo que $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$. Se puede enunciar un argumento similar para cada uno de los otros intervalos.

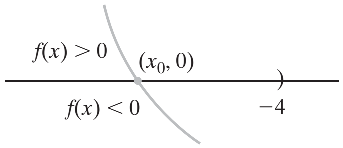


FIGURA 6.38 Cambio de signo para una función continua.

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en *cualquier* punto del intervalo. Por ejemplo, -5 está en $(-\infty, -4)$ y

$$f(-5) = 6 > 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -4)$$

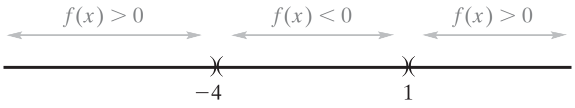


FIGURA 6.39 Diagrama de signos simple para $x^2 + 3x - 4$.

De manera similar, 0 está en $(-4, 1)$ y

$$f(0) = -4 < 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1)$$

Por último, 3 está en $(1, \infty)$ y

$$f(3) = 14 > 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

(Vea el "diagrama de signos" en la figura 6.39). Por lo tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ en } (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty)$$

de modo que se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios a partir de la gráfica de la figura 6.37. La gráfica está por arriba del eje x, esto significa que $f(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$ y en $(1, \infty)$.

En ejemplos más complicados, será útil explotar la naturaleza multiplicativa de los signos. Se observa que $f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$. Cada uno de los términos $x + 4$ y $x - 1$ tiene un diagrama de signos más simple que el de $x^2 + 3x - 4$. Considere el "diagrama de signos" de la figura 6.40. Igual que antes, se colocaron las raíces de $f(x) = 0$ en orden ascendente, de izquierda a derecha, con el fin de subdividir $(-\infty, \infty)$ en tres intervalos abiertos. Esto forma la línea superior de la tabla. Directamente debajo de la línea superior se determinaron los signos de $x + 4$ en los tres subintervalos. Se sabe que para la función lineal $x + 4$ hay exactamente una raíz de la ecuación $x + 4 = 0$, es decir -4. Se le colocó un 0 a -4 en el renglón etiquetado como $x + 4$. Por el argumento que se ilustra en la figura 6.38, se deduce que el signo de la función $x + 4$ es constante en $(-\infty, -4)$ y en $(-4, \infty)$ y dos evaluaciones de $x + 4$ establecen la distribución de signos para $x + 4$. A partir de $(-5) + 4 = -1 < 0$, se tiene que $x + 4$ es *negativa* en $(-\infty, -4)$, por lo que se ingresó un signo $-$ en el espacio $(-\infty, -4\,)$ del renglón $x + 4$. A partir de $(0) + 4 = 4 > 0$, se tiene que $x + 4$ es *positiva* en $(-4, \infty)$. Puesto que $(-4, \infty)$ se ha subdividido en 1, se introduce un signo $+$ en cada uno de los espacios $(-4, 1)$ y $(1, \infty)$ del renglón $x + 4$. De manera similar se construyó el renglón etiquetado como $x - 1$.

	$-\infty$		-4		1		∞
$x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURA 6.40 Diagrama de signos para $x^2 + 3x - 4$.

Ahora se obtiene el renglón inferior tomando, para cada componente, el producto de las entradas previas. Por lo tanto, se tiene $(x + 4)(x - 1) = f(x)$, $(-)(-) = +$, 0(cualquier número) = 0, $(+)(-) = -$, (cualquier número)0 = 0 y $(+)(+) = +$. Los diagramas de signos de este tipo son útiles siempre que una función continua se pueda expresar como un producto de varias funciones continuas más simples, cada una de las cuales tiene un diagrama de signos simple.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Solución: Si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es una función polinomial (cuadrática) y, por lo tanto, continua en todas partes. Para encontrar las raíces reales de $f(x) = 0$, se tiene

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x = -2, 5$$

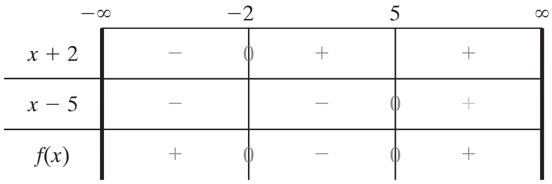


FIGURA 6.41 Diagrama de signos para $x^2 - 3x - 10$.

Las raíces -2 y 5 determinan tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \quad (-2, 5) \quad (5, \infty)$$

Igual que en el ejemplo anterior, se construye el diagrama de signos de la figura 6.41. Se encuentra que $x^2 — 3x - 10 > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

10. Para formar una caja abierta, se corta una pieza cuadrada de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados que se han cortado es de x pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por $V(x) = x(8 - 2x)(10 - 2x)$. Este problema solo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de x para los que el volumen es positivo.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$.

Solución: Si $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$, entonces f es una función polinomial y, por lo tanto, continua en todas partes. Las raíces de $f(x) = 0$ son (en orden ascendente) -4, 0 y 1 y pueden verse en el diagrama de signos de la figura 6.42.

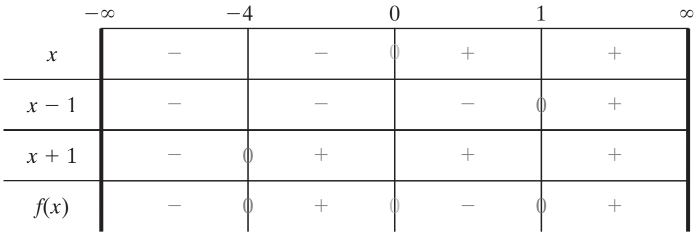


FIGURA 6.42 Diagrama de signos para $x(x - 1)(x + 4)$.

A partir del diagrama de signos, se anotan los puntos requeridos, $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$ en $(-\infty, -4) \cup [0, 1]$.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Los diagramas de signos que se han descrito no se limitan, por cierto, a la resolución de desigualdades polinomiales. El lector habrá notado que se utilizan líneas verticales más gruesas en los puntos finales, $-\infty$ y ∞, del diagrama. Estos símbolos no denotan números reales, sino puntos solos en el dominio de una función. Se amplía la convención de la línea gruesa vertical para señalar los números reales aislados que no están en el dominio de la función en cuestión. Lo anterior se ilustrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad con funciones racionales

Resuelva $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.

Solución: Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$$

Para una función racional $f = g/h$, la desigualdad se resuelve considerando los intervalos determinados tanto por las raíces de $g(x) = 0$ como por las raíces de $h(x) = 0$. Observe que las raíces de $g(x) = 0$ son las raíces de $f(x) = 0$ debido a que la única manera de que una fracción sea 0 es que su numerador sea 0. Por otro lado, las raíces de $h(x) = 0$ son precisa-

	$-\infty$		0		1		5		∞
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1/x$		$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURA 6.43 Gráfica de signos para $\dfrac{(x-1)(x-5)}{x}$.

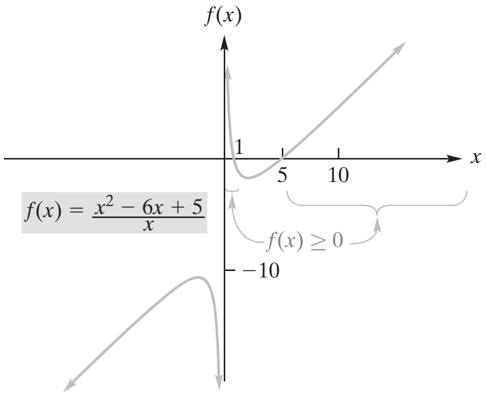


FIGURA 6.44 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x}$.

mente los puntos en los que *f* no está definida y éstos también son precisamente los puntos en los que *f* es discontinua. El signo de *f* puede cambiar en una raíz y puede cambiar en una discontinuidad. Aquí las raíces del numerador son 1 y 5 y la raíz del denominador es 0. En orden ascendente, esto resulta en 0, 1 y 5, lo que determina los intervalos abiertos

$$(-\infty, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Éstos, junto con la observación de que $1/x$ es un *factor* de *f*, conducen al diagrama de signos mostrado en la figura 6.43.

Aquí, los dos primeros renglones del diagrama de signos se construyen como antes. En el tercer renglón se ha colocado un signo × en 0 para indicar que el factor $1/x$ no está definido en 0. El renglón inferior, como antes, se construye tomando los productos de las entradas previas. Observe que un producto no está definido en ningún punto en el que cualquiera de sus factores no esté definido. De ahí que también se tenga una entrada × en 0 en el renglón inferior.

A partir de la última fila del diagrama de signos se puede leer que la solución de $\frac{(x-1)(x-5)}{x} \geq 0$ es $(0, 1] \cup [5, \infty]$. Observe que 1 y 5 están en la solución y 0 no lo está.

En la figura 6.44 se ha graficado $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x}$ y se puede confirmar visualmente que la solución de la desigualdad $f(x) \geq 0$ es precisamente el conjunto de todos los números reales en los que la gráfica se encuentra en o por encima del eje *x*.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

No siempre es necesario un diagrama de signos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades no lineales

a. Resuelva $x^2 + 1 > 0$.

Solución: La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por lo tanto, la función continua $f(x) = x^2 + 1$ no tiene intersecciones en *x*. De esto se deduce que $f(\mathrm{x})$ siempre es positiva o siempre es negativa. Pero x^2 siempre es positiva o cero, de modo que $x^2 + 1$ siempre es positiva. Por lo tanto, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$.

b. Resuelva $x^2 + 1 < 0$.

Solución: Con base en el inciso (a), $x^2 + 1$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución, lo cual significa que el conjunto de soluciones es ϕ, el conjunto vacío.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Se concluye con un ejemplo no racional.

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad con funciones racionales

Resuelva $x \ln x - x \geq 0$.

Solución: Sea $f(x) = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$, la cual, al ser un producto de funciones continuas, es continua. A partir de la forma *factorizada* de f se observa que las raíces de $f(x) = 0$ son 0 y las raíces de $\ln x - 1 = 0$. Esto último es equivalente a $\ln x = 1$, que es equivalente a $e^{\ln x} = e^1$, ya que la función exponencial es uno a uno. Sin embargo, la última igualdad dice que $x = e$. El dominio de f es $(0, \infty)$ porque $\ln x$ solo está definida para $x > 0$. El dominio dicta la línea superior del diagrama de signos de la figura 6.45.

El primer renglón de la figura 6.45 es directo. Para el segundo renglón, se coloca un 0 en e, la única raíz de $\ln x - 1 = 0$. Por la continuidad de $\ln x - 1$, el signo de $\ln x - 1$ en $(0, e)$ y en (e, ∞) puede determinarse mediante las evaluaciones adecuadas. Para el primero, se evalúa a 1 en $(0, e)$ y se obtiene $\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$. Para el segundo, se evalúa a e^{-2} en (e, ∞) y $\ln e^2 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$. El renglón inferior, como de costumbre, se determina multiplicando los demás. Con base en el renglón inferior de la figura 6.45, la solución de $x \ln x - x \geq 0$ es evidentemente $[e, \infty)$.

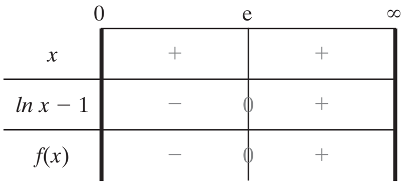


FIGURA 6.45 Diagrama de signos para $x \ln x - x$.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 6.4

En los problemas del 1 al 26, resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$
2. $x^2 - 8x + 15 > 0$
3. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$
4. $15 - 2x - x^2 \geq 0$
5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$
6. $x^2 - 4 < 0$
7. $x^2 + 4 < 0$
8. $2x^2 - x - 2 \leq 0$
9. $(x + 1)(x - 2)(x + 7) \leq 0$
10. $(x + 5)(x + 2)(x - 7) \leq 0$
11. $-x(x - 5)(x + 4) > 0$
12. $(x + 2)^2 > 0$
13. $x^3 + 4x \geq 0$
14. $(x + 3)^2(x^2 - 4) < 0$
15. $x^3 + 8x^2 + 15x \leq 0$
16. $x^3 + 6x^2 + 9x < 0$
17. $\dfrac{x}{x^2 - 9} < 0$
18. $\dfrac{x^2 - 1}{x} < 0$
19. $\dfrac{3}{x + 1} \geq 0$
20. $\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0$
21. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$
22. $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$
23. $\dfrac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0$
24. $\dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2} \leq 0$
25. $x^2 + 2x \geq 2$
26. $x^4 - 16 \geq 0$

27. Ingresos Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de *cada* unidad es de $28 - 0.2q$. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea al menos de \$750?

28. Administración forestal Una compañía maderera posee un bosque cuya forma es rectangular y mide 1 × 2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme de árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}$ mi^2 de bosque?

29. Diseño de contenedor Un fabricante de contenedores desea hacer una caja sin tapa y para ello corta un cuadrado de 3 por 3 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio y luego dobla hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 192 pulg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. Participación en talleres Imperial Education Services (IES) ofrece un curso de procesamiento de datos al personal clave de la compañía Zeta. El precio por persona es de \$50 y la compañía Zeta garantiza que al menos habrá 50 asistentes. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para *todos* en \$0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

32. Grafique $f(x) = \dfrac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0$$

Una manera novedosa de resolver una desigualdad no lineal como $f(x) > 0$ es por inspección de la gráfica de $g(x) = f(x)/|f(x)|$, cuyo rango consiste solo en 1 y −1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La solución de $f(x) > 0$ consiste en todos los intervalos para los cuales $g(x) = 1$. Resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34 con esta técnica.

33. $6x^2 - x - 2 > 0$

34. $\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 6} < 0$

35. Grafique $x \ln x - x$. ¿La función parece ser continua? ¿Apoya la gráfica las conclusiones del ejemplo 5? ¿En qué valor la función parece tener un mínimo?

36. Grafique e^{-x^2}. ¿La función parece ser continua? ¿La conclusión puede confirmarse mediante la invocación de hechos sobre las funciones continuas? ¿En qué valor la función parece tener un máximo?

Repaso del capítulo 6

Términos y símbolos importantes

Sección 6.1	**Límites** $\text{lím}_{x\to a} f(x) = L$
Sección 6.2	**Límites (*continuación*)** $\text{lím}_{x\to a^-} f(x) = L$ $\quad$ $\text{lím}_{x\to a^+} f(x) = L$ $\quad$ $\text{lím}_{x\to a} f(x) = \infty$ $\text{lím}_{x\to \infty} f(x) = L$ $\quad$ $\text{lím}_{x\to -\infty} f(x) = L$
Sección 6.3	**Continuidad** continua en a $\quad$ discontinua en a continua en un intervalo $\quad$ continua en su dominio
Sección 6.4	**Continuidad aplicada a desigualdades** diagrama de signos

Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que $\text{lím}_{x\to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse mucho al número L cuando se selecciona una x lo suficientemente cerca, pero diferente, de a. Si $\text{lím}_{x\to a} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to a} g(x)$ existen y c es una constante, entonces:

1. $\text{lím}_{x\to a} c = c$
2. $\text{lím}_{x\to a} x^n = a^n$
3. $\text{lím}_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \text{lím}_{x\to a} f(x) \pm \text{lím}_{x\to a} g(x)$
4. $\text{lím}_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \text{lím}_{x\to a} f(x) \cdot \text{lím}_{x\to a} g(x)$
5. $\text{lím}_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \text{lím}_{x\to a} f(x)$
6. $\text{lím}_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\text{lím}_{x\to a} f(x)}{\text{lím}_{x\to a} g(x)}$ si $\text{lím}_{x\to a} g(x) \neq 0$,
7. $\text{lím}_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\text{lím}_{x\to a} f(x)}$
8. Si f es una función polinomial, entonces $\text{lím}_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial, cuando $x \to a$, puede encontrarse con solo evaluar el polinomio en a. Sin embargo, con otras funciones f, la evaluación en a puede conducir a la forma indeterminada 0/0. En tales casos, mediante operaciones algebraicas como factorización y cancelación, puede producirse una función g que concuerde con f, para $x \neq a$, y para la cual sea posible determinar el límite.

Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a por la derecha, entonces se escribe $\text{lím}_{x\to a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a por la izquierda, entonces se escribe $\text{lím}_{x\to a^-} f(x) = L$. Estos límites se llaman límites unilaterales.

El símbolo de infinito ∞, que no representa un número, se utiliza para describir límites. El enunciado

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece indefinidamente, los valores de $f(x)$ se aproximan al número L. Una proposición similar se aplica cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que x disminuye indefinidamente. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

Si $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando $x \to a$, entonces se escribe $\text{lím}_{x\to a} f(x) = \infty$. De manera similar, si $f(x)$ disminuye indefinidamente, se tiene $\text{lím}_{x\to a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞ (o $-\infty$) no significa que el límite exista; es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de polinomios) cuando $x \to \infty$ o $-\infty$. Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y el denominador, respectivamente, que tienen las potencias más grandes de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

En particular, cuando $x \to \infty$ o $-\infty$, el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término que tiene la potencia más grande de x. Esto significa que para un polinomio no constante, cuando $x \to \infty$ o $-\infty$ el límite es ∞ o bien $-\infty$.

Una función f es continua en a si y solo si

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de f no se interrumpe cuando $x = a$. Si una función no es continua en a, entonces se dice que es discontinua en a. Las funciones polinomiales y las funciones racionales son continuas en sus dominios. Por lo tanto, las funciones polinomiales no tienen discontinuidades y las funciones racionales son discontinuas solo en los puntos donde su denominador es cero.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$), primero se encuentran las raíces reales de $f(x) = 0$ y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos y, en cada intervalo, $f(x)$ siempre es positiva o siempre es negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de $f(x)$ en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos y se ensamblan en un diagrama de signos, es fácil dar la solución de $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 28, encuentre los límites, si existen. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

1. $\lim_{x \to -1} (2x^2 + 6x - 1)$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$

3. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

4. $\lim_{x \to -4} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4}$

5. $\lim_{h \to 0} (x + h)$

6. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

7. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$

8. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6}$

9. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2}{x + 1}$

10. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$

11. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x + 5}{7x - 4}$

12. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$

13. $\lim_{t \to 4} \dfrac{3t - 4}{t - 4}$

14. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^6}{x^5}$

15. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x + 3}{1 - x}$

16. $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{64}$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$

18. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

19. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x - 2}$

21. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{3x}$

22. $\lim_{y \to 5^+} \sqrt{y - 5}$

23. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^{100} + (1/x^4)}{e - x^{96}}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{ex^2 - x^4}{31x - 2x^3}$

25. $\lim_{x \to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

26. $\lim_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

27. $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$ (*Sugerencia:* Para $x > 4$, $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\sqrt{x + 4}$).

28. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x\ -3}}$ (*Sugerencia:* Para $x > 3$, $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{x - 3}$).

29. Si $f(x) = 8x - 2$, encuentre $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, encuentre $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

31. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, entonces el número de parásitos presentes a lo largo de cierto periodo es

$$y = 23\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)$$

Si la densidad del huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

32. Relación presa-depredador Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas consumidas por un depredador a lo largo de cierto periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}$$

Si la densidad de presas aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

33. Mediante la definición de *continuidad*, demuestre que la función $f(x) = x + 3$ es continua en $x = 2$.

34. Mediante la definición de *continuidad*, demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 2}$ es continua en $x = 5$.

35. Establezca si $f(x) = x^2/5$ es continua en cada número real. Dé una razón para su respuesta.

36. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas del 37 al 44, encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

38. $f(x) = \dfrac{0}{x^2}$

39. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x^2 + 3}$

40. $f(x) = (2 - 3x)^3$

41. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$

42. $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^3 + x}$

43. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En los problemas del 45 al 52, resuelva las desigualdades dadas.

45. $x^2 + 4x - 12 > 0$

46. $3x^2 - 3x - 6 \leq 0$

47. $x^5 \leq 7x^4$

48. $x^3 + 9x^2 + 14x < 0$

49. $\dfrac{x+5}{x^2-1} < 0$

50. $\dfrac{x(x+5)(x+8)}{3} < 0$

51. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-8} \geq 0$

52. $\dfrac{x^2-9}{x^2-16} \leq 0$

53. Grafique $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-19x+18}{x^3-2x^2+x-2}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 2} f(x)$.

54. Grafique $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. A partir de la gráfica, estime $\lim_{x\to 1} f(x)$.

55. Grafique $f(x) = x \ln x$. Con base en la gráfica, estime el límite unilateral $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

56. Grafique $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{(e^x+1)(e^{2x}-e^x)}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

57. Grafique $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0$$

58. Grafique $f(x) = \dfrac{x^5-4}{x^3+1}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5-4}{x^3+1} \leq 0$$

EXPLORE Y AMPLÍE Deuda nacional

El tamaño de la deuda nacional de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas y con frecuencia constituye un tema sobre el cual se habla en las noticias. La magnitud de la deuda afecta la confianza en la economía de Estados Unidos tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, funcionarios empresariales y líderes políticos. Hay quienes creen que, para reducir su deuda, el gobierno debería disminuir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno; o bien aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir esta deuda continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad a cada instante, se restaría la deuda a cada instante. A continuación se estudiará cómo podría modelarse esta situación.

Suponga que la deuda D_0 se reduce a una tasa anual r en el instante $t = 0$. Además, suponga que hay k periodos de igual extensión en un año. Al final del primer periodo, la deuda original se reduce en $D_0\left(\frac{r}{k}\right)$, de modo que la nueva deuda es

$$D_0 - D_0\left(\frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

Al final del segundo periodo, esta deuda se reduce en $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$ de modo que la nueva deuda es

$$\begin{aligned} D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k} \\ = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\left(1 - \frac{r}{k}\right) \\ = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo la deuda es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$, y así sucesivamente. Al término de t años, el número de periodos es kt y la deuda es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si la deuda se redujera a cada instante, entonces $k \to \infty$. Así, se desea encontrar

$$\lim_{k\to\infty} D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

que puede reescribirse como

$$D_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r}\right]^{-rt}$$

Si establecemos $x = -r/k$, entonces la condición $k \to \infty$ implica que $x \to 0$. De modo que el límite dentro de los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$, que, tal como se estudió en la sección 6.1, es e. Por lo tanto, si en el instante $t = 0$ la deuda D_0 se reduce continuamente a una tasa anual r, entonces t años después la deuda D está dada por

$$D = D_0 e^{-rt}$$

Por ejemplo, suponga que Estados Unidos tenía una deuda de \$11 195 mil millones (redondeada al millar de millones más cercano) a mediados de abril de 2009 y una tasa de reducción continua de 3% anual. Entonces, dentro de t años contados a partir de ahora, la deuda está dada por

$$D = 11\,195e^{-0.03t}$$

en la cual D está en miles de millones. Esto significa que dentro de 10 años, la deuda será de $11\,195e^{-0.03} \approx \$8293$ mil millones. En la figura 6.46 se muestra la gráfica de $D = 11\,195e^{-rt}$ para varias tasas r. Por supuesto, entre mayor sea el valor de r, más rápida será la reducción de la deuda. Observe que para $r = 0.03$, al final de 30 años la deuda aún es considerable (aproximadamente \$4552 mil millones).

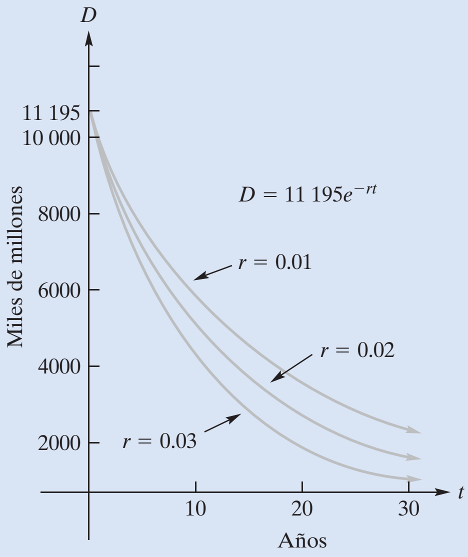


FIGURA 6.46 Presupuesto de deuda reducida de manera continua.

Es interesante observar que los elementos radiactivos que decaen también siguen el modelo de reducción continua de la deuda $D = D_0e^{-rt}$.

Para investigar sobre la situación actual de la deuda nacional de Estados Unidos, visite uno de los seguidores de esta deuda en Internet. Teclee "national debt clock" en un buscador web.

Problemas

En los problemas siguientes, suponga una deuda estadounidense actual de \$11 195 mil millones.

1. Si la deuda se redujera a \$10 000 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua de la deuda estaría implicada? Redondee su respuesta al porcentaje más cercano.

2. Para una reducción continua de deuda a una tasa anual de 3%, determine el número de años necesarios, contados a partir de ahora, para que la deuda se reduzca a la mitad. Redondee su respuesta al año más cercano.

3. ¿Qué supuestos fundamentan un modelo de reducción de deuda que utiliza una función exponencial?

DIFERENCIACIÓN

7

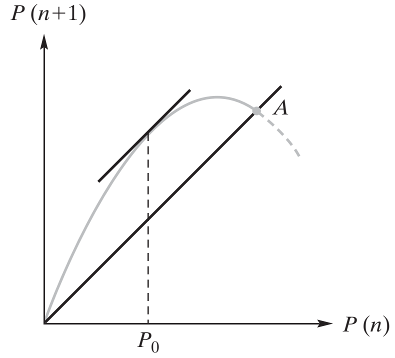
Por lo general, en una zona de pesca, las regulaciones del gobierno limitan el número de peces que pueden pescar los barcos de pesca comerciales por temporada. Esto evita la pesca excesiva, que agota la población de peces y deja, a la larga, pocos peces que capturar.

Desde una perspectiva estrictamente comercial, la regulación ideal permitiría obtener un máximo en el número de peces disponibles cada año para la pesca. La clave para determinar las regulaciones ideales es la función matemática llamada curva de reproducción. Para un hábitat de peces, esta función estima la población de peces de un año al siguiente, $P(n + 1)$, con base en la población actual, $P(n)$, suponiendo que no hay intervención externa como pesca o influencia de depredadores.

La figura que se presenta abajo a la izquierda muestra una curva común de reproducción; en la figura también está graficada la recta $P(n + 1) = P(n)$, a lo largo de la cual las poblaciones $P(n)$ y $P(n + 1)$ serían iguales. Observe la intersección de la curva con la recta en el punto A. Este es el punto donde, a consecuencia de la gran aglomeración que hay en el hábitat, la población alcanza su tamaño máximo sostenible. Una población que tiene este tamaño en un año, tendrá el mismo tamaño el año siguiente.

Para cualquier punto situado en el eje horizontal, la distancia entre la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ representa la pesca sostenible: el número de peces que pueden ser atrapados, después que las crías han crecido hasta madurar, de modo que al final la población regrese al mismo tamaño que tenía un año antes.

Desde el punto de vista comercial, el tamaño de población óptimo es aquél donde la distancia entre la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ es máxima. Esta condición se cumple donde las pendientes de la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ son iguales. [Por supuesto, la pendiente de $P(n + 1) = P(n)$ es 1]. Así, para una cosecha de peces máxima año tras año, las regulaciones deben tener como objetivo mantener la población de peces muy cerca de P_0.



Aquí, una idea central es la de la pendiente de una curva en un punto dado. Esta idea es la piedra angular del presente capítulo.

En este momento iniciaremos nuestro estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las de álgebra y geometría. La fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones se aclararán más adelante en el libro. En este capítulo se introducirá la *derivada* de una función, así como las reglas importantes para encontrar derivadas. También se analizará el uso de la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, tal como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.

Objetivo

Desarrollar la idea de una recta que es tangente a una curva, definir la pendiente de una curva, definir una derivada y darle una interpretación geométrica. Calcular derivadas mediante el uso de la definición de límite.

7.1 La derivada

El problema principal del cálculo diferencial consiste en encontrar la pendiente de la *recta tangente* en un punto situado sobre una curva. Quizá en la clase de geometría de bachillerato vio usted que una recta tangente, o *tangente*, a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto exacto (figura 7.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 7.2a), las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto, P. Aunque L_2 no se vería como la tangente en este punto, parece natural que L_1 sí lo sea. En la figura 7.2b) se podría considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en el punto P, aunque L_3 interseca a la curva en otros puntos.

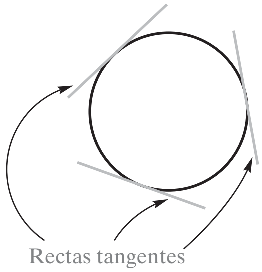
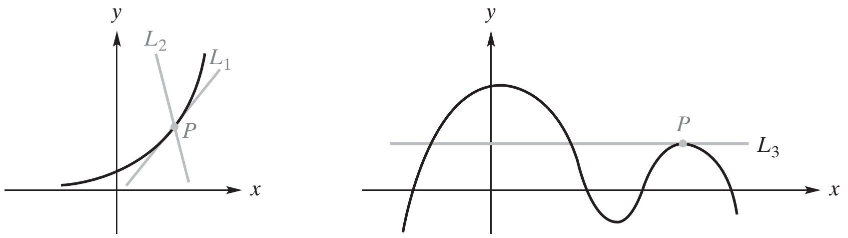


FIGURA 7.1 Rectas tangentes a un círculo.



L_1 es una recta tangente en P, pero L_2 no lo es.

a)

L_3 es una recta tangente en P.

b)

FIGURA 7.2 Recta tangente en un punto.

En los ejemplos anteriores, puede verse que la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en solo un punto resulta inadecuada. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, se utiliza el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante*. Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 7.3. Se desea definir la recta tangente en el punto P. Si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una recta secante. Si Q se desplaza a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (vea la figura 7.4), PQ', PQ'', etc., son rectas secantes características. Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. *En ambos casos, las rectas secantes se acercan a la misma posición límite.* Esta posición límite común de las rectas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en P. Esta definición parece razonable y se aplica a las curvas en general, no solo a los círculos.

Una curva no necesariamente tiene una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ no tiene una tangente en (0, 0). Como se puede ver en la figura 7.5, una recta secante que pasa por (0, 0) y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta $y = x$. Así, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta

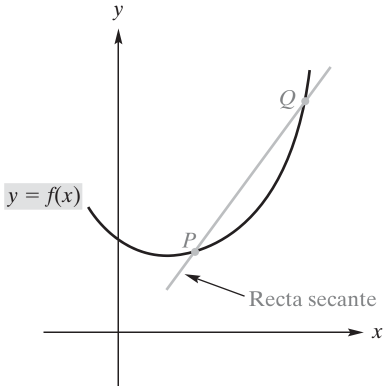


FIGURA 7.3 Recta secante PQ.

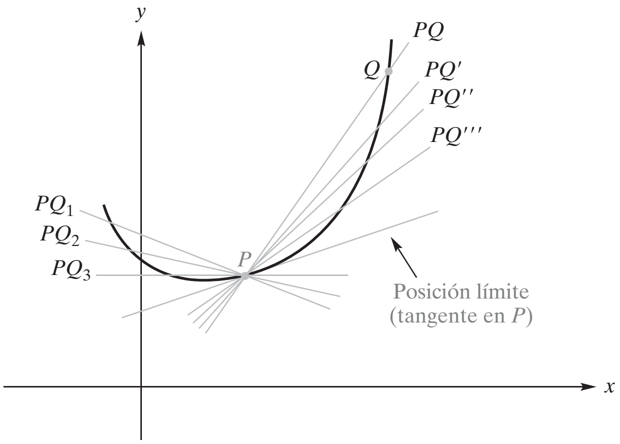


FIGURA 7.4 La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

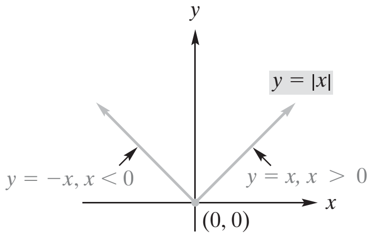


FIGURA 7.5 No hay recta tangente para la gráfica de $y = |x|$ en (0, 0).

$y = x$. Sin embargo, una recta secante que pase por (0, 0) y un punto cercano a su izquierda sobre la curva, siempre será la recta $y = -x$. Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = -x$. Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en (0, 0).

Ahora que se tiene una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, puede definirse la *pendiente de una curva* en un punto.

Definición

La **pendiente de una curva** en un punto P es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en P.

Como la tangente en P es una posición límite de las rectas secantes PQ, consideremos ahora la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se aproxima a P. Por ejemplo, considere la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (vea la figura 7.6) es

$$m_{PQ} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5$$

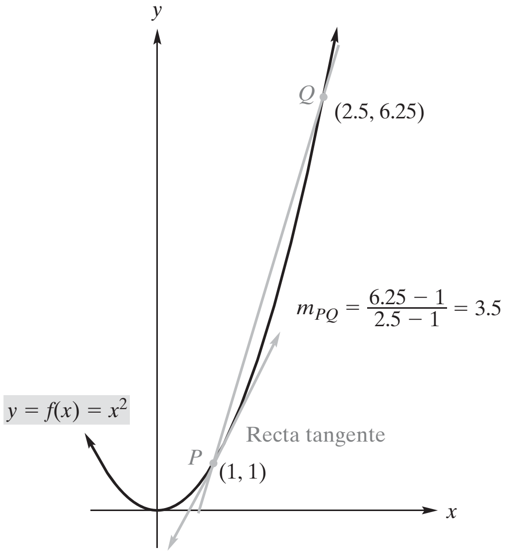


FIGURA 7.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por (1, 1) y (2.5, 6.25).

En la tabla 7.1 se incluyen otros puntos Q situados sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se aproxima a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, puede esperarse que la pendiente de la recta tangente indicada en (1, 1) sea 2. Esto se confirmará más adelante en el ejemplo 1. Pero primero deseamos generalizar el procedimiento.

Tabla 7.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1, 1)$

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	(6.25 − 1)/(2.5 − 1) = 3.5
(2, 4)	(4 − 1)/(2 − 1) = 3
(1.5, 2.25)	(2.25 − 1)/(1.5 − 1) = 2.5
(1.25, 1.5625)	(1.5625 − 1)/(1.25 − 1) = 2.25
(1.1, 1.21)	(1.21 − 1)/(1.1 − 1) = 2.1
(1.01, 1.0201)	(1.0201 − 1)/(1.01 − 1) = 2.01

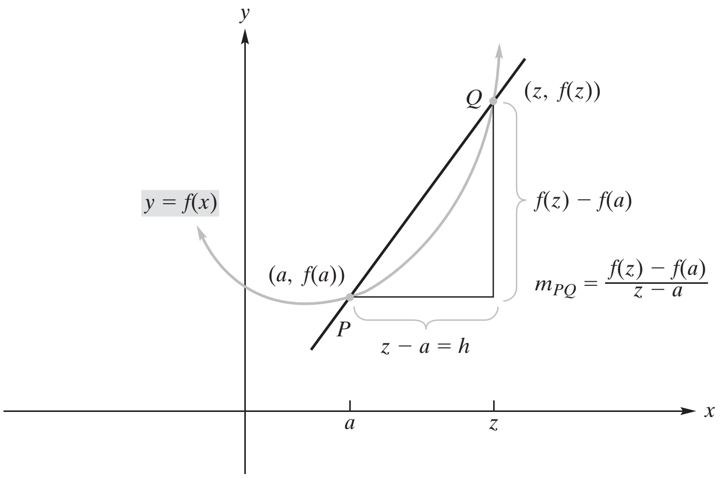


FIGURA 7.7 Recta secante que pasa por P y Q.

Para la curva $y = f(x)$ de la figura 7.7, se encontrará una expresión para la pendiente en el punto $P = (a, f(a))$. Si $Q = (z, f(z))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si le llamamos h a la diferencia $z - a$, entonces podemos escribir z como $a + h$. Aquí se debe tener $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $z = a$ y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Cuál de estas dos formas sea la más conveniente para expresar m_{PQ} depende de la naturaleza de la función f. Conforme Q se desplaza a lo largo de la curva hacia P, z se aproxima a a. Esto significa que h se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes —que es la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$— es

$$m_{\tan} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

De nuevo, cuál de estas dos formas sea la más conveniente —cuál de los límites es más fácil de determinar— depende de la naturaleza de la función f. En el ejemplo 1, se usará este límite para confirmar la conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)^2 = x^2$ en (1, 1) es igual a 2.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto (1, 1).

Solución: La pendiente es el límite en la ecuación (1) con $f(x) = x^2$ y $a = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tangente a $y = x^2$ en (1, 1) tiene pendiente igual a 2. (Vea la figura 7.6).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Es posible generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ ubicado sobre una curva. Si se reemplaza a por x se obtiene una función, llamada *derivada* de f, cuya entrada es x y cuya salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$, siempre que la recta tangente *exista* y *tenga* una pendiente. (Si la recta tangente existe pero es *vertical*, entonces no tiene pendiente). Así, se tiene la definición siguiente que constituye la base del cálculo diferencial:

Definición

La **derivada** de una función f es la función denotada como f' (se lee "f prima") y definida por

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \textbf{(2)}$$

siempre que este límite exista. Si $f'(a)$ puede encontrarse (quizá no todas las $f'(x)$ puedan encontrarse), se dice que f es ***diferenciable*** en a y a $f'(a)$ se le llama derivada de f en a o derivada de f con respecto a x en a. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación***.

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde $z = x + h$, se llama **cociente de diferencias**. Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencias.

EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

Si $f(x) = x^2$, encuentre la derivada de f.

Solución: Al aplicar la definición de una derivada se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Observe que, al obtener el límite, se trata a x como una constante porque es h y no x la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, lo cual puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, lo que confirma el resultado del ejemplo 1.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Para calcular una derivada por medio de la definición, se requiere precisión. Por lo general, el cociente de diferencias requiere de una manipulación considerable antes de realizar el paso del límite. Esto demanda que cada paso escrito vaya precedido por "$\lim_{h \to 0}$" para indicar que el paso del límite aún sigue pendiente. Observe que después de realizar el paso del límite, h ya no está presente.

Además de la notación $f'(x)$, otras formas usadas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en x son

$\dfrac{dy}{dx}$	se lee "de y, de x"
$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	"de $f(x)$, de x"
y'	y prima"
$D_x y$	("de x de y")
$D_x(f(x))$	("de x de $f(x)$")

¡ADVERTENCIA!

La notación $\dfrac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque lo parezca. Es solo un símbolo para representar una derivada. Aún no le hemos dado un significado a símbolos individuales como dy y dx.

Como la derivada proporciona la pendiente de la recta tangente, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente para la gráfica de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Otras dos notaciones para la derivada de f en a son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{y} \quad y'(a)$$

EJEMPLO 3 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(1, 7)$.

Solución:

Estrategia Primero se determinará la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Mediante el uso de este resultado y del punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente se obtiene una ecuación de la recta tangente.

En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que, como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. (Esta ni siquiera es la ecuación de una recta). La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

Se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(2(x+h)^2+2(x+h)+3)-(2x^2+2x+3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+2x+2h+3-2x^2-2x-3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}(4x+2h+2) \end{aligned}$$

Por lo que,

$$f'(x) = 4x + 2$$

y

$$f'(1) = 4(1) + 2 = 6$$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1)$$

cuya forma pendiente-intersección es

$$y = 6x + 1$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

EJEMPLO 4 Determinación de la pendiente de una curva en un punto

Encuentre la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ en el punto donde $x = 6$.

Solución: La pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si hacemos $y = f(x) = 2x + 3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2(x+h)+3)-(2x+3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

Como $dy/dx = 2$, cuando $x = 6$, o de hecho en cualquier punto, la pendiente es 2. Observe que la curva es una línea recta que tiene la misma pendiente en cada punto.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 Una función con una recta tangente vertical

Encuentre $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$.

Solución: Al hacer $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Para calcular límites, con frecuencia es útil racionalizar los numeradores o denominadores de las fracciones.

Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Esto puede evitarse racionalizando el *numerador*:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

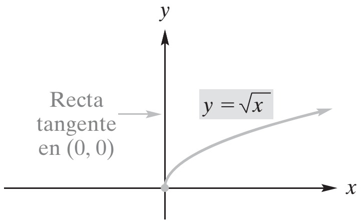


FIGURA 7.8 Recta tangente vertical en (0, 0).

Observe que la función original, $\sqrt{x}$, está definida para $x \geq 0$, pero su derivada $1/(2\sqrt{x})$, está definida solo cuando $x > 0$. La razón para esto resulta evidente a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ mostrada en la figura 7.8. Cuando $x = 0$, la tangente es una recta vertical, por lo que su pendiente no está definida.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

En el ejemplo 5 se vio que la función $y = \sqrt{x}$ no es diferenciable cuando $x = 0$, ya que la recta tangente es vertical en ese punto. Vale la pena mencionar que $y = |x|$ tampoco es diferenciable cuando $x = 0$, pero por una razón diferente: *no* existe recta tangente en ese punto. (Vea la figura 7.5). Ambos ejemplos muestran que el dominio de f' debe estar estrictamente contenido en el dominio de f.

Con frecuencia, resulta más natural utilizar variables diferentes a x y y en los problemas aplicados. El tiempo, denotado por t, la cantidad, por q, y el precio, por p, son ejemplos obvios. Lo anterior se ilustra en el ejemplo 6.

Con frecuencia, la notación de Leibniz es útil para indicar una derivada porque hace énfasis en las variables independiente y dependiente implicadas. Por ejemplo, si la variable p es una función de la variable q, se habla de la derivada de p con respecto a q, que se escribe como dp/dq.

EJEMPLO 6 Determinación de la derivada de p con respecto a q

Si $p = f(q) = \dfrac{1}{2q}$, encuentre $\dfrac{dp}{dq}$.

Solución: Este problema se resolverá primero usando el límite $h \to 0$ (el único que se ha utilizado hasta ahora) y después se empleará $r \to q$ para ilustrar la otra variante del límite.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2q}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(q+h)-f(q)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{2(q+h)}-\dfrac{1}{2q}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{q-(q+h)}{h(2q(q+h))} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(2q(q+h))}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

También se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} &= \lim_{r\to q}\frac{f(r)-f(q)}{r-q}\\ &= \lim_{r\to q}\frac{\dfrac{1}{2r}-\dfrac{1}{2q}}{r-q} = \lim_{r\to q}\frac{\dfrac{q-r}{2rq}}{r-q}\\ &= \lim_{r\to q}\frac{-1}{2rq} = \frac{-1}{2q^2}\end{aligned}$$

APLÍQUELO ▶

1. Si una pelota se lanza hacia arriba a una velocidad de 40 pies/s desde una altura de 6 pies, su altura H en pies después de t segundos está dada por $H = 6 + 40t - 16t^2$. Encuentre $\dfrac{dH}{dt}$.

Se deja a criterio del lector decidir cuál de las dos formas conduce al cálculo más simple del límite en este caso.

Observe que cuando $q = 0$ la función no está definida, así que la derivada tampoco está definida cuando $q = 0$.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

Tenga en mente que la derivada de $y = f(x)$ en x no es otra cosa que un límite, a saber

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

de manera equivalente

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

cuyo uso acabamos de ilustrar. Aunque la derivada puede interpretarse como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, esta interpretación solo es una convención geométrica que nos ayuda a entender su significado. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como se verá después, existen otras interpretaciones útiles de la derivada.

En la sección 7.4, se hará uso técnico de la siguiente relación entre diferenciabilidad y continuidad. Sin embargo, es de importancia fundamental y necesita entenderse desde el principio.

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Para establecer este resultado, se supondrá que f es diferenciable en a. Entonces $f'(a)$ existe y

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Considere el numerador $f(a+h) - f(a)$ cuando $h \to 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{h \to 0}(f(a+h)) - f(a)) = 0$. Esto significa que $f(a + h) - f(a)$ tiende a 0 cuando $h \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Como se estableció en la sección 6.3, esta condición significa que f es continua en a. Entonces, lo anterior prueba que f es continua en a cuando f es diferenciable ahí. De manera más simple, se dice que la **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en dicho punto**.

Si una función no es continua en un punto, entonces no puede tener una derivada ahí. Por ejemplo, la función de la figura 7.9 es discontinua en a. La curva no tiene tangente en ese punto, por lo tanto la función no es diferenciable ahí.

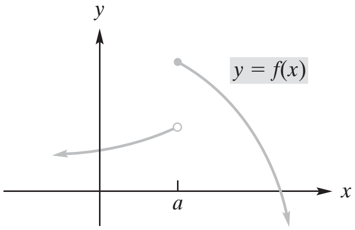


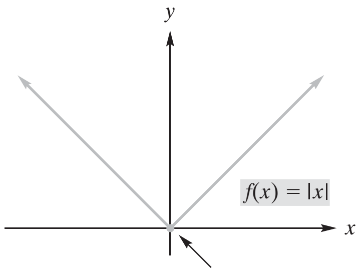
FIGURA 7.9 f no es continua en a, entonces f no es diferenciable en a.

EJEMPLO 7 Continuidad y diferenciabilidad

a. Sea $f(x) = x^2$. La derivada, $2x$, está definida para todos los valores de x, de manera que $f(x) = x^2$ debe ser continua para todos los valores de x.

b. La función $f(p) = \dfrac{1}{2p}$ no es continua en $p = 0$ porque f no está definida ahí. Así que la derivada no existe en $p = 0$.

◁



Continua en $x = 0$, pero no diferenciable en $x = 0$

FIGURA 7.10 La continuidad no implica diferenciabilidad.

La inversión del enunciado de que la diferenciabilidad implica continuidad es *falsa*. Es decir, la continuidad no implica diferenciabilidad. En el ejemplo 8 se verá una función que es continua en un punto, pero que no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 8 Continuidad no implica diferenciabilidad

La función $y = f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. (Vea la figura 7.10). Como se mencionó antes, no existe una recta tangente en $x = 0$. Por lo tanto, no existe derivada ahí. Esto muestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

◁

Por último, es importante hacer la observación de que mientras que la diferenciabilidad de f en a implica continuidad de f en a, la función derivada, f', no es necesariamente continua en a. Desafortunadamente, el ejemplo clásico está construido a partir de una función que no se considera en este libro.

PROBLEMAS 7.1

En los problemas 1 y 2, se da una función f y un punto P sobre su gráfica.

(a) *Encuentre la pendiente de la recta secante PQ para cada punto $Q = (x, f(x))$ cuyo valor x está dado en la tabla. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.*

(b) *Use sus resultados del inciso (a) para estimar la pendiente de la recta tangente en P.*

1. $f(x) = x^3 + 3, P = (-2, -5)$

Valor x de Q	-3	-2.5	-2.2	-2.1	-2.01	-2.001
m_{PQ}						

2. $f(x) = e^x, P = (0, 1)$

Valor x de Q	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
m_{PQ}						

En los problemas del 3 al 18, emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

3. $f'(x)$ si $f(x) = x$

4. $f'(x)$ si $f(x) = 4x - 1$

5. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 3x + 5$

6. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = -5x$

7. $\dfrac{d}{dx}(3 - 2x)$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

9. $f'(x)$ si $f(x) = 3$

10. $f'(x)$ si $f(x) = 7.01$

11. $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$

12. y' si $y = x^2 + 3x + 2$

13. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = 3q^2 + 2q + 1$

14. $\dfrac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$

15. y' si $y = \dfrac{6}{x}$

16. $\dfrac{dC}{dq}$ si $C = 7 + 2q - 3q^2$

17. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{2x}$

18. $H'(x)$ si $H(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

19. Encuentre la pendiente de la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-2, 8)$.

20. Encuentre la pendiente de la curva $y = 1 - x^2$ en el punto $(1, 0)$.

21. Encuentre la pendiente de la curva $y = 4x^2 - 5$ cuando $x = 0$.

22. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{2x}$ cuando $x = 18$.

En los problemas del 23 al 28, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

23. $y = x + 4; (3, 7)$

24. $y = 3x^2 - 4; (1, -1)$

25. $y = x^2 + 2x + 3; (1, 6)$

26. $y = (x - 7)^2; (6, 1)$

27. $y = \dfrac{4}{x + 1}; (3, 1)$

28. $y = \dfrac{5}{1 - 3x}; (2, -1)$

29. Bancos Algunas ecuaciones pueden incluir derivadas de funciones. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[1] resuelven la ecuación

$$r = \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)\left(r_L - \frac{dC}{dD}\right)$$

para η (letra griega "eta"). Aquí r es la tasa de depósito pagada por los bancos comerciales, r_L es la tasa ganada por estos bancos, C es el costo administrativo de transformar los depósitos en activos que pagan rendimiento, D es el nivel de los depósitos de ahorro y η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Encuentre η.

En los problemas 30 y 31, utilice la función "derivada numérica" de su calculadora gráfica para estimar las derivadas de las funciones en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

30. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x}; x = 1, x = 2$

31. $f(x) = e^x(4x - 7); x = 0, x = 1.5$

En los problemas 32 y 33, utilice el enfoque del "límite del cociente de diferencias" para estimar $f'(x)$ en los valores indicados de x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

32. $f(x) = x \ln x - x; x = 1, x = 10$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^3 - 3}; x = 2, x = -4$

---

[1] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research,* XX, núm. 1 (1984), pp. 39-49.

34. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x$ en el punto $(-2, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

35. La derivada de $f(x) = x^3 - x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Grafique f y su derivada f'. Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal. Para los valores x de esos puntos, ¿cuáles son los valores correspondientes de $f'(x)$? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes positivas en esos intervalos. Observe el intervalo donde $f'(x)$ es negativa. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes negativas en este intervalo.

En los problemas 36 y 37, verifique la identidad $(z - x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) = z^n - x^n$ *para los valores indicados de n y calcule la derivada usando la forma* $z \to x$ *de la definición de derivada que se dio en la ecuación (2).*

36. $n = 4, n = 3, n = 2;\quad f'(x)$ si $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2$

37. $n = 5, n = 3;\quad f'(x)$ si $f(x) = 4x^5 - 3x^3$

Objetivo

Desarrollar las reglas básicas para la diferenciación de funciones constantes y funciones de potencia, así como las reglas combinadas para diferenciar un múltiplo constante de una función y la suma de dos funciones.

7.2 Reglas para la diferenciación

La diferenciación de una función mediante el uso directo de la definición de la derivada puede ser tediosa. Sin embargo, si una función está construida a partir de funciones más simples, entonces la derivada de la función más complicada puede ser construida a partir de las derivadas de funciones más simples. En última instancia, solo es necesario conocer las derivadas de algunas funciones básicas y las maneras de ensamblar derivadas de funciones construidas a partir de las derivadas de sus componentes. Por ejemplo, si las funciones f y g tienen derivadas de f' y g', respectivamente, entonces $f + g$ tiene una derivada dada por $(f + g)' = f' + g'$. Sin embargo, algunas *reglas* son menos intuitivas. Por ejemplo, si $f \cdot g$ denota la función cuyo valor en x está dado por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. En este capítulo se estudia la mayoría de estas reglas de combinación y algunas reglas básicas para calcular derivadas de ciertas funciones básicas.

Primero se mostrará que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante $f(x) = c$ es una línea horizontal (vea la figura 7.11), la cual tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que $f'(x) = 0$, independientemente del valor de x. Como prueba formal de este resultado, se aplica la definición de la derivada a $f(x) = c$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

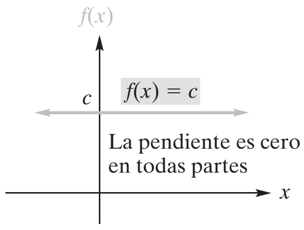


FIGURA 7.11 La pendiente de una función constante es 0.

De esta manera, se tiene la primera regla:

REGLA BÁSICA 0 Derivada de una constante

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

EJEMPLO 1 Derivadas de funciones constantes

a. $\dfrac{d}{dx}(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

b. Si $g(x) = \sqrt{5}$, entonces $g'(x) = 0$ porque g es una función constante. Por ejemplo, la derivada de g cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

c. Si $s(t) = (1\,938\,623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

La siguiente regla da una fórmula para la derivada de "x elevada a una potencia constante" —esto es, la derivada de $f(x) = x^a$, donde a es un número real arbitrario—. Una función que tenga esta forma se llama **función potencia**. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función potencia. Aunque la regla enunciada es válida para todo número real a, se establecerá solo para el caso en que a es un entero positivo, n. La regla es tan importante para el cálculo diferencial que justifica un desarrollo detallado —solo en el caso donde a es un entero positivo, n—. Ya sea que se use la forma $h \to 0$ de la definición de derivada o la forma $z \to x$, el cálculo de $\frac{dx^n}{dx}$ resulta muy instructivo y proporciona una buena práctica con la notación de suma (notación sigma), cuyo uso es más esencial en capítulos posteriores. Se proporciona un cálculo para cada posibilidad. Como veremos, para usar la forma $h \to 0$ de la ecuación 2 de la sección 7.1, es necesario expandir $(x+h)^n$, y para emplear la forma $z \to x$, debe factorizarse $z^n - x^n$.

Para la primera de estas opciones se recuerda el *teorema binomial*:

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i$$

donde las ${}_nC_i$ son los coeficientes binomiales, cuyas descripciones precisas, excepto para ${}_nC_0 = 1$ y ${}_nC_1 = n$, no son necesarias aquí. Para la segunda opción se tiene

$$(z-x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) = z^n - x^n$$

que se verifica de manera sencilla realizando la multiplicación y usando las reglas que se dieron en la sección 1.5 para manipular notaciones de suma. De hecho, se tiene

$$\begin{aligned}(z-x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) &= z\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} - x\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} z^{n-1-i}\\ &= \left(z^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^i z^{n-i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-2} x^{i+1} z^{n-1-i} + x^n\right)\\ &= z^n - x^n\end{aligned}$$

donde se deja al lector la verificación de que las notaciones de suma desde el segundo hasta el último renglón realmente se cancelan como se muestra.

REGLA BÁSICA 1 Derivada de x^a

Si a es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

Esto es, la derivada de una potencia constante de x es igual al exponente multiplicado por x elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

¡ADVERTENCIA!

En el cálculo, existe mucho más que esta regla.

Para una n que es un entero positivo, si $f(x) = x^n$, la definición de la derivada da

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

De acuerdo con el desarrollo anterior de $(x+h)^n$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i - x^n}{h}\\ &\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i}{h}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i}h^{i-1}}{h} \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i}h^{i-1} \\
&\overset{(4)}{=} \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} {}_nC_i x^{n-i}h^{i-1} \right) \\
&\overset{(5)}{=} nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

donde los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

(1) En la notación de suma, el término $i = 0$ es ${}_nC_0 x^n h^0 = x^n$, de manera que se cancela con el último término separado: $-x^n$.
(2) Es posible extraer un factor común de h a partir de cada término de la suma.
(3) Este es el paso crucial. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites, cuando $h \to 0$, de funciones de h que son iguales para $h \neq 0$.
(4) En la notación de suma, el término $i = 1$ es ${}_nC_1 x^{n-1}h^0 = nx^{n-1}$. Es el único que no contiene un factor de h y se separa de los otros términos.
(5) Por último, en la determinación del límite se utiliza el hecho de que el término aislado es independiente de h; mientras que los otros términos contienen a h como un factor y, por lo tanto, tienen límite igual a 0 cuando $h \to 0$.

Ahora, usando el límite $z \to x$ para la definición de la derivada y $f(x) = x^n$, se tiene

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h\to 0} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$

Por el estudio previo sobre la factorización de $z^n - x^n$, se tiene

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{(z - x)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right)}{z - x} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{z\to x} \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^{n-1-i} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1} \\
&\overset{(4)}{=} nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

donde, ahora, los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

(1) Aquí, el paso crucial se da primero. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites cuando $z \to x$ de funciones de z que son iguales para $z \neq x$.
(2) El límite se da por evaluación porque la expresión es un polinomio en la variable z.
(3) Se emplea una regla obvia de los exponentes.
(4) Cada término de la suma es x^{n-1}, independiente de i, y hay n de esos términos.

EJEMPLO 2 Derivadas de potencias de x

a. Según la regla básica 1, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

b. Si $F(x) = x = x^1$, entonces $F'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Así, la derivada de x con respecto a x es 1.

c. Si $f(x) = x^{-10}$, entonces $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Cuando se aplica una regla de diferenciación a una función, algunas veces, la función debe reescribirse primero de manera que tenga la forma apropiada para esa regla. Por ejemplo, para diferenciar $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$ primero debe escribirse f como $f(x) = x^{-10}$ y luego proceder como en el ejemplo 2(c).

EJEMPLO 3 Reescribir funciones en la forma x^a

a. Para diferenciar $y = \sqrt{x}$, se escribe $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

la cual coincide con el cálculo del límite del ejemplo 5 visto en la sección 5.1.

b. Sea $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Para aplicar la regla básica 1, debe reescribirse $h(x)$ como $h(x) = x^{-3/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Se tiene

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$$

¡ADVERTENCIA!

En el ejemplo 3(b), no reescriba $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ y después solo derive el denominador.

Ahora resuelva el problema 39 ◁

Ahora que puede decirse inmediatamente que la derivada de x^3 es $3x^2$, surge la pregunta de qué hacer con la derivada de un *múltiplo* de x^3, como $5x^3$. La siguiente regla trata sobre la diferenciación de una constante por una función.

REGLA COMBINADA 1 Regla del factor constante

Si f es una función diferenciable y c una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración. Si $g(x) = cf(x)$, al aplicar la definición de la derivada de g se obtiene

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = c \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Pero $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es $f'(x)$; por lo que $g'(x) = cf'(x)$.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una constante por una función

Diferencie las siguientes funciones.

a. $g(x) = 5x^3$

Solución: Aquí g es una constante (5) por una función (x^3). Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5x^3) &= 5\frac{d}{dx}(x^3) && \text{Regla combinada 1} \\ &= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 && \text{Regla básica 1} \end{aligned}$$

b. $f(q) = \dfrac{13q}{5}$

Solución:

Estrategia Primero se reescribe f como una constante por una función y después se aplica la regla básica 1.

Como $\dfrac{13q}{5} = \dfrac{13}{5}q$, f es la constante $\dfrac{13}{5}$ por la función q. Así,

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) && \text{Regla combinada 1} \\ &= \frac{13}{5}\cdot 1 = \frac{13}{5} && \text{Regla básica 1} \end{aligned}$$

c. $y = \dfrac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$

Solución: y puede expresarse como una constante por una función:

$$y = 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.25x^{-2/5}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} y' &= 0.25\frac{d}{dx}(x^{-2/5}) && \text{Regla combinada 1} \\ &= 0.25\left(-\frac{2}{5}x^{-7/5}\right) = -0.1x^{-7/5} && \text{Regla básica 1} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

¡ADVERTENCIA!

Para diferenciar $f(x) = (4x)^3$, la regla básica 1 no se puede aplicar de manera directa. Se aplica a una potencia de la variable x, *no* a una potencia de una expresión que incluya a x, como $4x$. Para aplicar estas reglas, se escribe $f(x) = (4x)^3 = 4^3x^3 = 64x^3$. Así,

$$f'(x) = 64\frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2.$$

La regla siguiente se refiere a la derivada de sumas y diferencias de funciones.

REGLA COMBINADA 2 Regla de una suma o una diferencia

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

Demostración. Para el caso de una suma, si $F(x) = f(x) + g(x)$, al aplicar la definición de la derivada de F se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \qquad \text{reagrupación}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Pero estos dos límites son $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La demostración para la derivada de una diferencia de dos funciones es similar.

La regla combinada 2 puede extenderse a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x)$$

APLÍQUELO ▶

2. Si la función de ingreso para cierto producto es $r(q) = 50q - 0.3q^2$, determine la derivada de esta función, también conocida como ingreso marginal.

EJEMPLO 5 Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Diferencie las siguientes funciones.

a. $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$

Solución: Aquí F es la suma de las dos funciones $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) && \text{Regla combinada 2} \\ &= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) && \text{Regla combinada 1} \\ &= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} && \text{Regla básica 1} \end{aligned}$$

b. $f(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{5}{z^{1/3}}$

Solución: Para aplicar las reglas, se reescribe $f(z)$ en la forma $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$. Como f es la diferencia de dos funciones,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) && \text{Regla combinada 2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) && \text{Regla combinada 1} \\ &= \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right) && \text{Regla básica 1} \\ &= z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3} \end{aligned}$$

c. $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8) \\ &= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8) \\ &= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0 \\ &= 18x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 47 ◁

En los ejemplos 6 y 7 es necesario reescribir la función dada de una forma en la que se apliquen las reglas de diferenciación.

EJEMPLO 6 Determinación de una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ cuando $x = 2$.

Solución: Se multiplica y después se diferencia cada término:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 10x^2 + 4x \\ f'(x) &= 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1) \\ &= 6x^2 - 20x + 4 \\ f'(2) &= 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 75 ◁

EJEMPLO 7 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia Primero se encuentra $\frac{dy}{dx}$, que da la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Al evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$, se obtiene la pendiente de la recta tangente requerida. Después se determina la coordenada y del punto sobre la curva cuando $x = 1$. Por último, se sustituyen la pendiente y ambas coordenadas del punto en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Si se reescribe y como una diferencia de dos funciones, se tiene

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2((-1)x^{-2}) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5$$

Para encontrar la coordenada y del punto sobre la curva en $x = 1$, se evalúa $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$ en $x = 1$. Esto da como resultado

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1$$

¡ADVERTENCIA!

Para obtener el valor de y del punto sobre la curva cuando $x = 1$, se evalúa la función *original* en $x = 1$.

De modo que el punto (1, 1) está tanto sobre la curva como sobre la recta tangente. Entonces, una ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1)$$

En la forma pendiente-intersección, se tiene

$$y = 5x - 4$$

Ahora resuelva el problema 81 ◁

PROBLEMAS 7.2

En los problemas del 1 al 74, diferencie las funciones.

1. $f(x) = \pi$

2. $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^{2/3}$

3. $y = x^6$

4. $f(x) = x^{21}$

5. $y = x^{80}$

6. $y = x^{2.1}$

7. $f(x) = 9x^2$

8. $y = 4x^3$

9. $g(w) = 8w^7$

10. $v(x) = x^e$

11. $y = \frac{3}{5}x^6$

12. $f(p) = \sqrt{3}p^4$

13. $f(t) = \dfrac{t^7}{25}$

14. $y = \dfrac{x^7}{7}$

15. $f(x) = x + 3$

16. $f(x) = 5x - e$

17. $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

18. $F(x) = 5x^2 - 9x$

19. $g(p) = p^4 - 3p^3 - 1$

20. $f(t) = -13t^2 + 14t + 1$

21. $y = x^4 - \sqrt[3]{x}$

22. $y = -8x^4 + \ln 2$

23. $y = -13x^3 + 14x^2 - 2x + 3$

24. $V(r) = r^8 - 7r^6 + 3r^2 + 1$

25. $f(x) = 2(13 - x^4)$

26. $\psi(t) = e(t^7 - 5^3)$

27. $g(x) = \dfrac{13 - x^4}{3}$

28. $f(x) = \dfrac{5(x^4 - 6)}{2}$

29. $h(x) = 4x^4 + x^3 - \dfrac{9x^2}{2} + 8x$

30. $k(x) = -2x^2 + \dfrac{5}{3}x + 11$

31. $f(x) = \dfrac{5}{7}x^9 + \dfrac{3}{5}x^7$

32. $p(x) = \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{2x}{3}$

33. $f(x) = x^{3/5}$

34. $f(x) = 2x^{-14/5}$

35. $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$

36. $y = 4x^2 - x^{-3/5}$

37. $y = 11\sqrt{x}$

38. $y = \sqrt{x^7}$

39. $f(r) = 6\sqrt[3]{r}$

40. $y = 4\sqrt[8]{x^2}$

41. $f(x) = x^{-6}$

42. $f(s) = 2s^{-3}$

43. $f(x) = x^{-3} + x^{-5} - 2x^{-6}$

44. $f(x) = 100x^{-3} + 10x^{1/2}$

45. $y = \dfrac{1}{x}$

46. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$

47. $y = \dfrac{8}{x^5}$

48. $y = \dfrac{1}{4x^5}$

49. $g(x) = \dfrac{4}{3x^3}$

50. $y = \dfrac{1}{x^2}$

51. $f(t) = \dfrac{3}{5t^3}$

52. $g(x) = \dfrac{7}{9x}$

53. $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{7}{x}$

54. $\Phi(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{x^3}$

55. $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$

56. $f(z) = 5z^{3/4} - 6^2 - 8z^{1/4}$

57. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8x^2}}$

58. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$

59. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

60. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

61. $y = x^3\sqrt[3]{x}$

62. $f(x) = (2x^3)(4x^2)$

63. $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$

64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$

65. $f(x) = x^3(3x)^2$

66. $s(x) = \sqrt{x}(\sqrt[5]{x} + 7x + 2)$

67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$

68. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 11)$

69. $f(q) = \dfrac{3q^2 + 4q - 2}{q}$

70. $f(w) = \dfrac{w - 5}{w^5}$

71. $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

72. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$

73. $w(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{x^2}$

74. $f(x) = \dfrac{7x^3 + x}{6\sqrt{x}}$

Para cada curva descrita en los problemas del 75 al 78, encuentre las pendientes en los puntos indicados.

75. $y = 3x^2 + 4x - 8; (0, -8), (2, 12), (-3, 7)$

76. $y = 3 + 5x - 3x^3; (0, 3), (\frac{1}{2}, \frac{41}{8}), (2, -11)$

77. $y = 4$; cuando $x = -4, x = 7, x = 22$

78. $y = 3x - 4\sqrt{x}$; cuando $x = 4, x = 9, x = 25$

En los problemas del 79 al 82, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

79. $y = 4x^2 + 5x + 6; (1, 15)$

80. $y = \dfrac{1 - x^2}{5}; (4, -3)$

81. $y = \dfrac{1}{x^2}; (2, \frac{1}{4})$

82. $y = -\sqrt[3]{x}; (8, -2)$

83. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$$

cuando $x = 0$.

84. Repita el problema 83 para la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$$

cuando $x = 4$.

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$$

en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva

$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} + 1$$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = x^2 - 5x + 3$$

en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva

$$y = x^4 - 31x + 11$$

89. Si $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, evalúe la expresión

$$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x)$$

90. Economía Eswaran y Kotwal[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales se contratan por día y realizan trabajos menores y rutinarios como deshierbado, recolección y trillado. La diferencia z en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right]$$

Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 2x + 1$ en el punto $(1, 0)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla.

92. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ en el punto $(-8, -2)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(-8, -2)$ y parece ser tangente a la curva.

Objetivo

Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal" que se utiliza con frecuencia en administración y economía.

7.3 La derivada como una razón de cambio

Se ha dado una interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación importante de la derivada implica el movimiento de un objeto que viaja en línea recta. Esto proporciona una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio*.

Para denotar el cambio en una variable como x, comúnmente se usa el símbolo x (se lee "delta x"). Por ejemplo, si x cambia de 1 a 3, entonces el cambio en x es $x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de $x(= 3)$ es el valor previo más el cambio, que es $1 + x$. De manera similar, si t se incrementa en t, el nuevo valor es $t + t$. Se usará la notación en el análisis siguiente.

Suponga que un objeto se desplaza a lo largo de la recta numérica de la figura 7.12 de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2$$

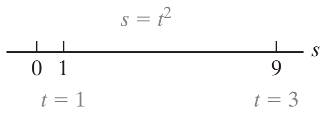


FIGURA 7.12 Movimiento a lo largo de una recta numérica.

donde s es la posición del objeto en el tiempo t. Esta ecuación se llama **ecuación de movimiento** y f se denomina ***función de posición***. Suponga que t está en segundos y s en metros. En $t = 1$, la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento*, de $9 - 1 = 8$ metros y la *velocidad promedio* del objeto se define como

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}} \tag{1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s desde $t = 1$ hasta $t = 3$ significa que, *en promedio*, la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean s y t los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{para el intervalo de } t = 1 \text{ a } t = 3)$$

La razón s/ t se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a** t en el intervalo de $t = 1$ a $t = 3$.

Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo es de solo 1 segundo (esto es, $t = 1$). Entonces, para el intervalo *más corto* de $t = 1$ a $t = 1 + t = 2$, se tiene $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}$$

---

[2] M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review,* 75, núm. 1 (1985), pp. 162-177.

Tabla 7.2

Duración del intervalo Δt	Intervalo de tiempo $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$	Velocidad promedio $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

De manera más general, en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \;\; t$, el objeto se desplaza a partir de la posición $f(1)$ hasta la posición $f(1 + \;\; t)$. Entonces, su desplazamiento es

$$s = f(1 + \;\; t) - f(1)$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración $\;\; t$, la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Si $\;\; t$ se volviera cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \;\; t$ sería cercana a lo que podría llamarse *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$; esto es, la velocidad registrada en un *punto* en el tiempo ($t = 1$), en oposición a la velocidad registrada en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de $\;\; t$ entre 0.1 y 0.001, se obtuvieron las velocidades promedio mostradas en la tabla 7.2, las cuales usted puede verificar.

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a 0, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando $\;\; t$ tiende a 0, $\;\; s/\;\; t$ se aproxima 2 m/s. El límite de la velocidad promedio, cuando $\;\; t \to 0$, se define como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. A este límite se le llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Si se piensa en $\;\; t$ como h, entonces el límite a la derecha es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Así, la velocidad instantánea del objeto en $t = 1$ es justo ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s}$$

lo cual confirma la conclusión previa.

En resumen, si $s = f(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, entonces la velocidad promedio del objeto en el intervalo de tiempo $[t, t + \;\; t]$ está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta\ t) - f(t)}{\Delta t}$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

En forma selectiva, al combinar las ecuaciones para v, se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

que proporciona la explicación para la notación de Leibniz, la cual sin esta justificación podría parecer extraña. (Después de todo, es la letra griega [mayúscula] correspondiente a d).

EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio y la velocidad

Suponga que la función de posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta numérica está dada por $s = f(t) = 3t^2 + 5$, donde t está en segundos y s en metros.

a. Encuentre la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1].
b. Encuentre la velocidad cuando $t = 10$.

Solución:

a. Aquí $t = 10$ y $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$. Se tiene

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10+0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b. La velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t$$

Cuando $t = 10$, la velocidad es

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=10} = 6(10) = 60 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1] es cercana a la velocidad en $t = 10$. Esto era de esperarse porque la duración del intervalo es pequeña.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

El análisis de la razón de cambio de s con respecto a t se aplica a *cualquier* función $y = f(x)$. Así, puede enunciarse lo siguiente:

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \left\{\begin{array}{l}\text{tasa promedio de cambio}\\ \text{de } y \text{ con respecto a } x\\ \text{en el intervalo de}\\ x \text{ a } x + \Delta x\end{array}\right.$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left\{\begin{array}{l}\text{tasa instantánea de cambio}\\ \text{de } y \text{ con respecto a } x.\end{array}\right. \tag{2}$$

Como la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ en un punto es una derivada, es también *la pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$ en ese punto. Por conveniencia, a la razón de cambio instantánea se le llama simplemente **razón de cambio**. La interpretación de una derivada como una razón de cambio es extremadamente importante.

Ahora se interpretará el significado de la razón de cambio de y con respecto a x. A partir de la ecuación (2), si x (un cambio en x) es cercano a 0, entonces y/x está próximo a dy/dx. Esto es,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x \qquad (3)$$

Es decir, si x cambia en x, entonces el cambio en y, y, es aproximadamente dy/dx por el cambio en x. En particular,

si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es $\dfrac{dy}{dx}$

APLÍQUELO ▶

3. Suponga que la utilidad de P, obtenida mediante la venta de cierto producto a un precio p por unidad, está dada por $P = f(p)$ y la tasa de cambio de esa utilidad con respecto al cambio en el precio es $\dfrac{dP}{dp} = 5$ en $p = 25$. Estime el cambio en la utilidad P si el precio cambia de 25 a 25.5.

EJEMPLO 2 Estimación de y mediante el uso de dy/dx

Suponga que $y = f(x)$ y $\dfrac{dy}{dx} = 8$ cuando $x = 3$. Estime el cambio en y si x cambia de 3 a 3.5.

Solución: Se tiene $dy/dx = 8$ y $x = 3.5 - 3 = 0.5$. El cambio en y está dado por y y, a partir de la ecuación (3),

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4$$

Se destaca que, como $y = f(3.5) - f(3)$, se tiene $f(3.5) = f(3) +$ y. Por ejemplo, si $f(3) = 5$, entonces $f(3.5)$ puede estimarse como $5 + 4 = 9$.

◁

APLÍQUELO ▶

4. La posición de un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad de 16 pies/seg desde una altura de 0 pies está dada por $y(t) = 16t - 16t^2$. Determine la tasa de cambio de y con respecto a t y evalúela cuando $t = 0.5$. Utilice su calculadora gráfica para graficar $y(t)$. Emplee la gráfica para interpretar el comportamiento del objeto cuando $t = 0.5$.

EJEMPLO 3 Determinación de una razón de cambio

Encuentre la razón de cambio de $y = x^4$ con respecto a x y evalúela cuando $x = 2$ y cuando $x = -1$. Interprete los resultados.

Solución: La razón de cambio es

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

Cuando $x = 2$, $dy/dx = 4(2)^3 = 32$. Esto significa que si x aumenta a partir de 2 en una cantidad pequeña, entonces y aumenta aproximadamente 32 veces esa cantidad. O en forma más sencilla, se dice que cuando $x = 2$, y está creciendo 32 veces más rápido que x. Cuando $x = -1$, $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$. El significado del signo menos en -4 es que, cuando $x = -1$, y está *decreciendo* a un ritmo 4 veces más rápido que el aumento de x.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 4 Razón de cambio del precio con respecto a la cantidad

Sea $p = 100 — q^2$ la función de demanda del producto de un fabricante. Encuentre la razón de cambio del precio p por unidad con respecto a la cantidad q. ¿Qué tan rápido está cambiando el precio con respecto a q cuando $q = 5$?

Solución: La razón de cambio de p con respecto a q es

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q$$

Así,

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=5} = -2(5) = -10$$

Esto significa que cuando se demandan 5 unidades, un *incremento* de una unidad extra demandada corresponde a una disminución de aproximadamente 10 dólares en el precio por unidad que los consumidores están dispuestos a pagar.

◁

EJEMPLO 5 Razón de cambio de volumen

Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la razón de cambio de su volumen con respecto a su radio. Evalúe esta razón de cambio cuando el radio es de 2 pies.

Solución: La fórmula para calcular el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. La razón de cambio de V con respecto a r es

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$$

Cuando $r = 2$ pies, la razón de cambio es

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2} = 4\pi(2)^2 = 16\pi\frac{\text{pie}^3}{\text{pie}}$$

Esto significa que cuando el radio es de 2 pies, al cambiar el radio en 1 pie, el volumen cambiará aproximadamente en 16π pies^3.

◁

EJEMPLO 6 Razón de cambio de inscripciones

Un sociólogo estudia varios programas que pueden ayudar en la educación de niños de edad preescolar en cierta ciudad. El sociólogo cree que x años después de iniciado un programa particular, $f(x)$ miles de niños estarán inscritos, donde

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2) \quad 0 \le x \le 12$$

¿Cuál es la razón a la que cambiaría la matrícula (a) después de tres años de iniciado el programa y (b) después de nueve años?

Solución: La razón de cambio de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x)$$

a. Después de tres años, la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}(12 - 2(3)) = \frac{10}{9} \cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones estarían creciendo a razón de $6\frac{2}{3}$ mil niños por año.

b. Después de nueve años, la razón de cambio es

$$f'(9) = \frac{10}{9}(12 - 2(9)) = \frac{10}{9}(-6) = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones estarían *decreciendo* a razón de $6\frac{2}{3}$ mil niños por año.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, proporciona el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde c está en dólares y q en libras. Entonces.

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq, evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Es decir, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, *se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.* Después de todo, la diferencia $f(q + 1) - f(q)$ puede verse como un cociente de diferencias

$$\frac{f(q+1) - f(q)}{1}$$

(el caso donde $h = 1$). Cualquier cociente de diferencias puede verse como una aproximación de la derivada correspondiente y, de manera inversa, cualquier derivada puede considerarse como una aproximación de cualquiera de sus cocientes de diferencias correspondientes. Así, para cualquier función f de q siempre se puede ver a $f'(q)$ y $f(q+1) - f(q)$ como aproximaciones una de la otra. En economía, esto último puede verse como el valor exacto del costo —o de la utilidad, dependiendo de la función— del $(q + 1)$-ésimo artículo cuando se produce q. Con frecuencia, la derivada es más fácil de calcular que el valor exacto. [En el caso estudiado aquí, el costo real de producir una libra después de 4 lb es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$].

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo promedio por unidad** $\overline{c}$ es

$$\overline{c} = \frac{c}{q} \tag{4}$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es de \$100, entonces el costo promedio por unidad es $\overline{c} = 100/20 = \$5$. Multiplicando ambos lados de la ecuación (4) por q se obtiene,

$$c = q\overline{c}$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicado por el costo promedio unitario.

EJEMPLO 7 Costo marginal

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\overline{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución:

Estrategia: La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c. Por lo que primero se encuentra c multiplicando $\overline{c}$ por q. Se tiene

$$\begin{aligned} c &= q\overline{c} \\ &= q\left(0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right) \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000 \end{aligned}$$

Al diferenciar c, se obtiene la función de costo marginal:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dq} &= 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0\\ &= 0.0003q^2 - 0.04q + 5\end{aligned}$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75$$

Si la producción se incrementa en 1 unidad, digamos de $q = 50$ a $q = 51$, entonces el costo c de la unidad adicional es aproximadamente de \$3.75. Si la producción se incrementa en $\frac{1}{3}$ de unidad a partir de $q = 50$, el costo de la producción adicional es aproximadamente de $\left(\frac{1}{3}\right)(3.75) = \$1.25$.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

Suponga que $r = f(q)$ es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor monetario total recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que cambia el ingreso con respecto a las unidades vendidas. Se interpreta como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Suponga que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que se esperaría, puesto que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

Ahora resuelva el problema 23 ◁

Razones de cambio relativa y porcentual

Para la función de ingreso total del ejemplo 8, a saber, $r = f(q) = 2q$, se tiene

$$\frac{dr}{dq} = 2$$

Esto significa que el ingreso está cambiando a razón de \$2 por unidad, sin importar el número de unidades vendidas. Aunque ésta es una información valiosa, puede ser más significativa cuando se compara con la propia r. Por ejemplo, si $q = 50$, entonces $r = 2(50) = 100$. Así, la razón de cambio del ingreso es $2/100 = 0.02$ *de* r. Por otra parte, si $q = 5000$, entonces $r = 2(5000) = \$10\,000$, de modo que la razón de cambio de r es $2/10\,000 = 0.0002$ *de* r.

Aunque r cambia a la misma razón en cada nivel, al compararla con la propia r, esta razón es relativamente menor cuando $r = 10\,000$ que cuando $r = 100$. Considerando el cociente

$$\frac{dr/dq}{r}$$

se tiene un medio de comparar la razón de cambio de r con la propia r. Esta razón se llama *razón de cambio relativa* de r. Ya vimos que la razón de cambio relativa cuando $q = 50$ es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02$$

y cuando $q = 5000$, es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10\,000} = 0.0002$$

Al multiplicar las razones relativas por 100% se obtienen las *razones de cambio porcentuales.* La razón de cambio porcentual cuando $q = 50$ es $(0.02)(100\%) = 2\%$; cuando $q = 5000$, es $(0.0002)(100\%) = 0.02\%$. Así, por ejemplo, si se vende una unidad adicional a 50, el ingreso aumenta aproximadamente en 2 por ciento.

En general, para cualquier función f, se tiene la siguiente definición:

¡ADVERTENCIA!

Los porcentajes pueden ser confusos. Recuerde que *porcentaje* significa "por cien". Entonces $100\% = \frac{100}{100} = 1$, $2\% = \frac{2}{100} = 0.02$, etcétera.

Definición

La ***razón de cambio relativa*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

La ***razón de cambio porcentual*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\%$$

APLÍQUELO ▶

5. El volumen V de un contenedor en forma de cápsula con altura cilíndrica de 4 pies y radio r está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2$$

Determine las tasas de cambio relativa y porcentual del volumen con respecto al radio cuando el radio es de 2 pies.

EJEMPLO 9 Razones de cambio relativa y porcentual

Determine las razones de cambio relativa y porcentual de

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$$

cuando $x = 5$.

Solución: Aquí

$$f'(x) = 6x - 5$$

Como $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$ y $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$, la razón de cambio relativa de y cuando $x = 5$ es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333$$

Al multiplicar 0.333 por 100% se obtiene la razón de cambio porcentual: $(0.333)(100\%) = 33.3$ por ciento.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 7.3

1. Suponga que la función de posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta es $s = f(t) = 2t^2 + 3t$, donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad promedio $s/\ t$ para el intervalo $[1, 1 +\ t]$, donde t está dado en la tabla siguiente:

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$						

Con base en sus resultados, estime la velocidad cuando $t = 1$. Verifique sus cálculos usando diferenciación.

2. Si $y = f(x) = \sqrt{2x + 5}$, encuentre la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[3, 3 + x]$, donde x está dado en la tabla siguiente:

Δx	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y/\Delta x$						

Con base en sus resultados, estime la razón de cambio de y con respecto a x cuando $x = 3$.

En cada uno de los problemas del 3 al 8, se da una función de posición, donde t está en segundos y s en metros.

(a) *Encuentre la posición en el valor dado de t.*
(b) *Encuentre la velocidad promedio para el intervalo dado.*
(c) *Encuentre la velocidad en el valor dado de t.*

3. $s = 2t^2 - 4t; [7, 7.5]; t = 7$

4. $s = \frac{1}{2}t + 1; [2, 2.1]; t = 2$

5. $s = 5t^3 + 3t + 24;\ [1, 1.01];\ t = 1$

6. $s = -3t^2 + 2t + 1; [1, 1.25]; t = 1$

7. $s = t^4 - 2t^3 + t; [2, 2.1]; t = 2$

8. $s = 3t^4 - t^{7/2}; [0, \frac{1}{4}]; t = 0$

9. Ingreso-educación Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Encontraron que una persona con x años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio y anual, donde

$$y = 5x^{5/2} + 5900 \qquad 4 \leq x \leq 16$$

Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

10. Encuentre la razón de cambio del volumen V de una pelota, con respecto a su radio r, cuando $r = 1.5$ m. El volumen V de una pelota como una función de su radio r está dado por

$$V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

11. Temperatura de la piel La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del medio ambiente está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20)$$

donde T y T_e están en grados Celsius.[3] Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_e.

12. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.3 \times 10^{-4}$ centímetros.

En los problemas del 13 al 18 se dan funciones de costo, donde c es el costo de producir q unidades de cierto artículo. Para cada caso, encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?

13. $c = 500 + 10q; q = 100$

14. $c = 5000 + 6q; q = 36$

15. $c = 0.2q^2 + 4q + 50;\ q = 10$

16. $c = 0.1q^2 + 3q + 2; q = 3$

17. $c = q^2 + 50q + 1000; q = 15, q = 16, q = 17$

18. $c = 0.04q^3 - 0.5q^2 + 4.4q + 7500; q = 5, q = 25, q = 1000$

En los problemas del 19 al 22, $\bar{c}$ representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q.

19. $\bar{c} = 0.01q + 5 + \dfrac{500}{q}; q = 50, q = 100$

20. $\bar{c} = 5 + \dfrac{2000}{q}; q = 25, q = 250$

21. $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \dfrac{20\,000}{q}; q = 100, q = 500$

22. $\bar{c} = 0.002q^2 - 0.5q + 60 + \dfrac{7000}{q}; q = 15, q = 25$

En los problemas del 23 al 26, r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

23. $r = 0.8q; q = 9, q = 300, q = 500$

24. $r = q\left(15 - \frac{1}{30}q\right); q = 5, q = 15, q = 150$

25. $r = 240q + 40q^2 - 2q^3;\ q = 10;\ q = 15;\ q = 20$

26. $r = 2q(30 - 0.1q); q = 10, q = 20$

27. Fábrica de calcetas La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean[4] como

$$c = -10\,484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$$

donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 2000$.

28. Planta de luz y energía La función de costo total para una planta de luz y energía eléctrica es estimada por Nordin[5] como

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3 \qquad 20 \leq q \leq 90$$

donde q es la producción total en ocho horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo monetario total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

29. Concentración urbana Suponga que las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (área de cada ciudad). Según Lotka,[6] la siguiente relación se cumple de manera aproximada:

$$PR^{0.93} = 5\,000\,000$$

Aquí, P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Despeje P en términos de R y luego encuentre qué tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

30. Depreciación Según el método de depreciación lineal, el valor v de cierta máquina después de t años está dado por

$$v = 120\,000 - 15\,500t$$

donde $0 \leq t \leq 6$. ¿Qué tan rápido cambia v con respecto a t cuando $t = 2$?, ¿cuando $t = 4$?, ¿en cualquier momento?

---

[3] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[4] J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

[5] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves". *Econometrica*, 15 (1947), pp. 231-235.

[6] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

31. Polilla de invierno En Nueva Escocia se realizó un estudio sobre la polilla de invierno (adaptado de Embree).[7] Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huésped. A una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2 \quad 1 \leq x \leq 9$$

(a) ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?
(b) ¿Para qué valor de x disminuye la densidad de larvas a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

32. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.4q^2 + 4q + 5$$

encuentre la razón de cambio de c con respecto a q cuando $q = 2$. Además, ¿qué valor tiene $c/\ q$ en el intervalo [2, 3]?

En los problemas del 33 al 38, encuentre **(a)** *la razón de cambio y con respecto a x y* **(*b*)** *la razón de cambio relativa de y. En el valor dado de x, encuentre* **(c)** *la razón de cambio de y,* **(d)** *la razón de cambio relativa de y y* **(e)** *la razón de cambio porcentual de y.*

33. $y = f(x) = x + 4; x = 5$

34. $y = f(x) = 7 - 3x; x = 6$

35. $y = 2x^2 + 5; x = 10$

36. $y = 5 - 3x^3; x = 1$

37. $y = 8 - x^3; x = 1$

38. $y = x^2 + 3x - 4; x = -1$

39. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$$

¿qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando $q = 10$? Determine la razón de cambio porcentual de c con respecto a q cuando $q = 10$.

40. Materia orgánica/diversidad de especies En un estudio reciente sobre las aguas de mares poco profundos, Odum[8] afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por cada mil individuos). Si $y = 100/x$, ¿con qué rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$? ¿Cuál es la razón de cambio porcentual cuando $x = 10$?

41. Ingreso Para cierto fabricante, el ingreso obtenido al vender q unidades de un producto está dado por

$$r = 30q - 0.3q^2$$

(a) ¿Qué tan rápido cambia r con respecto a q? Cuando $q = 10$, **(b)** encuentre la razón de cambio relativo de r y **(c)** encuentre la razón de cambio porcentual de r, redondeada al punto porcentual más cercano.

42. Ingreso Repita el problema 43 para la función de ingreso dada por $r = 10q - 0.2q^2$ y $q = 25$.

43. Peso de una rama El peso de la rama de un árbol está dado por $W = 2t^{0.432}$, donde t es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de W con respecto a t.

44. Respuesta a un choque eléctrico Se realizó un experimento[9] psicológico para analizar la respuesta humana a choques eléctricos (estímulos). Las personas recibieron descargas eléctricas de varias intensidades. La respuesta R a una descarga de intensidad I (en microamperes) debía ser un número que indicase la magnitud percibida con relación a la de una descarga "estándar". A la descarga estándar se le asignó una magnitud de 10. Dos grupos de personas fueron objeto del estudio bajo condiciones ligeramente diferentes. Las respuestas R_1 y R_2 de los grupos primero y segundo a una descarga de intensidad I estuvieron dadas por

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

(a) Para cada grupo, determine la razón de cambio relativa de la respuesta con respecto a la intensidad.
(b) ¿Cómo son esos cambios comparados entre sí?
(c) En general, si $f(x) = C_1x^n$ y $g(x) = C_2x^n$, donde C_1 y C_2 son constantes, ¿cómo son las razones de cambio relativas de f y g comparadas entre sí?

45. Costo Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de $200 y el costo marginal de $150. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

46. Costos marginal y promedio Suponga que la función de costo para cierto producto es $c = f(q)$. Si la razón de cambio relativa de c (con respecto a q) es $\frac{1}{q}$, demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 47 y 48, utilice la capacidad de su calculadora gráfica para derivar de manera numérica.

47. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$$

donde c representa el costo, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

48. La población de una ciudad dentro de t años está dada por

$$P = 250\,000e^{0.04t}$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de tres años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

Objetivo

Encontrar derivadas mediante la aplicación de las reglas del producto y del cociente y desarrollar los conceptos de propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

7.4 Regla del producto y regla del cociente

La ecuación $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ expresa $F(x)$ como un producto de dos funciones: $x^2 + 3x$ y $4x + 5$. Para encontrar $F'(x)$ usando solo las reglas previas, se multiplican primero

---

[7] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia. 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

[8] H. T. Odum, "Biological Circuits and the Marine System of Texas", en *Pollution and Marine Biology*, T. A. Olsen y F. J. Burgess, eds. (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).

[9] H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), pp. 39-49.

las funciones. Después se diferencia el resultado término por término:

$$F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5) = 4x^3 + 17x^2 + 15x$$

$$F'(x) = 12x^2 + 34x + 15 \tag{1}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera resulta práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto que evita tener que efectuar tales multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse en una regla similar para los productos. No obstante, la situación es bastante sutil.

REGLA COMBINADA 3 La regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda, más la primera función por la derivada de la segunda.

$$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = \begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la primera}\end{pmatrix}(\text{segunda}) + (\text{primera})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la segunda}\end{pmatrix}$$

Demostración. Si $F(x) = f(x)g(x)$, entonces, por la definición de la derivada de F,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

Ahora se emplea un “truco”. Sumando y restando $f(x)g(x+h)$ en el numerador, se tiene

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Reagrupando se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que f y g son diferenciables,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

La diferenciabilidad de g implica que g es continua, por lo que, con base en la sección 6.3,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

Entonces,

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Si $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$, encuentre $F'(x)$.

Solución: Se considerará a F como un producto de dos funciones:

$$F(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)}\underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$$

Por lo tanto, es posible aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 3x)}_{\substack{\text{Derivada de} \\ \text{la primera}}}\underbrace{(4x + 5)}_{\text{Segunda}} + \underbrace{(x^2 + 3x)}_{\text{Primera}}\underbrace{\frac{d}{dx}(4x + 5)}_{\substack{\text{Derivada de} \\ \text{la segunda}}} \\ &= (2x + 3)(4x + 5) + (x^2 + 3x)(4) \\ &= 12x^2 + 34x + 15 \qquad \text{simplificación} \end{aligned}$$

¡ADVERTENCIA!

Vale la pena repetir que la derivada del producto de dos funciones es algo sutil. Resista la tentación de intentar desarrollar una regla más simple.

Esto concuerda con nuestro resultado previo. [Vea la ecuación (1)]. Aunque aquí la regla del producto no parece tener mucha utilidad práctica, se verá que en ocasiones resulta impráctico evitarla.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

6. Un puesto de tacos vende, por lo general, 225 tacos por día a \$2 cada uno. La investigación de un estudiante de administración dice que por cada \$0.15 de disminución en el precio, el puesto vendería 20 tacos más por día. La función de ingreso para el puesto de tacos es $R(x) = (2 - 0.15x)(225 + 20x)$, donde x es el número de reducciones de \$0.15 en el precio. Encuentre $\dfrac{dR}{dx}$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Si $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, encuentre dy/dx.

Solución: Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3} + 5x) \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\left(\frac{-1}{3}x^{-4/3} + 5\right) \\ &= \frac{25}{3}x^{2/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15 \end{aligned}$$

De manera alternativa, se podría haber encontrado la derivada sin la regla del producto al determinar primero el producto $(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$ para después diferenciar el resultado término por término.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

EJEMPLO 3 Diferenciación de un producto de tres factores

Si $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$, encuentre y'.

Solución:

Estrategia Sería deseable utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica solo cuando se tienen *dos* factores. Considerando los primeros dos factores como uno solo, puede tratarse a y como un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4)$$

La regla del producto da

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)]\frac{d}{dx}(x + 4) \\ &= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)](1) \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la regla del producto, se tiene

$$y' = \left(\frac{d}{dx}(x+2)(x+3) + (x+2)\frac{d}{dx}(x+3)\right)(x+4) + (x+2)(x+3)$$
$$= [(1)(x+3) + (x+2)(1)](x+4) + (x+2)(x+3)$$

Después de simplificar, se obtiene

$$y' = 3x^2 + 18x + 26$$

Otras dos maneras de encontrar la derivada son:

1. Multiplicar los primeros dos factores de y para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x + 4)$$

y luego aplicar la regla del producto.

2. Multiplicar los tres factores para obtener

$$y = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$

y luego diferenciar término por término.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

En ocasiones resulta útil recordar las reglas de diferenciación con una notación más eficiente. Por ejemplo,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

es una igualdad de funciones correcta que expresa la regla del producto. Entonces, es posible calcular

$$\begin{aligned}(fgh)' &= ((fg)h)' \\ &= (fg)'h + (fg)h' \\ &= (f'g + fg')h + (fg)h' \\ &= f'gh + fg'h + fgh'\end{aligned}$$

No se sugiere que el estudiante trate de memorizar reglas de la derivada, tales como

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Dado que $f'g + fg' = gf' + fg'$, usando la conmutatividad del producto de funciones, se puede expresar la regla del producto con las derivadas como segundos factores:

$$(fg)' = gf' + fg'$$

y usando la conmutatividad de la suma

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Hay quien prefiere utilizar estas formas.

APLÍQUELO ▶

7. Una hora después de que a una persona se le dan x miligramos de cierto medicamento, el cambio en la temperatura del cuerpo, $T(x)$, en grados Fahrenheit, está dado de manera aproximada por $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. La razón a la cual cambia T con respecto al tamaño de la dosis x, $T'(x)$, se denomina *sensibilidad* del cuerpo a la dosis. Determine la sensibilidad cuando la dosis es de 1 miligramo. No utilice la regla del producto.

EJEMPLO 4 Uso de la regla del producto para encontrar la pendiente

Encuentre la pendiente de la gráfica de $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia La pendiente se encuentra al evaluar la derivada en $x = 1$. Como f es un producto de dos funciones, es posible encontrar la derivada usando la regla del producto.

Se tiene

$$f'(x) = (7x^3 - 5x + 2)\frac{d}{dx}(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\frac{d}{dx}(7x^3 - 5x + 2)$$
$$= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5)$$

Puesto que se debe calcular $f'(x)$ cuando $x = 1$, *no hay necesidad de simplificar $f'(x)$ antes de evaluarla.* Al sustituir en $f'(x)$, se obtiene

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176$$

Ahora resuelva el problema 49 ◁

La regla del producto (y la regla del cociente que se muestra enseguida) no debe aplicarse cuando esté disponible un método más directo y eficiente.

Por lo general, no se usa la regla del producto cuando es obvio que se puede aplicar un procedimiento más sencillo. Por ejemplo, si $f(x) = 2x(x + 3)$, entonces resulta más rápido escribir $f(x) = 2x^2 + 6x$, a partir de lo cual $f'(x) = 4x + 6$. De manera similar, no suele emplearse la regla del producto para diferenciar $y = 4(x^2 - 3)$. Como el 4 es un factor constante, según la regla del factor constante se sabe que $y' = 4(2x) = 8x$.

La regla siguiente se usa para diferenciar un *cociente* de dos funciones.

REGLA COMBINADA 4 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces el cociente f/g es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Con el entendimiento de que el denominador no debe ser 0, es posible escribir

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}(\text{cociente})$$
$$= \frac{(\text{denominador})\begin{pmatrix}\text{derivada}\\ \text{del numerador}\end{pmatrix} - (\text{numerador})\begin{pmatrix}\text{derivada}\\ \text{del denominador}\end{pmatrix}}{(\text{denominator})^2}$$

Demostración. Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$F(x)g(x) = f(x)$$

Por la regla del producto,

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x)$$

Al despejar $F'(x)$, se obtiene

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$$

Pero $F(x) = f(x)/g(x)$. Así,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

Al simplificar[10] se obtiene

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

¡ADVERTENCIA!

La derivada del cociente de dos funciones es aún más complicada que la regla del producto. Es necesario recordar dónde va el signo menos.

---

[10] La demostración dada supone la existencia de $F'(x)$. Sin embargo, esta regla puede demostrarse sin dicho supuesto.

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del cociente

Si $F(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x-1}$, encuentre $F'(x)$.

Solución:

Estrategia Se considera a F como un cociente y se aplica la regla del cociente.

Sea $f(x) = 4x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{\overbrace{(2x-1)}^{\text{Denominador}}\ \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^2+3)}^{\text{Derivada del denominador}} - \overbrace{(4x^2+3)}^{\text{Numerador}}\ \overbrace{\frac{d}{dx}(2x-1)}^{\text{Derivada del numerador}}}{\underbrace{(2x-1)^2}_{\text{Cuadrado del denominador}}}$$

$$= \frac{(2x-1)(8x) - (4x^2+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2}$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

EJEMPLO 6 Reescribir antes de diferenciar

Diferenciemos $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x+1}}$.

Solución:

Estrategia Para simplificar la diferenciación, se reescribirá la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

Se tiene

$$y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{x+1}} = \frac{1}{\dfrac{x(x+1)+1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x+1)(1) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \qquad \text{regla del cociente}$$

$$= \frac{(x^2+x+1) - (2x^2+3x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$$

Ahora resuelva el problema 45 ◁

Aunque una función puede tener la forma de un cociente, esto no implica necesariamente que se deba usar la regla del cociente para encontrar su derivada. El ejemplo siguiente ilustra algunas situaciones típicas donde, aunque puede emplearse la regla del cociente, se dispone de un procedimiento más sencillo y eficiente.

EJEMPLO 7 Diferenciación de cocientes sin usar la regla del cociente

Diferenciemos las funciones siguientes.

a. $f(x) = \dfrac{2x^3}{5}$

Solución: Se reescribe la función para tener $f(x) = \frac{2}{5}x^3$. Por la regla del factor constante,

$$f'(x) = \frac{2}{5}(3x^2) = \frac{6x^2}{5}$$

b. $f(x) = \dfrac{4}{7x^3}$

Solución: Se reescribe la función para tener $f(x) = \frac{4}{7}(x^{-3})$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{4}{7}(-3x^{-4}) = -\frac{12}{7x^4}$$

c. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{4x}$

Solución: Se reescribe la función y se tiene $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5x^2 - 3x}{x}\right) = \dfrac{1}{4}(5x-3)$ para $x \neq 0$. Por lo que,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4} \qquad \text{para } x \neq 0$$

Como la función f no está definida para $x = 0$, f' tampoco está definida para $x = 0$.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

¡ADVERTENCIA!

Para diferenciar $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, se podría intentar reescribir primero el cociente como $(x^2 - 2)^{-1}$. Por ahora sería un error hacerlo ya que por el momento no se tiene una regla para diferenciar esa forma. En resumen, no hay otra opción más que utilizar la regla del cociente. Sin embargo, en la sección siguiente se desarrollará una regla que permitirá diferenciar $(x^2 — 2)^{-1}$ de manera directa y eficiente.

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Si la ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q + 5}$$

donde p es el valor monetario, encuentre la función de ingreso marginal y evalúela cuando $q = 45$.

Solución:

Estrategia Primero se debe encontrar la función de ingreso. El ingreso r recibido por vender q unidades cuando el precio por unidad es p está dado por

$$\textbf{ingreso} = (\textbf{precio})(\textbf{cantidad}); \quad \text{esto es,} \quad r = pq$$

Usando la ecuación de demanda, se expresará r solo en términos de q. Luego se diferencia para encontrar la función de ingreso marginal, dr/dq.

La función de ingreso es

$$r = \left(\frac{1000}{q + 5}\right)q = \frac{1000q}{q + 5}$$

Así, la función de ingreso marginal está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dq} &= \frac{(q+5)\dfrac{d}{dq}(1000q) - (1000q)\dfrac{d}{dq}(q+5)}{(q+5)^2} \\ &= \frac{(q+5)(1000) - (1000q)(1)}{(q+5)^2} = \frac{5000}{(q+5)^2}\end{aligned}$$

y

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=45} = \frac{5000}{(45+5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2$$

Esto significa que vender una unidad adicional por arriba de 45 resulta en aproximadamente \$2 más de ingreso.

Ahora resuelva el problema 59 ◁

Función de consumo

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo**. Esta función, $C = f(I)$, expresa una relación entre el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional total, C. Por lo general, tanto I como C se expresan en miles de millones e I se restringe a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso. Es simplemente la derivada de C con respecto a I:

$$\text{Propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}$$

Si asumimos que la diferencia entre el ingreso I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a I se obtiene

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Se define dS/dI como la **propensión marginal al ahorro**. Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso, y

$$\begin{matrix}\text{Propensión marginal}\\ \text{al ahorro}\end{matrix} = 1 - \begin{matrix}\text{Propensión marginal}\\ \text{al consumo}\end{matrix}$$

EJEMPLO 9 Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro

Si la función de consumo está dada por

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3}+3)}{I+10}$$

determine la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 100$.

Solución:

$$\frac{dC}{dI} = 5\left(\frac{(I+10)\frac{d}{dI}(2I^{3/2}+3) - (2\sqrt{I^3}+3)\frac{d}{dI}(I+10)}{(I+10)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{(I+10)(3I^{1/2}) - (2\sqrt{I^3}+3)(1)}{(I+10)^2}\right)$$

Cuando $I = 100$, la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = 5\left(\frac{1297}{12\,100}\right) \approx 0.536$$

La propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$ es $1 - 0.536 = 0.464$. Esto significa que si un ingreso actual de \$100 000 millones aumenta en \$1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6% (536/1000) y ahorra 46.4% (464/1000) de ese incremento.

Ahora resuelva el problema 69 ◁

PROBLEMAS 7.4

En los problemas del 1 al 48, diferencie las funciones.

1. $f(x) = (4x + 1)(6x + 3)$

2. $f(x) = (3x - 1)(7x + 2)$

3. $s(t) = (5 - 3t)(t^3 - 2t^2)$

4. $Q(x) = (x^2 + 3x)(7x^2 - 5)$

5. $f(r) = (3r^2 - 4)(r^2 - 5r + 1)$

6. $C(I) = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$

7. $f(x) = x^2(2x^2 - 5)$

8. $f(x) = 3x^3(x^2 - 2x + 2)$

9. $y = (x^2 + 5x - 7)(6x^2 - 5x + 4)$

10. $\phi(x) = (3 - 5x + 2x^2)(2 + x - 4x^2)$

11. $f(w) = (w^2 + 3w - 7)(2w^3 - 4)$

12. $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$

13. $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - 4(4x^2 + 2x + 1)$

14. $h(x) = 5(x^7 + 4) + 4(5x^3 - 2)(4x^2 + 7x)$

15. $F(p) = \frac{3}{2}(5\sqrt{p} - 2)(3p - 1)$

16. $g(x) = (\sqrt{x} + 5x - 2)(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x})$

17. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$

18. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

19. $y = (5x + 3)(2x - 5)(7x + 9)$

20. $y = \dfrac{2x - 3}{4x + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}$

22. $H(x) = \dfrac{-5x}{5 - x}$

23. $f(x) = \dfrac{-13}{3x^5}$

24. $f(x) = \dfrac{3(5x^2 - 7)}{4}$

25. $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

26. $h(w) = \dfrac{3w^2 + 5w - 1}{w - 3}$

27. $h(z) = \dfrac{6 - 2z}{z^2 - 4}$

28. $z = \dfrac{2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 5x + 3}$

29. $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 2x + 1}$

30. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

31. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$

32. $F(z) = \dfrac{z^4 + 4}{3z}$

33. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100} + 7}$

34. $y = \dfrac{-8}{7x^6}$

35. $u(v) = \dfrac{v^3 - 8}{v}$

36. $y = \dfrac{x - 5}{8\sqrt{x}}$

37. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$

38. $y = \dfrac{x^{0.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$

39. $y = 1 - \dfrac{5}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1}$

40. $q(x) = 2x^3 + \dfrac{5x + 1}{3x - 5} - \dfrac{2}{x^3}$

41. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$

42. $y = \dfrac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$

43. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$

44. $f(s) = \dfrac{17}{s(4s^3 + 5s - 23)}$

45. $y = 3x - \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x - 1}}{x - 2}$

46. $y = 3 - 12x^3 + \dfrac{1 - \frac{5}{x^2 +}}{x^2 + 5}$

47. $f(x) = \dfrac{a + x}{a - x}$, donde a es una constante.

48. $f(x) = \dfrac{x^{-1} + a^{-1}}{x^{-1} - a^{-1}}$, donde a es una constante.

49. Encuentre la pendiente de la curva $y = (2x^2 - x + 3)(x^3 + x + 1)$ en $(1, 12)$.

50. Encuentre la pendiente de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$ en $(-1, -\frac{1}{2})$.

En los problemas del 51 al 54, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = \dfrac{6}{x - 1}$; $(3, 3)$

52. $y = \dfrac{x + 5}{x^2}$; $(1, 6)$

53. $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]$; $(0, 24)$

54. $y = \dfrac{x - 1}{x(x^2 + 1)}$; $(2, \frac{1}{10})$

En los problemas 55 y 56, determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x para el valor dado de x.

55. $y = \dfrac{x}{2x - 6}$; $x = 1$

56. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; $x = 5$

57. Movimiento La función de posición de un objeto que se desplaza en línea recta es

$$s = \frac{2}{t^3 + 1}$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la posición y la velocidad del objeto en $t = 1$.

58. Movimiento La función de posición de un objeto que se desplaza en línea recta es

$$s = \frac{t + 3}{t^2 + 7}$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre el o los valores positivos de t para los cuales la velocidad del objeto es 0.

En los problemas del 59 al 62, cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. En cada caso, encuentre la función de ingreso marginal. Recuerde que ingreso = pq.

59. $p = 80 - 0.02q$

60. $p = 500/q$

61. $p = \dfrac{108}{q + 2} - 3$

62. $p = \dfrac{q + 750}{q + 50}$

63. Función de consumo Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estimó por medio de la ecuación[11]

$$C = 0.672I + 113.1$$

Encuentre la propensión marginal al consumo.

64. Función de consumo Repita el problema 63 para $C = 0.836I + 127.2$.

En los problemas del 65 al 68, cada ecuación representa una función de consumo. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro para el valor dado de I.

65. $C = 3 + \sqrt{I} + 2\sqrt[3]{I}$; $I = 1$

66. $C = 6 + \dfrac{3I}{4} - \dfrac{\sqrt{I}}{3}$; $I = 25$

---

[11] T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), pp. 105-122.

67. $C = \dfrac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}; I = 36$

68. $C = \dfrac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}; I = 100$

69. Función de consumo Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{9\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.3I}{\sqrt{I}}$$

donde C e I se expresan en miles de millones.

(a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de $25 000 millones.

(b) Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I cuando el ingreso es de $25 000 millones.

70. Propensiones marginales a consumir y ahorrar Suponga que la función de ahorro de un país es

$$S = \frac{I - 2\sqrt{I} - 8}{\sqrt{I} + 2}$$

donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional (S) se miden en miles de millones. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro cuando el ingreso nacional es de $150 000 millones. (*Sugerencia:* Puede ser útil factorizar primero el numerador).

71. Costo marginal Si la función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{6q^2}{q + 2} + 6000$$

encuentre la función de costo marginal.

72. Costo marginal y costo promedio Dada la función de costo $c = f(q)$, demuestre que si $\dfrac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$, entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

73. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huésped cuando $x = 2$?

74. Acústica La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama *reverberación.* El *tiempo de reverberación* RT del recinto es el periodo necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la fórmula siguiente para calcular el RT del recinto:[12]

$$\text{RT} = \frac{0.05V}{A + xV}$$

Aquí V es el volumen del recinto, A la absorción total de este y x el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto al V siempre es positiva. Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad, ¿aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

75. Depredador-presa En un experimento[13] que estudió la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

76. Beneficios de seguridad social En un estudio sobre los beneficios de la seguridad social, Feldstein[14] diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1 + x) - b(2 + n)x}{a(2 + n)(1 + x) - b(2 + n)x}$$

donde a, b y n son constantes. Feldstein determina que

$$f'(x) = \frac{-1(1 + n)ab}{(a(1 + x) - bx)^2(2 + n)}$$

Verifique esto. (*Sugerencia:* Por conveniencia, haga $2 + n = c$). Después observe que la función f de Feldestein tiene la forma

$$g(x) = \frac{A + Bx}{C + Dx}, \quad \text{donde } A, B, C \text{ y } D \text{ son constantes}$$

Demuestre que $g'(x)$ es una constante dividida entre una función no negativa de x. ¿Qué significa esto?

77. Negocios El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de $150 y el costo marginal de $125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad cuando $q = 20$?

78. Utilice el resultado $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ para encontrar dy/dx si

$$y = (3x + 1)(2x - 1)(x - 4)$$

Objetivo

Introducir y aplicar la regla de la cadena, derivar un caso especial de la regla de la cadena y desarrollar el concepto de producto del ingreso marginal como una aplicación de la regla de la cadena.

7.5 Regla de la cadena

La siguiente regla, *regla de la cadena*, es una de las más importantes para obtener derivadas. Implica una situación en la que y es una función de la variable u, pero u es una función de x

---

[12] L. L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).

[13] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), pp. 385-398.

[14] M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, núm. 2 (1985), pp. 303-320.

y se desea encontrar la derivada de y con respecto a x. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1$$

definen a y como una función de u y a u como una función de x. Si se sustituye u por $2x + 1$ en la primera ecuación, se puede considerar a y como una función de x:

$$y = (2x + 1)^2$$

Para encontrar dy/dx, primero se desarrolla $(2x + 1)^2$:

$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

En este ejemplo, puede verse que encontrar dy/dx efectuando primero una sustitución puede ser bastante complicado. Por ejemplo, si se hubiera tenido $y = u^{100}$ en vez de $y = u^2$, ni siquiera se intentaría efectuar la sustitución. Por fortuna, la regla de la cadena permite manejar tales situaciones con facilidad.

REGLA COMBINADA 5 Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Se puede mostrar por qué la regla de la cadena es razonable considerando razones de cambio. Suponga

$$y = 8u + 5 \quad \text{y} \quad u = 2x - 3$$

Si x cambia en una unidad, ¿cómo cambia u? Para responder esta pregunta, se deriva y se encuentra que $du/dx = 2$. Pero para *cada* cambio de una unidad en u hay un cambio en y de $dy/du = 8$. Por lo tanto, ¿cuál es el cambio en y si x cambia en una unidad?; esto es, ¿qué valor tiene dy/dx? La respuesta es $8 \cdot 2$, que es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Así, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ahora se utilizará la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección. Si

$$y = u^2 \qquad \text{y} \qquad u = 2x + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= (2u)2 = 4u \end{aligned}$$

Al reemplazar u por $2x + 1$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) = 8x + 4$$

lo cual concuerda con el resultado previo.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de la cadena

a. Si $y = 2u^2 - 3u - 2$ y $u = x^2 + 4$, encuentre dy/dx.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4) \\ &= (4u - 3)(2x) \end{aligned}$$

Se puede escribir la respuesta solo en términos de x reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x$$

b. Si $y = \sqrt{w}$ y $w = 7 - t^3$, encuentre dy/dt.

APLÍQUELO ▶

8. Si un objeto se desplaza en forma horizontal de acuerdo con $x = 6t$, donde t está en segundos, y verticalmente de acuerdo con $y = 4x^2$, encuentre su velocidad vertical $\frac{dy}{dt}$.

Solución: Aquí, y es una función de w y w es una función de t, por lo que se puede considerar a y como una función de t. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w})\cdot\frac{d}{dt}(7-t^3)\\ &= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)\\ &= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7-t^3}}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Uso de la regla de la cadena

Si $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ y $u = 4/(3x-5)$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3+10u^2-3u-7)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x-5}\right)\\ &= (12u^2+20u-3)\cdot\frac{(3x-5)\frac{d}{dx}(4) - 4\frac{d}{dx}(3x-5)}{(3x-5)^2}\\ &= (12u^2+20u-3)\cdot\frac{-12}{(3x-5)^2}\end{aligned}$$

Cuando x se reemplaza por a, $u = u(x)$ debe reemplazarse por $u(a)$.

Aun cuando dy/dx está en términos de x y u, se puede evaluar cuando $x = 1$ si se determina el valor correspondiente de u. Cuando $x = 1$,

$$u = \frac{4}{3(1)-5} = -2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= [12(-2)^2 + 20(-2) - 3]\cdot\frac{-12}{[3(1)-5]^2}\\ &= 5\cdot(-3) = -15\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

La regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una composición de funciones, ya que

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$$

Así y, como una función de x, es $f \circ g$. Esto significa que se puede utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando se identifica a la función como una composición. Sin embargo, primero es necesario descomponer la función.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$$

se piensa en la función como una composición. Sea

$$y = f(u) = u^{100} \quad \text{y} \quad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6$$

Entonces $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = (g(x))^{100} = f(g(x))$. Ahora que se tiene una composición, es posible diferenciarla. Como $y = u^{100}$ y $u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (100u^{99})(3x^2 - 2x) \\ &= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x)\end{aligned}$$

Se acaba de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 — x^2 + 6)^{100}$, que es una potencia de una *función* de x, no simplemente una potencia de x. La regla siguiente, llamada **regla de la potencia**, generaliza el resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Regla de la potencia $\quad \frac{d}{dx}(u^a) = au^{a-1}\frac{du}{dx}$

donde se entiende que u es una función diferenciable de x y a es un número real.

Demostración. Sea $y = u^a$. Como y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Pero $dy/du = au^{a-1}$. Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx}$$

que es la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Uso de la regla de la potencia

Si $y = (x^3 - 1)^7$, encuentre y'.

Solución: Como y es una potencia de una *función* de x, es aplicable la regla de la potencia. Al hacer $u(x) = x^3 - 1$ y $a = 7$, se tiene

$$\begin{aligned}y' &= a[u(x)]^{a-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 4 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, encuentre dy/dx cuando $x = -2$.

Solución: Como $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$, se utiliza la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

y $a = \frac{2}{3}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2) \\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3) \\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}\end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

La técnica usada en el ejemplo 5 se utiliza con frecuencia cuando el numerador de un cociente es una constante y el denominador no lo es.

Solución: Aunque aquí puede emplearse la regla del cociente, un procedimiento más eficiente consiste en tratar el lado derecho como la potencia $(x^2 - 2)^{-1}$ y utilizar la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (-1)(x^2-2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2-2)\\ &= (-1)(x^2-2)^{-2}(2x)\\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

EJEMPLO 6 Diferenciación de una potencia de un cociente

Si $z = \left(\dfrac{2s+5}{s^2+1}\right)^4$, encuentre $\dfrac{dz}{ds}$.

Aquí el problema es reconocer la forma de la función que se va a diferenciar. En este caso, es una potencia, no un cociente.

Solución: Como z es una potencia de una función, primero se utiliza la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{4-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)$$

Ahora se emplea la regla del cociente:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{3}\left(\frac{(s^2+1)(2)-(2s+5)(2s)}{(s^2+1)^2}\right)$$

Al simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4\cdot\frac{(2s+5)^3}{(s^2+1)^3}\left(\frac{-2s^2-10s+2}{(s^2+1)^2}\right)\\ &= -\frac{8(s^2+5s-1)(2s+5)^3}{(s^2+1)^5}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 41 ◁

EJEMPLO 7 Diferenciación de un producto de potencias

Si $y = (x^2-4)^5(3x+5)^4$, encuentre y'.

Solución: Como y es un producto, se aplica primero la regla del producto:

$$y' = (x^2-4)^5\frac{d}{dx}((3x+5)^4) + (3x+5)^4\frac{d}{dx}((x^2-4)^5)$$

Ahora se emplea la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}y' &= (x^2-4)^5(4(3x+5)^3(3)) + (3x+5)^4(5(x^2-4)^4(2x))\\ &= 12(x^2-4)^5(3x+5)^3 + 10x(3x+5)^4(x^2-4)^4\end{aligned}$$

Al diferenciar un producto en el que al menos un factor es una potencia, la simplificación de la derivada implica, por lo general, factorizar.

Para simplificar, primero se eliminan los factores comunes:

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2-4)^4(3x+5)^3[6(x^2-4)+5x(3x+5)] \\ &= 2(x^2-4)^4(3x+5)^3(21x^2+25x-24) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39 ◁

Usualmente, se usaría la regla de la potencia para diferenciar $y = [u(x)]^n$. Aunque una función como $y = (x^2 + 2)^2$ puede escribirse como $y = x^4 + 4x^2 + 4$ y diferenciarse con facilidad, este procedimiento no es práctico para una función como $y = (x^2 + 2)^{1000}$. Como $y = (x^2 + 2)^{1000}$ es de la forma $y = [u(x)]^n$, se tiene que

$$y' = 1000(x^2+2)^{999}(2x)$$

Producto del ingreso marginal

Ahora se utilizará lo aprendido en cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Suponga que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de cierto artículo por día. Se puede pensar que q es una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r también puede considerarse como una función de m. Así, podemos ver a dr/dm como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada dr/dm se llama **producto del ingreso marginal**. Es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando un fabricante emplea un trabajador adicional.

EJEMPLO 8 Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de cierto artículo por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}} \tag{1}$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = 900/(q + 9)$, determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$.

Solución: Es necesario encontrar dr/dm, donde r es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}$$

Así, se debe encontrar dr/dq y dq/dm cuando $m = 9$. Se comienza con dr/dq. La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left(\frac{900}{q+9}\right)q = \frac{900q}{q+9}$$

por lo que, a partir de la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+9)(900) - 900q(1)}{(q+9)^2} = \frac{8100}{(q+9)^2}$$

Para evaluar esta expresión cuando $m = 9$, se utiliza primero la ecuación $q = 10m^2/\sqrt{m^2+19}$ para encontrar el valor correspondiente de q:

$$q = \frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2+19}} = 81$$

De modo que,

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9} = \left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81} = \frac{8100}{(81+9)^2} = 1$$

Ahora se calcula dq/dm. A partir de las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{dq}{dm} &= \frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}\right) \\
&= \frac{(m^2+19)^{1/2}\dfrac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2)\dfrac{d}{dm}[(m^2+19)^{1/2}]}{[(m^2+19)^{1/2}]^2} \\
&= \frac{(m^2+19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2+19)^{-1/2}(2m)]}{m^2+19}
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dq}{dm}\right|_{m=9} &= \frac{(81+19)^{1/2}(20\cdot 9) - (10\cdot 81)[\frac{1}{2}(81+19)^{-1/2}(2\cdot 9)]}{81+19} \\
&= 10.71
\end{aligned}
$$

Una fórmula directa para obtener el producto del ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right)$$

Entonces, por la regla de la cadena,

$$\left.\frac{dr}{dm}\right|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71$$

Esto significa que al emplear a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

Ahora resuelva el problema 80 ◁

PROBLEMAS 7.5

En los problemas del 1 al 8, utilice la regla de la cadena.

1. Si $y = u^2 - 2u$ y $u = x^2 - x$, encuentre dy/dx.
2. Si $y = 2u^3 - 8u$ y $u = 7x - x^3$, encuentre dy/dx.
3. Si $y = \dfrac{1}{w}$ y $w = 3x - 5$, encuentre dy/dx.
4. Si $y = \sqrt[4]{z}$ y $z = x^5 - x^4 + 3$, encuentre dy/dx.
5. Si $w = u^3$ y $u = \dfrac{t-1}{t+1}$, encuentre dw/dt cuando $t = 1$.
6. Si $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$ y $u = 2s^2 - 1$, encuentre dz/ds cuando $s = -1$.
7. Si $y = 3w^2 - 8w + 4$ y $w = 2x^2 + 1$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.
8. Si $y = 2u^3 + 3u^2 + 5u - 1$ y $u = 3x + 1$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

En los problemas del 9 al 52, encuentre y′.

9. $y = (3x + 2)^6$
10. $y = (x^2 - 4)^4$
11. $y = (3 + 2x^3)^5$
12. $y = (x^2 + x)^4$
13. $y = 5(x^3 - 3x^2 + 2x)^{100}$
14. $y = \dfrac{(2x^2 + 1)^4}{2}$
15. $y = (x^2 - 2)^{-3}$
16. $y = (2x^3 - 8x)^{-12}$
17. $y = 2(x^2 + 5x - 2)^{-5/7}$
18. $y = 3(5x - 2x^3)^{-5/3}$
19. $y = \sqrt{5x^2 - x}$
20. $y = \sqrt{3x^2 - 7}$
21. $y = \sqrt[4]{2x - 1}$
22. $y = \sqrt[3]{8x^2 - 1}$
23. $y = 4\sqrt[7]{(x^2 + 1)^3}$
24. $y = 7\sqrt[3]{(x^5 - 3)^5}$
25. $y = \dfrac{6}{2x^2 - x + 1}$
26. $y = \dfrac{3}{x^4 + 2}$
27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$
28. $y = \dfrac{1}{(3 + 5x)^3}$
29. $y = \dfrac{4}{\sqrt{9x^2 + 1}}$
30. $y = \dfrac{3}{(3x^2 - x)^{2/3}}$
31. $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7}x$
32. $y = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
33. $y = x^3(2x + 3)^7$
34. $y = x(x + 4)^4$
35. $y = 4x^2\sqrt{5x + 1}$
36. $y = 4x^3\sqrt{1 - x^2}$
37. $y = (x^2 + 2x - 1)^3(5x)$
38. $y = x^4(x^4 - 1)^5$
39. $y = (8x - 1)^3(2x + 1)^4$
40. $y = (3x + 2)^5(4x - 5)^2$
41. $y = \left(\dfrac{x - 3}{x + 2}\right)^{12}$
42. $y = \left(\dfrac{2x}{x + 2}\right)^4$
43. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 5}}$
44. $y = \sqrt[3]{\dfrac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$
45. $y = \dfrac{2x - 5}{(x^2 + 4)^3}$
46. $y = \dfrac{(4x - 2)^4}{3x^2 + 7}$
47. $y = \dfrac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3}$
48. $y = \sqrt[3]{(x - 3)^3(x + 5)}$
49. $y = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5}$
50. $y = 6 + 3x - 4x(7x + 1)^2$
51. $y = 8t + \dfrac{t - 1}{t + 4} - \left(\dfrac{8t - 7}{4}\right)^2$
52. $y = \dfrac{(2x^3 + 6)(7x - 5)}{(2x + 4)^2}$

En los problemas 53 y 54, utilice las reglas del cociente y de la potencia para encontrar y′. No simplifique su respuesta.

53. $y = \dfrac{(3x + 2)^3(x + 1)^4}{(x^2 - 7)^3}$
54. $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}(4x^2 - 1)^2}{9x - 3}$
55. Si $y = (5u + 6)^3$ y $u = (x^2 + 1)^4$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.
56. Si $z = 2y^2 - 4y + 5$, $y = 6x - 5$ y $x = 2t$, encuentre dz/dt cuando $t = 1$.
57. Encuentre la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto $(8, 0)$.

58. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x+2}$ en el punto (7, 3).

En los problemas del 59 al 62, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

59. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2};\ (3, 1)$ **60.** $y = (x+3)^3;\ (-1, 8)$

61. $y = \dfrac{\sqrt{7x+2}}{x+1};\ \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ **62.** $y = \dfrac{-3}{(3x^2+1)^3};\ (0, -3)$

En los problemas 63 y 64, determine la razón de cambio porcentual de y con respecto a x para el valor dado de x.

63. $y = (x^2+1)^4;\ x = 1$ **64.** $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^3};\ x = 2$

En los problemas del 65 al 68, q es el número total de unidades producidas al día por m empleados de un fabricante y p es el precio de venta por unidad en el que se venden las q unidades. En cada caso, encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado de m.

65. $q = 5m, p = -0.4q + 50; m = 6$

66. $q = (200m - m^2)/20, p = -0.1q + 70; m = 40$

67. $q = 10m^2/\sqrt{m^2+9}, p = 525/(q+3); m = 4$

68. $q = 50m/\sqrt{m^2+11}, p = 100/(q+10); m = 5$

69. Ecuación de demanda Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2+20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.
(a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q.
(b) Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q.
(c) Determine la función de ingreso marginal.

70. Producto de ingreso marginal Si $p = k/q$, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante y $q = f(m)$ define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a 0.

71. Función de costo El costo c de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 5500 + 12q + 0.2q^2$$

Si el precio de p unidades está dado por la ecuación

$$q = 900 - 1.5p$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 85$.

72. Altas de hospital Una dependencia gubernamental de salud examinó los registros de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{250}{250+t}\right)^3$$

Encuentre $f'(100)$ e interprete su respuesta.

73. Costo marginal Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{4q^2}{\sqrt{q^2+2}} + 6000$$

encuentre la función de costo marginal.

74. Salario y educación Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio, entonces para $E \geq 7$,

$$S = 340E^2 - 4360E + 42\,800$$

(a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando $E = 16$?
(b) ¿A qué nivel educativo la tasa de cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

75. Biología El volumen de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. En un tiempo de t segundos, el radio (en centímetros) está dado por

$$r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$$

Use la regla de la cadena para encontrar dV/dt cuando $t = 10$.

76. Presión en tejidos vivos Bajo ciertas condiciones, la presión p desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación mediante la ecuación[15]

$$p = (2\rho VI)^{1/2}$$

donde ρ (letra griega que se lee "ro") es la densidad del tejido afectado y V la velocidad de propagación de la radiación. Aquí ρ y V son constantes. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a I. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de p con respecto a I.

77. Demografía Suponga que para cierto grupo de 20 000 nacimientos, el número de personas que alcanzan a vivir x años es

$$l_x = -0.000354x^4 + 0.00452x^3 + 0.848x^2 - 34.9x + 20\,000$$
$$0 \leq x \leq 95.2$$

(a) Encuentre la razón de cambio de I_x con respecto a x y evalúe su respuesta para $x = 65$.
(b) Encuentre la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual de I_x cuando $x = 65$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

78. Contracción muscular Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga impuesta, por ejemplo, un peso. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[16] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares y a, b y k son constantes positivas. Exprese v como una función de P. Utilice su resultado para encontrar dv/dP.

79. Economía Suponga que $pq = 100$ es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea c el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando $q = 200$. Utilice la regla de la cadena para encontrar dc/dp cuando $q = 200$.

80. Producto del ingreso marginal Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen

$$q = 2m(2m+1)^{3/2}$$

unidades de cierto artículo diariamente. El ingreso total r está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}$$

---

[15] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[16] *Ibid.*

(a) ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?

(b) Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.

(c) Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

81. Suponga que $y = f(x)$, donde $x = g(t)$. Dado que $g(2) = 3, g'(2) = 4, f(2) = 5, f'(2) = 6, g(3) = 7, g'(3) = 8,$ $f(3) = 9$ y $f'(3) = 10$, determine el valor de $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}$.

82. Negocios Un fabricante determinó que, para su producto, el costo promedio diario (en cientos) está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2+35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

(a) Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?

(b) Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.

(c) El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias, el ingreso crecería a \$275. ¿Deberá realizar este aumento? ¿Por qué?

83. Si

$$y = (u+2)\sqrt{u+3}$$

y

$$u = x(x^2+3)^3$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.1$. Redondee su respuesta a dos decimales.

84. Si

$$y = \frac{2u+3}{u^3-2}$$

y

$$u = \frac{x+4}{(2x+3)^3}$$

encuentre dy/dx cuando $x = -1$. Redondee su respuesta a dos decimales.

Repaso del capítulo 7

Términos y símbolos importantes

Sección 7.1 **La derivada**
recta secante recta tangente pendiente de una curva
derivada $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\lim\limits_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$
cociente de diferencias $f'(x)$ y' $\frac{d}{dx}(f(x))$ $\frac{dy}{dx}$

Sección 7.2 **Reglas para la diferenciación**
función potencia regla del factor constante regla de la suma o la diferencia

Sección 7.3 **La derivada como una razón de cambio**
función de posición x velocidad razón de cambio
función de costo total costo marginal costo promedio
función de ingreso total ingreso marginal
razón de cambio relativa razón de cambio porcentual

Sección 7.4 **Regla del producto y regla del cociente**
regla del producto regla del cociente
función de consumo propensión marginal al consumo y al ahorro

Sección 7.5 **Regla de la cadena**
regla de la cadena regla de la potencia producto del ingreso marginal

Resumen

La recta tangente (o tangente) a una curva en el punto P es la posición límite de las rectas secantes PQ cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva. La pendiente de la tangente en P se llama pendiente de la curva en P.

Si $y = f(x)$, la derivada de f en x es la función $f'(x)$ definida por el límite de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

En forma geométrica, la derivada proporciona la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Una ecuación de la recta tangente en un punto particular $(a, f(a))$ se obtiene evaluando $f'(a)$, que es la pendiente de la recta tangente, y utilizando la forma punto-pendiente de una recta: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. Cualquier función que es diferenciable en un punto, también debe ser continua ahí.

Hasta ahora, las reglas analizadas para encontrar derivadas son las siguientes, para las cuales se supone que todas las funciones son diferenciables:

$\frac{d}{dx}(c) = 0$, donde c es cualquier constante.

$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$, donde a es cualquier número real.

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$, donde c es una constante.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = f'(x)-g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \text{ donde } y \text{ es una función de } u \text{ y } u \text{ es una función de } x.$$
$$\frac{d}{dx}(u^a) = au^{a-1}\frac{du}{dx}, \text{ donde } u \text{ es una función de } x \text{ y } a \text{ es cualquier número real.}$$

La derivada dy/dx también puede interpretarse como dar la razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

En particular, si $s = f(t)$ es una función de posición, donde s es la posición en el tiempo t, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo } t$$

En economía, el término *marginal* se utiliza para describir derivadas de tipos específicos de funciones. Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la razón de cambio

$$\frac{dc}{dq} \text{ se llama costo marginal}$$

El costo marginal se interpreta como el costo aproximado de una unidad adicional de producción. (El costo promedio por unidad, $\bar{c}$, está relacionado con el costo total c mediante $\bar{c} = c/q$, o, de manera equivalente, $c = \bar{c}q$).

Una función de ingreso total $r = f(q)$ proporciona el ingreso r de un fabricante al vender q unidades de un producto. (El ingreso r y el precio p se relacionan mediante $r = pq$). La razón de cambio

$$\frac{dr}{dq} \text{ se llama ingreso marginal}$$

y se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene al vender una unidad adicional de producto.

Si r es el ingreso que un fabricante recibe cuando se vende la producción total de sus m empleados, entonces la derivada $dr/dm = dr\,/\,dq\cdot dq\,/dm$ se llama producto del ingreso marginal y proporciona el cambio aproximado que resulta en el ingreso cuando el fabricante contrata un empleado extra.

Si $C = f(I)$ es una función de consumo, donde I es el ingreso nacional y C es el consumo nacional, entonces

$$\frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al consumo}$$

y

$$1-\frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al ahorro}$$

Para cualquier función, la razón de cambio relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

que compara la razón de cambio de $f(x)$ con la propia función $f(x)$. La razón de cambio porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot 100\%$$

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 4, utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

1. $f(x) = 2 - x^2$

2. $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$

3. $f(x) = \sqrt{3x}$

4. $f(x) = \dfrac{2}{1+4x}$

En los problemas del 5 al 38, diferencie.

5. $y = 7^4$

6. $y = ex$

7. $y = \pi x^4 - \sqrt{2}x^3 + 2x^2 + 4$

8. $y = 4(x^2+5) - 7x$

9. $f(s) = s^2(s^2+2)$

10. $y = \sqrt{x+3}$

11. $y = \dfrac{x^2+1}{5}$

12. $y = -\dfrac{1}{nx^n}$

13. $y = (x^3+7x^2)(x^3-x^2+5)$

14. $y = (x^2+1)^{100}(x-6)$

15. $f(x) = (2x^2+4x)^{100}$

16. $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$

17. $y = \dfrac{c}{ax+b}$

18. $y = \dfrac{5x^2-8x}{2x}$

19. $y = (8+2x)(x^2+1)^4$

20. $g(z) = (2z)^{3/5} + 5$

21. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+4}$

22. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

23. $y = \sqrt[3]{4x-1}$

24. $f(x) = (1+2^3)^{12}$

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

26. $y = \dfrac{x(x+1)}{2x^2+3}$

27. $h(x) = (ax+b)^m(cx+d)^n$

28. $y = \dfrac{(x+3)^5}{x}$

29. $y = \dfrac{5x-4}{x+6}$

30. $f(x) = 5x^3\sqrt{3+2x^4}$

31. $y = 2x^{-3/8} + (2x)^{-3/8}$

32. $y = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{a}{x}}$

33. $y = \dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+5}}$

34. $y = \sqrt[3]{(7-3x^2)^2}$

35. $y = (x^3+6x^2+9)^{3/5}$

36. $z = 0.4x^2(x+1)^{-3} + 0.5$

37. $g(z) = \dfrac{-3z}{(z-2)^{-3}}$

38. $g(z) = \dfrac{-3}{4(z^5+2z-5)^4}$

En los problemas del 39 al 42, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

39. $y = x^2 - 6x + 4, x = 1$

40. $y = -2x^3 + 6x + 1, x = 2$

41. $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$

42. $y = \dfrac{x^2}{x - 10}, x = 11$

43. Si $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

44. Si $f(x) = x/(x + 4)$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

45. Ingreso marginal Si $r = q(20 - 0.1q)$ es una función de ingreso total, encuentre la función de ingreso marginal.

46. Costo marginal Si

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$$

es una función de costo total, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

47. Función de consumo Si

$$C = 9 + 0.7I - 0.2\sqrt{I}$$

es una función de consumo, encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 25$.

48. Ecuación de demanda Si $p = \dfrac{q + 12}{q + 5}$ es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio del precio p con respecto a la cantidad q.

49. Ecuación de demanda Si $p = -0.1q + 500$ es una ecuación de demanda, encuentre la función de ingreso marginal.

50. Costo promedio Si $\bar{c} = 0.03q + 1.2 + \dfrac{3}{q}$ es una función de costo promedio, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

51. Función de costo en una planta de energía La función de costo total de una planta de energía eléctrica se estima mediante la ecuación[17]

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2 \qquad 20 \leq q \leq 90$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

52. Producto del ingreso marginal Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades por día, donde

$$q = m(60 - m)$$

Si la función de demanda está dada por

$$p = -0.02q + 12$$

encuentre el producto del ingreso marginal cuando $m = 10$.

53. Polilla de invierno En un estudio relativo a la polilla de invierno realizado en Nueva Escocia,[18] se determinó que el número promedio, y, de huevecillos en una polilla hembra es una función de su ancho abdominal x (en milímetros), donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$$

y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿A qué razón cambia el número de huevecillos con respecto al ancho abdominal cuando $x = 2$?

54. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se encontró que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes con parásitos es

$$y = 12\left(1 - \frac{1}{1 + 3x}\right) \qquad x \geq 0$$

¿Para qué valor de x la derivada dy/dx es igual a $\frac{1}{3}$?

55. Crecimiento de bacterias En cierto cultivo se tienen bacterias en crecimiento. El tiempo t (en horas) necesario para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación) es una función de la temperatura T (en grados Celsius) del cultivo y está dado por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$$

Encuentre dt/dT cuando (a) $T = 38$ y (b) $T = 35$.

56. Movimiento La función de posición de una partícula que se desplaza en línea recta es

$$s = \frac{9}{2t^2 + 3}$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad de la partícula en $t = 1$.

57. Razón de cambio El volumen de una esfera está dado por $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, donde d es el diámetro. Encuentre la razón de cambio de V con respecto a d cuando $d = 2$ pies.

58. Movimiento La función de posición para una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo es

$$s = 218t - 16t^2$$

donde s es la altura en pies desde el suelo después de t segundos. ¿Para qué valor o valores de t la velocidad es igual a 64 pies/segundo?

59. Encuentre la función de costo marginal si la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2q + \frac{10\,000}{q^2}$$

60. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{(x^3 + 2)\sqrt{x + 1}}{x^4 + 2x}$$

en el punto sobre la curva donde $x = 1$.

61. Un fabricante encontró que con m empleados trabajando, el número de unidades producidas por día es

$$q = 10\sqrt{m^2 + 4900} - 700$$

La ecuación de demanda para el producto es

$$8q + p^2 - 19\,300 = 0$$

donde p es el precio de venta cuando la demanda para el producto es de q unidades por día.

---

[17] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), pp. 231-255.

[18] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

(a) Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando $m = 240$.
(b) Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso con respecto al número de empleados cuando $m = 240$.
(c) Suponga que al fabricante le costaría $400 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría usted al fabricante contratar al empleado número 241? ¿Por qué sí o por qué no?

62. Si $f(x) = xe^{-x}$, utilice la definición de derivada ("límite de un cociente de diferencias") para estimar $f'(1)$. Redondee su respuesta a tres decimales.

63. Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$, utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar la derivada cuando $x = 10$. Redondee su respuesta a tres decimales.

64. La función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 6}} + 2500$$

Utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar el costo marginal cuando se producen 15 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

65. Demuestre que la regla básica 0 es en realidad una consecuencia de la regla combinada 1 y el caso en que $a = 0$ de la regla básica 1.

66. Demuestre que la regla básica 1 *para los enteros positivos* es una consecuencia de la regla combinada 3 (la regla del producto) y el caso en que $a = 1$ de la regla básica 1.

EXPLORE Y AMPLÍE Propensión marginal al consumo

Una función de consumo puede definirse ya sea para una nación, como en la sección 7.4, o para una familia individual. En cualquier caso, la función relaciona el consumo total con el ingreso total. Una función de ahorro, de manera análoga, relaciona el ahorro total con el ingreso total, ya sea en una nación o a nivel familiar.

Los datos acerca del ingreso, consumo y ahorro para Estados Unidos como un todo pueden encontrarse en las tablas de Cuentas del Producto e Ingreso Nacional (NIPA, por sus siglas en inglés) recopiladas por la oficina de Análisis Económicos, una división del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Las tablas pueden descargarse de `www.bea.gov`. Para los años 1959 a 1999, la función de consumo nacional se indica por medio del diagrama de dispersión de la figura 7.13.

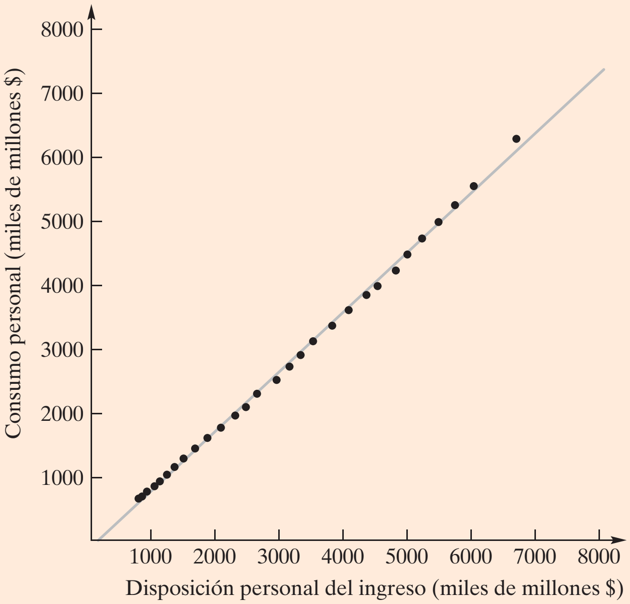


FIGURA 7.13 Función del consumo nacional para Estados Unidos.

Observe que los puntos están ubicados más o menos a lo largo de una línea recta. Una regresión lineal da la ecuación para esta recta como $y = 0.9314x - 99.1936$.

La propensión marginal al consumo derivada de esta gráfica es simplemente la pendiente de la recta, esto es, alrededor de 0.931 o 93.1%. Entonces, a nivel nacional, un incremento de mil millones de dólares en el ingreso total disponible produce un incremento de $931 millones en el consumo. Y de suponer que el resto se ahorra, existe un aumento de $69 millones en ahorros totales.[19]

Quizá algo más sencillo para relacionar, por los números más pequeños involucrados, es la función de consumo para una familia. Esta función está documentada en Encuestas de Gastos del Consumidor llevadas a cabo por la Oficina de Estadísticas de Trabajo, que es parte del Departamento de Trabajo de Estados Unidos. Los resultados de las encuestas para cada año pueden descargarse de `www.bls.gov/cex/`.

La encuesta de cada año proporciona información para cinco quintiles, donde un quintil representa un quinto de las familias de Estados Unidos. Los quintiles se ordenan de acuerdo con el ingreso, de modo que el quintil inferior representa al 20% más pobre de las familias de Estados Unidos y el quintil superior representa al 20% más rico.

Tabla 7.3 Ingresos y gastos familiares de Estados Unidos, 1999

Ingreso después de impuestos	Gastos totales
$7101	$16 766
$17 576	$24 850
$30 186	$33 078
$48 607	$46 015
$98 214	$75 080

Para el año 1999, el ingreso y el consumo son como se muestra en la tabla 7.3. Los números son valores promedio

---

[19] En realidad, también deben tomarse en cuenta los pagos de intereses y otros gastos no contabilizados como consumos. Pero de ahora en adelante se ignorará esta complicación.

dentro de cada quintil. Si estos datos se grafican por medio de una calculadora gráfica, los puntos caen en un patrón que podría aproximarse de manera razonable a una línea recta, pero podría aproximarse mejor mediante la forma de una curva —cualitativamente, parecida a una función raíz cuadrada (figura 7.14).

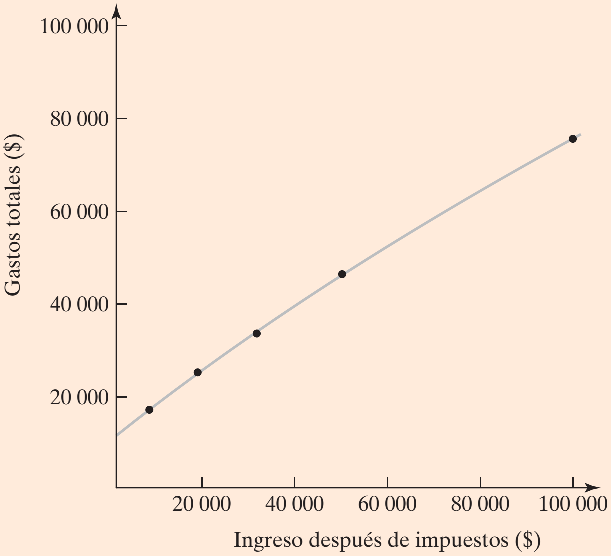


FIGURA 7.14 Función del consumo familiar (Estados Unidos).

La mayoría de las calculadoras gráficas no tienen una función de regresión para una función de tipo raíz cuadrada. Sin embargo, sí tienen una función de regresión cuadrática —y la inversa de una función cuadrática es una función de tipo raíz cuadrada—. (Las funciones inversas se definieron en la sección 2.4). Así que se procede como sigue. Primero, se utilizan las capacidades estadísticas de una calculadora para introducir los números de la *segunda* columna de la tabla 7.3 como valores de x y los de la *primera* columna como valores de y. Segundo, se realiza una regresión cuadrática. La función obtenida está dada por

$$y = (4.4627 \times 10^{-6})x^2 + 1.1517x - 13\,461$$

Tercero, se intercambian las listas de los valores de x y y en preparación para la gráfica. Cuarto, se reemplaza y por x y x por y en la ecuación de regresión cuadrática, enseguida se despeja y (usando la fórmula cuadrática) para obtener la ecuación

$$y = \frac{-1.1517 \pm \sqrt{\begin{array}{c}1.1517^2 - 4(4.4627 \times 10^{-6})\\(-13\,461 - x)\end{array}}}{2(4.4627 \times 10^{-6})}$$

o, de manera más simple,

$$y = -129\,036 \pm \sqrt{1.9667 \times 10^{10} + 224\,080x}$$

Por último, se introduce la mitad superior de la curva (que corresponde a la parte + del signo ±) como una función para graficar; luego se despliega junto con una gráfica de los datos. El resultado se parece al que se muestra en la figura 7.15.

Para encontrar el consumo marginal para un ingreso dado, ahora se usa la función dy/dx. Por ejemplo, para encontrar el consumo marginal en \$50 000, se selecciona dy/dx y luego se introduce 50000. La calculadora regresa el valor 0.637675, el cual representa un consumo marginal de alrededor del 63.8%. En otras palabras, una familia con ingresos de \$50 000 anuales, si tiene un ingreso adicional de \$1000, gastaría \$638 de estos últimos y el resto lo ahorraría.

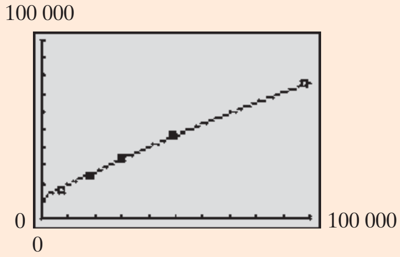


FIGURA 7.15 Gráfica de la curva de regresión.

Problemas

1. Compare la función de consumo de la figura 7.13 con las funciones de consumo de los problemas 63 y 64 de la sección 7.5. Proporcione dos formas en las que estas funciones de consumo difieren de manera significativa e interprete las diferencias de manera cualitativa.

2. En la primera columna, el primer renglón de la tabla 7.3 tiene \$7101 y en la segunda columna tiene \$16 766. ¿Qué significa esto?

3. Suponga que una familia tiene ingresos anuales de \$25 000 y en 1999 recibió un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese cheque esperaría usted que la familia gastara? ¿Cuánto ahorraría?

4. Suponga que una familia con ingresos de \$90 000 anuales recibió en 1999 un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese bono gastaría?

5. ¿Cuáles son las razones de la vida real para explicar la diferencia entre las respuestas de los problemas 3 y 4?

TEMAS ADICIONALES DE DIFERENCIACIÓN

8

Después de un incómodo viaje en un vehículo, en ocasiones los pasajeros describen la travesía como un viaje con "jalones". Pero, de manera más precisa, ¿qué es el "jaloneo"?, ¿qué significa esto para, digamos, un ingeniero que diseña un nuevo sistema de transporte?

Viajar en línea recta a una velocidad constante se denomina *movimiento uniforme* y no existe jaloneo alguno. Pero si la trayectoria o la velocidad cambian, el viaje puede tener jalones. El cambio en la velocidad con respecto al tiempo, formalmente, es la derivada de la velocidad. Llamada aceleración, el cambio en la velocidad es la *segunda derivada* de la posición con respecto al tiempo —la derivada de la derivada de la posición—. Uno de los conceptos importantes que se tratan en este capítulo es el de derivadas de orden superior, de las cuales la aceleración es un ejemplo.

Pero, ¿es la aceleración la responsable de los jalones? La sensación de jaloneo hacia delante y hacia atrás percibida en una montaña rusa sí está relacionada con la aceleración. Por otra parte, las revistas de automóviles con frecuencia elogian autos que tienen una aceleración *suave*. De modo que al parecer la aceleración tiene algo que ver con el jaloneo, pero no es en sí lo que la causa.

La derivada de la aceleración es la *tercera* derivada de la posición con respecto al tiempo. Cuando esta tercera derivada es grande, la aceleración está cambiando con rapidez. En una montaña rusa, durante una vuelta uniforme a la izquierda, se experimenta una aceleración uniforme hacia la izquierda. Pero cuando la montaña rusa cambia de manera abrupta de una vuelta hacia la izquierda a una vuelta hacia la derecha, la aceleración cambia de dirección —y los pasajeros experimentan un jalón—. La tercera derivada de la posición es, en efecto, muy adecuada para medir el jaloneo, el cual se acostumbra denominar como *jalón*, de igual modo que la segunda derivada se denomina aceleración.

El jalón tiene implicaciones no solo en cuanto a la comodidad de los pasajeros que viajan en un vehículo, sino también en cuanto a la confiabilidad de los equipos. Por ejemplo, los ingenieros diseñan equipos para naves espaciales siguiendo directrices acerca del máximo jalón que los equipos deben ser capaces de soportar sin que se dañen sus componentes internos.

8.1 Derivadas de funciones logarítmicas

Objetivo

Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = \ln u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función logarítmica para una base diferente de e.

Hasta el momento, las únicas derivadas que se han podido calcular pertenecen a funciones construidas a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. (Como se señaló, la derivada de una función constante c puede calcularse al escribir $c = cx^0$; entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}\left(cx^0\right) = c\frac{d}{dx}\left(x^0\right) = c \cdot 0x^{-1} = 0$$

Por lo tanto, hasta el momento solo se tiene en realidad una sola fórmula *básica* de diferenciación). Las funciones logarítmicas $\log_b x$ y las funciones exponenciales b^x *no se pueden* construir a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. De ello se desprende la necesidad de contar por lo menos con otra fórmula de diferenciación verdaderamente *básica*.

En esta sección, se desarrollan fórmulas para la diferenciación de funciones logarítmicas. Se iniciará con la derivada de $\ln x$ y se harán más comentarios sobre los pasos numerados al final del cálculo.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln x) &\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} && \text{definición de derivada}\\
&\overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} && \text{puesto que } \ln m - \ln n = \ln(m/n)\\
&\overset{(3)}{=} \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) && \text{álgebra}\\
&\overset{(4)}{=} \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) && \text{al escribir } \frac{1}{h} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\\
&\overset{(5)}{=} \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) && \text{puesto que } r\ln m = \ln m^r\\
&\overset{(6)}{=} \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) && \text{por la propiedad límite 1 de la sección 10.1}\\
&\overset{(7)}{=} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) && \text{ln es continua}\\
&\overset{(8)}{=} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{h/x\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) && \text{para } x > 0 \text{ fija}\\
&\overset{(9)}{=} \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}\right) && \text{al establecer } k = h/x\\
&\overset{(10)}{=} \frac{1}{x}\cdot\ln(e) && \text{como se muestra en la sección 10.1}\\
&\overset{(11)}{=} \frac{1}{x} && \text{puesto que } \ln e = 1
\end{aligned}$$

El cálculo es largo, pero cuando se sigue paso a paso permite revisar muchas ideas importantes. El paso (1) es la definición clave presentada en la sección 7.1. Los pasos (2), (5) y (11) implican propiedades que se encuentran en la sección 3.3. En el paso (3), etiquetado simplemente como álgebra, se utilizan las propiedades de las fracciones. Se admite que el paso (4) es, sin duda, un truco cuyo descubrimiento requiere experiencia. Tome en cuenta que necesariamente $x \neq 0$, puesto que x está en el dominio de ln, que es $(0, \infty)$. Para entender la justificación del paso (6), se debe observar que x y, por ende, $1/x$ son constantes con respecto a la variable límite h. Ya se ha comentado que las funciones logarítmicas son continuas y esto es lo que permite intercambiar los procesos de aplicación de la función ln y tener un límite en (7). En (8), el punto es que, para $x > 0$ fija, h/x tiende a 0 cuando h tiende a 0 y, de manera inversa, h tiende a 0 cuando h/x tiende a 0. Por lo tanto, h/x se puede considerar como una nueva variable límite, k, y esto se hace en el paso (9).

En conclusión, se ha deducido lo siguiente:

REGLA BÁSICA 2 Derivada de $\ln x$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0$$

Se requiere tener cierto cuidado con esta regla porque mientras el lado izquierdo está definido solo para $x > 0$, el lado derecho está definido para toda $x \neq 0$. Para $x < 0$, el $\ln(-x)$ está definido y, por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad \text{para } x < 0$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden combinar usando la función absoluta para obtener

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0 \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen $\ln x$

a. Diferencie $f(x) = 5 \ln x$.

Solución: Aquí f es una constante (5) que multiplica a una función ($\ln x$); así que, por la regla básica 2, se tiene

$$f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x} \quad \text{para } x > 0$$

b. Diferencie $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Solución: Por la regla del cociente y la regla básica 2,

$$y' = \frac{x^2\frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \quad \text{para } x > 0$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

A continuación, se extenderá la ecuación (1) para considerar una clase más amplia de funciones. Sea $y = \ln|u|$, donde u es una función diferenciable de x. Por la regla de la cadena,

La regla de la cadena se utiliza para desarrollar la fórmula de diferenciación para $\ln|u|$.

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln|u|)\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0$$

Por lo que,

$$\frac{d}{du}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0 \tag{2}$$

Por supuesto, la ecuación (2) da $\dfrac{d}{du}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dx}$ para $u > 0$.

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen $\ln u$

a. Diferencie $y = \ln(x^2 + 1)$.

Solución: Esta función tiene la forma $\ln u$ con $u = x^2 + 1$ y, como $x^2 + 1 > 0$, para toda x, $y = \ln(x^2 + 1)$ está definida para toda x. Al usar la ecuación (2), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

APLÍQUELO ▶

1. La oferta de q unidades de un producto al precio p por unidad está dada por $q(p) = 25 + 2\ln(3p^2 + 4)$. Encuentre la razón de cambio de la oferta con respecto al precio, $\dfrac{dq}{dp}$.

b. Diferencie $y = x^2 \ln(4x + 2)$.

Solución: Usando la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\ln(4x+2)) + (\ln(4x+2))\frac{d}{dx}(x^2)$$

Por la ecuación (2) con $u = 4x + 2$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2\left(\frac{1}{4x+2}\right)(4) + (\ln(4x+2))(2x)\\ &= \frac{2x^2}{2x+1} + 2x\ln(4x+2) \quad \text{para } 4x+2>0\end{aligned}$$

Como $4x + 2 > 0$ exactamente cuando $x > -1/2$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^2\ln(4x+2)) = \frac{2x^2}{2x+1} + 2x\ln(4x+2) \quad \text{para } x > -1/2$$

c. Diferencie $y = \ln|\ln|x||$.

Solución: Esta función tiene la forma $y = \ln|u|$ con $u = \ln|x|$. Usando la ecuación (2), se obtiene

$$y' = \frac{1}{\ln|x|}\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{\ln|x|}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\ln|x|} \quad \text{para } x, u \neq 0$$

Como $\ln|x| = 0$ cuando $x = -1, 1$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln|\ln|x||) = \frac{1}{x\ln|x|} \quad \text{para } x \neq -1, 0, 1$$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Con frecuencia, es posible reducir el trabajo implicado en diferenciar el logaritmo de un producto, cociente o potencia utilizando las propiedades de los logaritmos para reescribir el logaritmo *antes* de diferenciar. Esto lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Reescritura de funciones logarítmicas antes de diferenciarlas

a. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $y = \ln(2x+5)^3$.

Solución: Aquí se tiene el logaritmo de una potencia. Primero se simplifica el lado derecho usando las propiedades de los logaritmos. Luego se diferencia para obtener

$$y = \ln(2x+5)^3 = 3\ln(2x+5) \quad \text{para } 2x+5>0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x+5}\right)(2) = \frac{6}{2x+5} \quad \text{para } x > -5/2$$

Al comparar ambos métodos, se nota que el más sencillo consiste en simplificar primero para después diferenciar.

En forma alternativa, si la simplificación no se realizara primero, se escribiría

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(2x+5)^3}\frac{d}{dx}((2x+5)^3)\\ &= \frac{1}{(2x+5)^3}(3)(2x+5)^2(2) = \frac{6}{2x+5}\end{aligned}$$

b. Encuentre $f'(p)$ si $f(p) = \ln((p+1)^2(p+2)^3(p+3)^4)$.

Solución: Se simplifica el lado derecho y luego se diferencia:

$$\begin{aligned}f(p) &= 2\ln(p+1) + 3\ln(p+2) + 4\ln(p+3)\\ f'(p) &= 2\left(\frac{1}{p+1}\right)(1) + 3\left(\frac{1}{p+2}\right)(1) + 4\left(\frac{1}{p+3}\right)(1)\\ &= \frac{2}{p+1} + \frac{3}{p+2} + \frac{4}{p+3}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 4 Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

a. Encuentre $f'(w)$ si $f(w) = \ln\sqrt{\dfrac{1+w^2}{w^2-1}}$.

Solución: Se simplifica usando las propiedades de los logaritmos y luego se diferencia:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2}(\ln(1+w^2) - \ln(w^2-1)) \\ f'(w) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+w^2}(2w) - \frac{1}{w^2-1}(2w)\right) \\ &= \frac{w}{1+w^2} - \frac{w}{w^2-1} = -\frac{2w}{w^4-1} \end{aligned}$$

b. Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln^3(2x+5)$.

Solución: El exponente 3 se refiere al cubo de $\ln(2x+5)$. Esto es,

$$f(x) = \ln^3(2x+5) = [\ln(2x+5)]^3$$

¡ADVERTENCIA!

No confunda $\ln^3(2x+5)$ con $\ln(2x+5)^3$, que apareció en el ejemplo 3(a). Se recomienda escribir $\ln^3(2x+5)$ explícitamente como $[\ln(2x+5)]^3$ y evitar $\ln^3(2x+5)$.

Por la regla de la potencia,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln(2x+5))^2\frac{d}{dx}(\ln(2x+5)) \\ &= 3(\ln(2x+5))^2\left(\frac{1}{2x+5}(2)\right) \\ &= \frac{6}{2x+5}(\ln(2x+5))^2 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39 ◁

Derivadas de funciones logarítmicas con base b

Para diferenciar una función logarítmica con base diferente a e, se puede convertir primero el logaritmo a logaritmos naturales por medio de la fórmula del cambio de base y luego diferenciar la expresión resultante. Por ejemplo, considere $y = \log_b u$, donde u es una función diferenciable de x. Según la fórmula del cambio de base,

$$y = \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b} \quad \text{para } u > 0$$

¡ADVERTENCIA!

Observe que $\ln b$ es solo una constante.

Al diferenciar, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln b}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln b}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

En resumen,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{para } u > 0}$$

En vez de memorizar esta regla, se sugiere recordar el procedimiento utilizado para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar $\log_b u$

Convierta $\log_b u$ a logaritmos naturales para obtener $\dfrac{\ln u}{\ln b}$ y luego diferencie.

EJEMPLO 5 Diferenciación de una función logarítmica con base 2

Diferencie $y = \log_2 x$.

Solución: De acuerdo con el procedimiento anterior, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{(\ln 2)x}$$

Vale la pena mencionar que la respuesta puede escribirse en términos de la base original. Debido a que

$$\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\dfrac{\log_b b}{\log_b e}} = \frac{\log_b e}{1} = \log_b e$$

es posible expresar $\dfrac{1}{(\ln 2)x}$ como $\dfrac{\log_2 e}{x}$. En forma más general, $\dfrac{d}{dx}(\log_b u) = \dfrac{\log_b e}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

APLÍQUELO ▶

2. La intensidad de un sismo se mide en la escala Richter. La lectura está dada por $R = \log \dfrac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad e I_0 es una intensidad mínima estándar. Si $I_0 = 1$, encuentre $\dfrac{dR}{dI}$, la razón de cambio de la lectura en la escala Richter con respecto a la intensidad.

EJEMPLO 6 Diferenciación de una función logarítmica con base 10

Si $y = \log(2x + 1)$, encuentre la razón de cambio de y con respecto a x.

Solución: La razón de cambio es dy/dx y la base implicada es 10. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(2x+1)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(2x+1)}{\ln 10}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2x+1}(2) = \frac{2}{\ln 10(2x+1)}$$

PROBLEMAS 8.1

En los problemas del 1 al 44, diferencie las funciones. Si es posible, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.

1. $y = a \ln x$
2. $y = \dfrac{5 \ln x}{9}$
3. $y = \ln(3x - 7)$
4. $y = \ln(5x - 6)$
5. $y = \ln x^2$
6. $y = \ln(5x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$
7. $y = \ln(1 - x^2)$
8. $y = \ln(-x^2 + 6x)$
9. $f(X) = \ln(4X^6 + 2X^3)$
10. $f(r) = \ln(2r^4 - 3r^2 + 2r + 1)$
11. $f(t) = t \ln t - t$
12. $y = x^2 \ln x$
13. $y = x^3 \ln(2x + 5)$
14. $y = (ax + b)^3 \ln(ax + b)$
15. $y = \log_3(8x - 1)$
16. $f(w) = \log(w^2 + 2w + 1)$
17. $y = x^2 + \log_2(x^2 + 4)$
18. $y = x^2 \log_2 x$
19. $f(z) = \dfrac{\ln z}{z}$
20. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$
21. $y = \dfrac{x^4 + 3x^2 + x}{\ln x}$
22. $y = \ln x^{100}$
23. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$
24. $y = 6 \ln \sqrt[3]{x}$
25. $y = 9 \ln \sqrt{1 + x^2}$
26. $f(t) = \ln\left(\dfrac{t^4}{1 + 6t + t^2}\right)$
27. $f(l) = \ln\left(\dfrac{1 + l}{1 - l}\right)$
28. $y = \ln\left(\dfrac{2x + 3}{3x - 4}\right)$
29. $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$
30. $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$
31. $y = \ln[(ax^2 + bx + c)^p(hx^2 + kx + l)^q]$
32. $y = \ln[(5x + 2)^4(8x - 3)^6]$
33. $y = 13 \ln\left(x^2 \sqrt[3]{5x + 2}\right)$
34. $y = 6 \ln \dfrac{x}{\sqrt{2x + 1}}$
35. $y = (x^2 + 1) \ln(2x + 1)$
36. $y = (ax^2 + bx + c) \ln(hx^2 + kx + l)$
37. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$
38. $y = x^{\ln 2}$
39. $y = \ln^4(ax)$
40. $y = \ln^2(2x + 11)$
41. $y = \ln \sqrt{f(x)}$
42. $y = \ln\left(x^3 \sqrt[4]{2x + 1}\right)$
43. $y = \sqrt{4 + 3 \ln x}$
44. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
45. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \ln(x^2 - 3x - 3)$$

cuando $x = 4$.

46. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x \ln x - x$$

en el punto donde $x = 1$.

47. Encuentre la pendiente de la curva $y = \dfrac{x}{\ln x}$ cuando $x = 3$.
48. **Ingreso marginal** Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = 25/\ln(q + 2)$.
49. **Costo marginal** Una función de costo total está dada por

$$c = 25 \ln(q + 1) + 12$$

Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$.

50. Costo marginal La función del costo promedio de un fabricante está dada por

$$\bar{c} = \frac{500}{\ln(q+20)}$$

Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando $q = 50$.

51. Cambio en la oferta La oferta de q unidades de un producto al precio p por unidad está dada por $q(p) = 27 + 11\ln(2p+1)$.

Encuentre la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio, $\dfrac{dq}{dp}$.

52. Percepción de sonido El nivel de un sonido L, medido en decibeles, percibido por el oído humano depende de los niveles de intensidad I de acuerdo con $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, donde I_0 es el umbral de audibilidad estándar. Si $I_0 = 17$, encuentre $\dfrac{dL}{dI}$, la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.

53. Biología En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por

$$A = 6\ln\left(\frac{T}{a-T} - a\right)$$

donde a es una constante y T es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de A con respecto a T.

54. Demuestre que la razón de cambio relativa de $y = f(x)$ con respecto a x es igual a la derivada de $y = \ln f(x)$.

55. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\log_b u) = \dfrac{1}{u}(\log_b e)\dfrac{du}{dx}$.

En los problemas 56 y 57, use las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces de $f'(x) = 0$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

56. $f(x) = x^3 \ln x$

57. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$

Objetivo

Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = e^u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función exponencial con base diferente a e.

8.2 Derivadas de funciones exponenciales

Tal como señalamos, las funciones exponenciales no se pueden construir a partir de funciones de potencias utilizando la multiplicación por una constante, operaciones aritméticas y la composición. Sin embargo, las funciones b^x, para $b > 0$ y $b \neq 1$, son inversas a las funciones $\log_b(x)$ y, si una función invertible f es diferenciable, resulta bastante fácil ver que su inversa también es diferenciable. La idea clave es que la gráfica de la inversa de una función se obtiene mediante la reflexión de la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Este proceso de reflexión conserva la suavidad de modo que si la gráfica de una función invertible es suave, entonces también lo es la gráfica de su inversa. Al diferenciar $f(f^{-1}(x)) = x$, resulta

$$\frac{d}{dx}(f(f^{-1}(x))) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$f'(f^{-1}(x))\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = 1 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Así, se tiene

REGLA COMBINADA 6 Regla de la función inversa

Si f es una función invertible y diferenciable, entonces f^{-1} es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Igual que con la regla de la cadena, la notación de Leibniz es muy adecuada para las funciones inversas. De hecho, si $y = f^{-1}(x)$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(f^{-1}(x))$ y ya que $f(y) = x$, $f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. Cuando se sustituyen estas ecuaciones en la regla combinada 6, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

de modo que la regla combinada 6 se puede reescribir como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}} \qquad (1)$$

En el caso inmediato de interés, con $y = e^x$ tal que $x = \ln y$ y $dx/dy = 1/y = 1/e^x$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

¡ADVERTENCIA!

La regla de la potencia no se aplica a e^x y otras funciones exponenciales, b^x. La regla de la potencia se aplica a funciones de potencias, x^a. Observe la ubicación de la variable.

lo cual se registra como

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{2}$$

Cuando u es una función diferenciable de x, una aplicación de la regla de la cadena da

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}} \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen e^x

a. Encuentre $\frac{d}{dx}(3e^x)$. Como 3 es un factor constante,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3e^x) &= 3\frac{d}{dx}(e^x)\\ &= 3e^x \qquad \text{por la ecuación (2)}\end{aligned}$$

Si un cociente puede reescribirse con facilidad como un producto, entonces es posible usar la regla del producto que, en cierta forma, es más sencilla que la regla del cociente.

b. Si $y = \frac{x}{e^x}$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

Solución: Se podría utilizar primero la regla del cociente y luego la ecuación (2), pero es un poco más fácil reescribir primero la función como $y = xe^{-x}$ y usar la regla del producto y la ecuación (3):

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(e^{-x}) = e^{-x}(1) + x(e^{-x})(-1) = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$$

c. Si $y = e^2 + e^x + \ln 3$, encuentre y'.

Solución: Como e^2 y $\ln 3$ son constantes, $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

3. Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, el cambio de la temperatura del objeto está dado por $T = Ce^{kt}$, donde C es la diferencia de temperatura de los dos entornos, t es el tiempo en el entorno nuevo y k es una constante. Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen e^u

a. Encuentre $\frac{d}{dx}\left(e^{x^3+3x}\right)$.

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$. No olvide $\frac{du}{dx}$.

Solución: La función tiene la forma e^u con $u = x^3 + 3x$. De la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{x^3+3x}\right) &= e^{x^3+3x}\frac{d}{dx}(x^3+3x) = e^{x^3+3x}(3x^2+3)\\ &= 3(x^2+1)e^{x^3+3x}\end{aligned}$$

b. Encuentre $\frac{d}{dx}(e^{x+1}\ln(x^2+1))$.

Solución: De acuerdo con la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{x+1}\ln(x^2+1)) &= e^{x+1}\frac{d}{dx}(\ln(x^2+1)) + (\ln(x^2+1))\frac{d}{dx}(e^{x+1})\\ &= e^{x+1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) + (\ln(x^2+1))e^{x+1}(1)\\ &= e^{x+1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1)\right)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

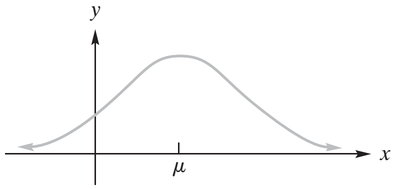


FIGURA 8.1 Función de densidad de la distribución normal.

EJEMPLO 3 Función de densidad de la distribución normal

Una función importante utilizada en las ciencias sociales es la **función de densidad de la distribución normal**

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}$$

donde σ (letra griega "sigma") y μ (letra griega "mu") son constantes. La gráfica de esta función, llamada curva normal, tiene forma de campana (vea la figura 8.1). Determine la razón de cambio de y con respecto a x cuando $x = \mu + \sigma$.

Solución: La razón de cambio de y con respecto a x es dy/dx. Se observa que el factor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ es una constante y que el segundo factor tiene la forma e^u, donde

$$u = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}\right)\left(-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$$

Al evaluar dy/dx cuando $x = \mu + \sigma$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\mu+\sigma} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(1/2)((\mu+\sigma-\mu)/\sigma)^2}\right)\left(-\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(1/2)}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right)\\ &= \frac{-e^{-(1/2)}}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{\sigma^2\sqrt{2\pi e}}\end{aligned}$$

◁

Diferenciación de funciones exponenciales con base *b*

Ahora que ya nos resulta familiar la derivada e^u, consideremos la derivada de la función exponencial más general b^u. Como $b = e^{\ln b}$, es posible expresar b^u como una función exponencial con base e, una forma que puede diferenciarse. Se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(b^u) &= \frac{d}{dx}((e^{\ln b})^u) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln b)u})\\ &= e^{(\ln b)u}\frac{d}{dx}((\ln b)u)\\ &= e^{(\ln b)u}(\ln b)\left(\frac{du}{dx}\right)\\ &= b^u(\ln b)\frac{du}{dx} \qquad \text{puesto que } e^{(\ln b)u} = b^u\end{aligned}$$

En resumen,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(b^u) = b^u(\ln b)\frac{du}{dx}} \tag{4}$$

Observe que si $b = e$, entonces el factor ln b de la ecuación (4) es igual a 1. Por lo tanto, si se usan funciones exponenciales con base e, se tendrá una fórmula de diferenciación más sencilla con la cual trabajar. Esta es una de las razones por las que las funciones exponenciales naturales se usan tan ampliamente en cálculo. En vez de memorizar la ecuación (4), se le sugiere recordar el procedimiento seguido para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar b^u

Convierta b^u en una función exponencial natural aprovechando la propiedad de que $b = e^{\ln b}$ y luego diferencie.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una función exponencial con base 4

Encuentre $\dfrac{d}{dx}(4^x)$.

Solución: Empleando el procedimiento anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4^x) &= \frac{d}{dx}((e^{\ln 4})^x)\\ &= \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln 4)x}\right) && \text{forma}: \frac{d}{dx}(e^u)\\ &= e^{(\ln 4)x}(\ln 4) && \text{según la ecuación (2)}\\ &= 4^x(\ln 4)\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

Verifique el resultado usando de manera directa la ecuación (4).

EJEMPLO 5 Diferenciación de formas distintas

Encuentre $\dfrac{d}{dx}\left(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}\right)$.

Solución: Aquí deben diferenciarse tres formas distintas; ¡no las confunda! La primera (e^2) es una base constante elevada a una potencia constante, por lo que es en sí misma una constante. Así, su derivada es igual a cero. La segunda (x^e) es una base variable elevada a una potencia constante, por lo que se aplica la regla de la potencia. La tercera ($2^{\sqrt{x}}$) es una base constante elevada a una potencia variable, de modo que se debe diferenciar una función exponencial. Reuniendo todo, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}\right) &= 0 + ex^{e-1} + \frac{d}{dx}\left[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}\right]\\ &= ex^{e-1} + \left[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}\right](\ln 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= ex^{e-1} + \frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

EJEMPLO 6 De nuevo, diferenciación de funciones de potencia

A menudo se ha usado la regla $d/dx(x^a) = ax^{a-1}$, pero solo se ha *probado* cuando a es un entero positivo y en algunos otros casos especiales. Al menos para $x > 0$, ahora podemos mejorar la comprensión de las funciones de potencia usando la ecuación (2).

Para $x > 0$, se puede escribir $x^a = e^{a\ln x}$. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{d}{dx}e^{a\ln x} = e^{a\ln x}\frac{d}{dx}(a\ln x) = x^a(ax^{-1}) = ax^{a-1}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

PROBLEMAS 8.2

En los problemas del 1 al 28, diferencie las funciones.

1. $y = 5e^x$

2. $y = \dfrac{ae^x}{b}$

3. $y = e^{2x^2+3}$

4. $y = e^{2x^2+5}$

5. $y = e^{9-5x}$

6. $f(q) = e^{-q^3+6q-1}$

7. $f(r) = e^{4r^3+5r^2+2r+6}$

8. $y = e^{x^2+6x^3+1}$

9. $y = xe^x$

10. $y = 3x^4e^{-x}$

11. $y = x^2e^{-x^2}$

12. $y = xe^{ax}$

13. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{3}$

14. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

15. $y = 5^{2x^3}$

16. $y = 2^x x^2$

17. $f(w) = \dfrac{e^{aw}}{w^2 + w + 1}$

18. $y = e^{x-\sqrt{x}}$

19. $y = e^{1+\sqrt{x}}$

20. $y = (e^{2x} + 1)^3$

21. $y = x^5 - 5^x$

22. $f(z) = e^{1/z}$

23. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

24. $y = e^{2x}(x + 6)$

25. $y = \ln e^x$

26. $y = e^{-x}\ln x$

27. $y = x^x$

28. $y = \ln e^{4x+1}$

29. Si $f(x) = ee^xe^{x^2}$, encuentre $f'(-1)$.

30. Si $f(x) = 5^{x^2 \ln x}$, encuentre $f'(1)$.

31. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ cuando $x = —2$.

32. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en el punto $(1, e)$. Demuestre que esta recta tangente pasa por $(0, 0)$ y que es la única recta tangente a $y = e^x$ que pasa por $(0, 0)$.

Para cada una de las ecuaciones de demanda presentadas en los problemas 33 y 34, encuentre la razón de cambio del precio p con respecto a la cantidad q. ¿Cuál es la razón de cambio para el valor indicado de q?

33. $p = 15e^{-0.001q}; q = 500$

34. $p = 9e^{-5q/750}; q = 300$

En los problemas 35 y 36, $\bar{c}$ es el costo promedio de producir q unidades de cierto artículo. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q.

35. $\bar{c} = \dfrac{7000e^{q/700}}{q}; q = 350, q = 700$

36. $\bar{c} = \dfrac{850}{q} + 4000\dfrac{e^{(2q+6)/800}}{q}; q = 97, q = 197$

37. Si $w = e^{x^2}$ y $x = \dfrac{t+1}{t-1}$, encuentre $\dfrac{dw}{dt}$ cuando $t = 2$.

38. Si $f'(x) = x^3$ y $u = e^x$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = e^{4x}$$

39. Determine el valor de la constante positiva c si

$$\frac{d}{dx}(c^x - x^c)\bigg|_{x=1} = 0$$

40. Calcule la razón de cambio relativa de

$$f(x) = 10^{-x} + \ln(8 + x) + 0.01e^{x-2}$$

cuando $x = 2$. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

41. Corrida de producción Para una empresa, la producción diaria en el día t de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t})$$

Encuentre la razón de cambio de la producción q con respecto a t en el décimo día.

42. Función de densidad normal Para la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

encuentre $f'(-1)$.

43. Población La población, en millones, del área más grande de Seattle dentro de t años, contados a partir de 1970, se estima por medio de $P = 1.92e^{0.0176t}$. Demuestre que $dP/dt = kP$, donde k es una constante. Esto significa que, en cualquier momento, la razón de cambio de la población es proporcional a la población existente en dicho momento.

44. Penetración de mercado En un análisis de la difusión de un nuevo proceso en un mercado, Hurter y Rubenstein[1] se refieren a una ecuación de la forma

$$Y = k\alpha^{\beta^t}$$

donde Y es el nivel acumulado de difusión del nuevo proceso en el tiempo t, y k, α y β son constantes positivas. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta^t}(\beta^t \ln\alpha)\ln\beta$$

45. Finanzas Después de t años, el valor S de un capital P que se invierte a una tasa anual r compuesta continuamente está dado por $S = Pe^{rt}$. Demuestre que la razón de cambio relativa de S con respecto a t es r.

46. Relación depredador-presa En un artículo sobre depredadores y presas, Holling[2] se refiere a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax})$$

donde x es la densidad de presas, y el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y)$$

47. Sismos De acuerdo con la escala Richter,[3] el número de temblores de magnitud M o superiores por cada unidad de tiempo está dado por $N = 10^A10^{-bM}$, donde A y b son constantes. Encuentre $\boldsymbol{dN/dM}$.

---

[1] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein *et al.*, "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), pp. 197-221.

[2] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), pp. 385-398.

[3] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

48. Psicología La retención a corto plazo fue estudiada por Peterson y Peterson.[4] Los dos investigadores analizaron un procedimiento en el que un experimentador daba verbalmente a una persona una sílaba de tres letras consonantes, por ejemplo, CHJ, seguida de un número de tres dígitos, como 309. La persona repetía entonces el número y contaba hacia atrás restando cada vez tres unidades, esto es, 309, 306, 303, … Después de cierto tiempo, se le pedía a la persona, por medio de una luz, recitar la sílaba de tres constantes. El intervalo de tiempo comprendido entre la terminación de la enunciación de la última consonante por el experimentador hasta la aparición de la luz se denominó *intervalo de evocación*. Al tiempo transcurrido entre la aparición de la luz y la terminación del enunciado de la respuesta se denominó *latencia*. Después de muchos ensayos, se determinó que para un intervalo de evocación de t segundos, la proporción aproximada de recuerdos correctos con latencia inferior a 2.83 segundos fue igual a

$$p = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t]$$

(a) Encuentre dp/dt e interprete su resultado.

(b) Evalúe dp/dt para $t = 2$. Redondee su respuesta a dos decimales.

49. Medicina Suponga que un indicador radiactivo, por ejemplo un tinte colorante, se inyecta instantáneamente al corazón en el tiempo $t = 0$ y se mezcla en forma uniforme con la sangre dentro del corazón. Sea C_0 la concentración inicial del indicador en el corazón y suponga que el corazón tiene un volumen constante V. También suponga que conforme fluye sangre fresca hacia el corazón, la mezcla diluida de sangre e indicador salen a una razón constante positiva de r. Entonces, en el instante t, la concentración del indicador en el corazón está dada por

$$C(t) = C_0 e^{-(r/V)t}$$

Demuestre que $dC/dt = (-r/V)C(t)$.

50. Medicina En el problema 49, suponga que el indicador radiactivo se inyecta a una razón constante R. Entonces la concentración en el instante t es

$$C(t) = \frac{R}{r}\left[1 - e^{-(r/V)t}\right]$$

(a) Encuentre $C(0)$.

(b) Demuestre que $\dfrac{dC}{dt} = \dfrac{R}{V} - \dfrac{r}{V}C(t)$.

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, uno de estos modelos es[5]

$$f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0.008t}$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta al final de t días de hospitalización. Encuentre la razón de altas (proporción de altas por día) al final de 100 días. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Ahorro y consumo El ahorro S de un país (en miles de millones) está relacionado con el ingreso nacional I (en miles de millones) mediante la ecuación

$$S = \ln \frac{3}{2 + e^{-I}}$$

(a) Encuentre la propensión marginal al consumo como una función del ingreso.

(b) Al millón más cercano, ¿cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de $\dfrac{1}{7}$?

En los problemas 53 y 54, utilice las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces reales de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

53. $f(x) = e^{2x^3+x^2-3x}$

54. $f(x) = x + e^{-x}$

8.3 Elasticidad de la demanda

Objetivo

Proporcionar un análisis matemático del concepto económico de elasticidad.

La *elasticidad de la demanda* es un medio por el cual los economistas miden cómo afecta un cambio en el precio de un producto la cantidad demandada. Esto es, se refiere a la respuesta del consumidor frente al cambio de precio. En términos informales, la elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual dado en el precio:

$$\frac{\text{cambio porcentual en la cantidad}}{\text{cambio porcentual en el precio}}$$

Por ejemplo, si para un incremento de 5% en el precio la cantidad demandada disminuye en 2%, se podría decir que la elasticidad de la demanda es $-2/5$.

En forma más general, suponga que $p = f(q)$ es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandarán q unidades a un precio de $f(q)$ por unidad y demandarán $q + h$ unidades a un precio de $f(q + h)$ por unidad (figura 8.2). El cambio *porcentual* en la cantidad demandada a partir de q hasta $q + h$ es

$$\frac{(q+h) - q}{q} \cdot 100\% = \frac{h}{q} \cdot 100\%$$

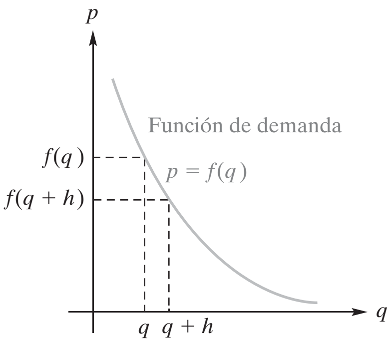


FIGURA 8.2 Cambio en la demanda.

El cambio porcentual correspondiente en el precio por unidad es

$$\frac{f(q+h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100\%$$

---

[4] L. R. Peterson y M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, 58 (1959), pp. 193-198.

[5] W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), pp. 273-292.

La razón de esos cambios porcentuales es

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{h}{q}\cdot 100\%}{\dfrac{f(q+h)-f(q)}{f(q)}\cdot 100\%} &= \frac{h}{q}\cdot\frac{f(q)}{f(q+h)-f(q)}\\ &= \frac{f(q)}{q}\cdot\frac{h}{f(q+h)-f(q)}\\ &= \frac{\dfrac{f(q)}{q}}{\dfrac{f(q+h)-f(q)}{h}} \qquad \textbf{(1)}\end{aligned}$$

Si f es diferenciable, entonces cuando $h \to 0$, el límite de $[f(q+h)-f(q)]/h$ es $f'(q) = dp/dq$. Así, el límite de (1) es

$$\frac{\dfrac{f(q)}{q}}{f'(q)} = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} \qquad \text{puesto que } p = f(q)$$

la cual se llama *elasticidad puntual de la demanda*.

Definición

Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la ***elasticidad puntual de la demanda***, denotada por la letra griega η (eta), en (q, p) está dada por

$$\eta = \eta(q) = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}}$$

¡ADVERTENCIA!

Como p es una función de q, dp/dq es una función de q y entonces la razón que define η es una función de q. Es por ello que se escribe $\eta = \eta(q)$.

A manera de ilustración, se encontrará la elasticidad puntual de la demanda para la función de demanda $p = 1200 — q^2$. Se tiene

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{1200-q^2}{q}}{-2q} = -\frac{1200-q^2}{2q^2} = -\left(\frac{600}{q^2}-\frac{1}{2}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Por ejemplo, si $q = 10$, entonces $\eta = -\left((600/10^2) - \frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}$. Como

$$\eta \approx \frac{\text{cambio porcentual en la demanda}}{\text{cambio porcentual en el precio}}$$

se tiene

$$(\text{cambio porcentual en el precio})(\eta) \approx \text{cambio porcentual en la demanda}$$

Por lo tanto, si el precio se incrementa en 1% cuando $q = 10$, entonces la cantidad demandada cambiaría en aproximadamente

$$(1\%)\left(-5\frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}\%$$

Esto es, la demanda disminuiría en $5\frac{1}{2}\%$. De manera análoga, una disminución en el precio de $\frac{1}{2}\%$ cuando $q = 10$ resulta en un cambio aproximado en la demanda de

$$\left(-\frac{1}{2}\%\right)\left(-5\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}\%$$

De modo que la demanda se incrementa en $2\frac{3}{4}\%$.

Note que cuando se evalúa la elasticidad, no interviene unidad alguna —es tan solo un número real—. De hecho, los 100% provenientes de la palabra *porcentaje* se cancelan, por lo tanto la elasticidad es realmente una aproximación de la razón

$$\frac{\text{cambio relativo en la cantidad}}{\text{cambio relativo en el precio}}$$

y cada uno de los cambios relativos no es más que un número real. Para un comportamiento común de la demanda, un incremento (disminución) en el precio corresponde a una disminución (incremento) en la cantidad. Esto significa que si el precio se grafica como una función de la cantidad, entonces la gráfica tendrá una pendiente negativa en cada punto. Así, de manera típica, dp/dq será negativa y, como p y q son positivas, η será negativa también. Algunos economistas no toman en cuenta el signo menos; en la situación anterior ellos considerarían la elasticidad igual a $5\frac{1}{2}$. Aquí no se adoptará esta práctica.

Hay tres categorías de elasticidad:

1. Cuando $|\eta| > 1$, la demanda es *elástica*.
2. Cuando $|\eta| = 1$, la demanda tiene *elasticidad unitaria*.
3. Cuando $|\eta| < 1$, la demanda es *inelástica*.

Por ejemplo, en la ecuación (2), como $|\eta| = 5\frac{1}{2}$ cuando $q = 10$, la demanda es elástica. Si $q = 20$, entonces $|\eta| = \left|-\left[(600/20^2) - \frac{1}{2}\right]\right| = 1$, por lo que la demanda tiene elasticidad unitaria. Si $q = 25$, entonces $|\eta| = \left|-\frac{23}{50}\right|$ y la demanda es inelástica.

En términos informales, para un cambio porcentual dado en el precio, hay un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada si la demanda es elástica, un cambio porcentual menor si la demanda es inelástica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria. Para entender mejor la elasticidad, resulta útil pensar en ejemplos típicos. La demanda para un bien esencial como la electricidad tiende a ser inelástica para un amplio rango de precios. Si los precios de la electricidad se incrementan 10%, se puede esperar que los consumidores reduzcan su consumo de alguna forma, pero una reducción del 10% no puede ser posible si la mayor parte de la electricidad que usan es para cubrir necesidades esenciales de la vida como calefacción y preparación de comida. Por otro lado, la demanda para bienes de lujo tiende a ser bastante elástica. Por ejemplo, un incremento de 10% en el precio de la joyería puede resultar en 50% de disminución en la demanda.

EJEMPLO 1 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$p = \frac{k}{q}, \quad \text{donde } k > 0 \text{ y } q > 0$$

Solución: A partir de la definición, se tiene

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}} = -1$$

Así, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda $q > 0$. La gráfica de $p = k/q$ se llama *hipérbola equilátera* y suele encontrarse en textos de economía en los análisis de elasticidad. (Vea en la figura 2.11 una gráfica de tal curva).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Si se tiene que $p = f(q)$ para la ecuación de demanda, como en el análisis realizado hasta ahora, entonces casi siempre resulta directo calcular $dp/dq = f'(q)$. Sin embargo, cuando en lugar de esto se tiene q como una función de p, entonces se tendrá $q = f^{-1}(p)$ y, con base en la sección 8.2,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}}$$

Se deduce que

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \tag{3}$$

lo que proporciona otra expresión útil para η. Observe también que si $q = g(p)$, entonces

$$\eta = \eta(p) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{g(p)} \cdot g'(p) = p \cdot \frac{g'(p)}{g(p)}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{gathered}\text{elasticidad} = \text{precio} \cdot \text{razón de cambio relativa} \\ \text{de la cantidad como una función del precio}\end{gathered} \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$q = p^2 - 40p + 400, \quad \text{donde } q > 0$$

Solución: Aquí, se tiene q dada como una función de p y es fácil ver que $dq/dp = 2p - 40$. Así,

$$\eta(p) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q(p)}(2p - 40)$$

Por ejemplo, si $p = 15$, entonces $q = q(15) = 25$; por lo tanto, $\eta(15) = (15(-10))/25 = -6$, por lo que la demanda es elástica para $p = 15$.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

Aquí se analiza la elasticidad para una demanda lineal.

La elasticidad puntual para una ecuación de demanda lineal es muy interesante. Suponga que la ecuación tiene la forma

$$p = mq + b, \quad \text{donde } m < 0 \text{ y } b > 0$$

(Vea la figura 8.3). Se supone que $q > 0$; así, $p < b$. La elasticidad puntual de la demanda es

$$\eta = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{dp}{dq}} = \frac{\dfrac{p}{q}}{m} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p - b}$$

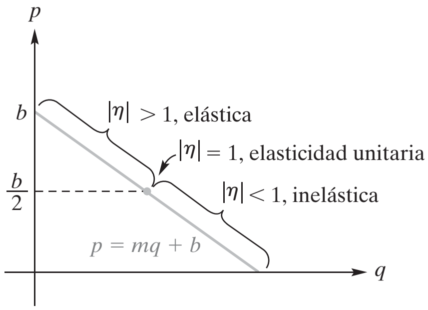


FIGURA 8.3 Elasticidad para la demanda lineal.

Al considerar $d\eta/dp$, se demostrará que η es una función decreciente de p. Por la regla del cociente,

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{(p - b) - p}{(p - b)^2} = -\frac{b}{(p - b)^2}$$

Como $b > 0$ y $(p - b)^2 > 0$, entonces $d\eta/dp < 0$, lo cual significa que la gráfica de $\eta = \eta(p)$ tiene una pendiente negativa. Por lo tanto, cuando el precio p se incrementa, la elasticidad η disminuye. Sin embargo, p varía entre 0 y b y en el punto medio del intervalo, $b/2$,

$$\eta = \eta(b) = \frac{\dfrac{b}{2}}{\dfrac{b}{2} - b} = \frac{\dfrac{b}{2}}{-\dfrac{b}{2}} = -1$$

Por lo tanto, si $p < b/2$, entonces $\eta > -1$; si $p > b/2$, entonces $\eta < -1$. Como de manera típica se tiene $\eta < 0$, estos factores pueden establecerse de una forma diferente: cuando $p < b/2$, $|\eta| < 1$ y la demanda es inelástica; cuando $p = b/2$, $|\eta| = 1$ y la demanda tiene elasticidad unitaria; cuando $p > b/2$, $|\eta| > 1$ y la demanda es elástica. Esto muestra que la pendiente de una curva de demanda no es una medida de la elasticidad. En la figura 8.3, la pendiente de la recta es m en todas partes, pero la elasticidad varía con el punto sobre la recta. Por supuesto, lo anterior está de acuerdo con la ecuación (4).

Elasticidad e ingreso

Aquí se analiza la relación entre la elasticidad y la tasa de cambio del ingreso.

Pasando a una situación diferente, se puede establecer cómo afecta la elasticidad de la demanda a los cambios en el ingreso (ingreso marginal). Si $p = f(q)$ es la función de demanda de un fabricante, el ingreso total está dado por

$$r = pq$$

Para encontrar el ingreso marginal, dr/dq, se diferencia r usando la regla del producto:

$$\frac{dr}{dq} = p + q\frac{dp}{dq} \tag{5}$$

Al factorizar el lado derecho de la ecuación (5), se tiene

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right)$$

Pero

$$\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}$$

Por lo que,

$$\boxed{\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)} \tag{6}$$

Si la demanda es elástica, entonces $\eta < -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} > 0$. Si la demanda es inelástica, entonces $\eta > -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} < 0$. Suponga que $p > 0$. De la ecuación (6) se puede concluir que $dr/dq > 0$ en los intervalos donde la demanda es elástica. Tal como se verá pronto, una función es creciente en intervalos para los cuales su derivada es positiva y es decreciente en los intervalos donde su derivada es negativa. Por lo tanto, el ingreso total r es creciente en los intervalos donde la demanda es elástica y es decreciente en los intervalos donde la demanda es inelástica.

Así, del análisis anterior se concluye que entre más unidades se vendan, el ingreso total de un fabricante crece si la demanda es elástica, pero disminuye si la demanda es inelástica. Esto es, si la demanda es elástica, un precio menor aumentará el ingreso, ello significa que un precio menor ocasionará un incremento lo suficientemente grande en la demanda como para hacer crecer el ingreso. Si la demanda es inelástica, un precio menor hará disminuir el ingreso. Para una elasticidad unitaria, un precio menor deja sin cambio el ingreso total.

Si se resuelve la ecuación de la demanda para obtener la forma $q = g(p)$, en vez de $p = f(q)$, entonces un análisis similar da

$$\boxed{\frac{dr}{dp} = q(1 + \eta)} \tag{7}$$

y las conclusiones del último párrafo se deducen de manera aún más directa.

PROBLEMAS 8.3

En los problemas del 1 al 14, encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria.

1. $p = 40 - 2q$; $q = 5$

2. $p = 10 - 0.04q$; $q = 100$

3. $p = \dfrac{3000}{q}$; $q = 300$

4. $p = \dfrac{500}{q^2}$; $q = 52$

5. $p = \dfrac{500}{q+2}$; $q = 104$

6. $p = \dfrac{800}{2q+1}$; $q = 24$

7. $p = 150 - e^{q/100}$; $q = 100$

8. $p = 250e^{-q/50}$; $q = 50$

9. $q = 1200 - 150p$; $p = 4$

10. $q = 100 - p$; $p = 50$

11. $q = \sqrt{500 - p}$; $p = 400$

12. $q = \sqrt{2500 - p^2}$; $p = 20$

13. $q = (p - 50)^2$; $p = 10$

14. $q = p^2 - 50p + 850$; $p = 20$

15. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 — 0.05q$, verifique si la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$ y si tiene elasticidad unitaria cuando $p = 6.50$.

16. ¿Para qué valor (o valores) de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

(a) $p = 36 - 0.25q$
(b) $p = 300 - q^2$

17. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = 500 - 40p + p^2$$

donde p es el precio por unidad y q es la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 15$. Si este precio de 15 se incrementa en $\frac{1}{2}$%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

18. La ecuación de la demanda para cierto producto es

$$q = \sqrt{3000 - p^2}$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda si el precio de \$40 (dólares estadounidenses) aumenta en 7 por ciento.

19. Para la ecuación de demanda $p = 500 - 2q$, verifique si la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para $0 < q < 125$. Compruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente para $125 < q < 250$.

20. Verifique si $\dfrac{dr}{dq} = p\left(1 + \dfrac{1}{\eta}\right)$ si $p = 50 - 3q$.

21. Repita el problema 20 para $p = \dfrac{1000}{q^2}$.

22. Suponga que $p = mq + b$ es una ecuación de demanda lineal, donde $m \neq 0$ y $b > 0$.
(a) Demuestre que $\text{lím}_{p \to b^-} = -\infty$.
(b) Demuestre que $\eta = 0$ cuando $p = 0$.

23. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$q = a\sqrt{b - cp^2}$$

donde a, b y c son constantes positivas.
(a) Demuestre que la elasticidad no depende de a.
(b) Determine el intervalo de precios para el que la demanda es elástica.
(c) ¿Para qué precio existe elasticidad unitaria?

24. Dada la ecuación de demanda $q^2(1 + p)^2 = p$, determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 9$.

25. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3)$$

(a) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 4$ y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.
(b) Si el precio disminuye en 2% (de \$4.00 a \$3.92), use la respuesta al inciso (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.
(c) ¿Resultarán los cambios del inciso (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

26. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 50(151 - q)^{0.02\sqrt{q+19}}$$

(a) Encuentre el valor de dp/dq cuando se demandan 150 unidades.
(b) Con el resultado del inciso (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 150 unidades. A este nivel, ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?
(c) Use el resultado del inciso (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 150 a 140 unidades.
(d) Si la demanda actual es de 150 unidades, ¿debe el fabricante aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (Justifique su respuesta).

27. Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de \$80 por unidad. Si el precio se reduce a \$75 por unidad, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la elasticidad actual de la demanda para las puertas y también el valor actual de la función de ingreso marginal del fabricante.

28. Dada la ecuación de demanda

$$p = 2000 - q^2$$

donde $5 \leq q \leq 40$, ¿para qué valor de q es $|\eta|$ un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?

29. Repita el problema 28 para

$$p = \frac{200}{q + 5}$$

tal que $5 \leq q \leq 95$.

8.4 Diferenciación implícita

Objetivo

Estudiar la noción de una función definida de manera implícita y determinar derivadas por medio de la diferenciación implícita.

La diferenciación implícita es una técnica utilizada para diferenciar funciones que no están dadas en la forma usual $y = f(x)$ [ni en la forma $x = g(y)$]. Para introducir esta técnica, se encontrará la pendiente de una recta tangente a un círculo. Considere el círculo de radio 2 cuyo centro está en el origen (figura 8.4). Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

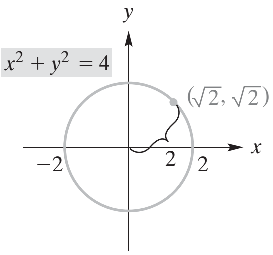


FIGURA 8.4 El círculo $x^2 + y^2 = 4$.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se encuentra sobre el círculo. Para encontrar la pendiente en este punto es necesario encontrar dy/dx ahí. Hasta ahora, se ha tenido a y en forma explícita (directa) en términos de x antes de determinar y'; esto es, en la forma $y = f(x)$ [o en la forma $x = g(y)$]. En la ecuación (1) de esta sección, esto no es así. Se dice que la ecuación (1) tiene la forma $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ denota una función de dos variables como la introducida en la sección 2.8. Parece obvio que debe despejarse y de la ecuación (1) en términos de x:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad (2)$$

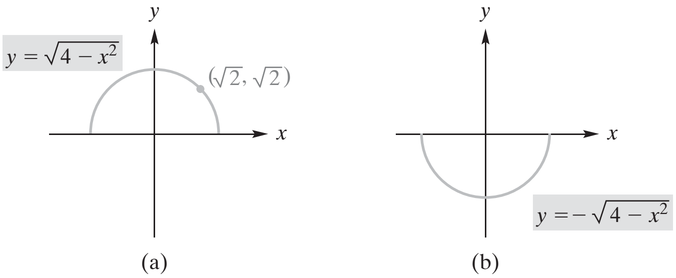


FIGURA 8.5 $x^2 + y^2 = 4$ da lugar a dos funciones diferentes.

Ahora se presenta un problema: la ecuación (2) puede dar dos valores de y para un solo valor de x. No define a y de manera explícita en función de x. Sin embargo, se puede suponer que la ecuación (1) define a y como una de dos funciones diferentes de x,

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

cuyas gráficas se muestran en la figura 8.5. Como el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se encuentra sobre la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$, se debe diferenciar esa función:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

Entonces

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = -1$$

Así que la pendiente del círculo $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ubicada en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es igual a -1.

A continuación se resumen las dificultades que se han presentado. Primero, y no se dio al principio de manera explícita en términos de x. Segundo, después de que se trató de encontrar alguna relación, se terminó con más de una función de x. De hecho, dependiendo de la ecuación dada, puede ser complicado o incluso imposible encontrar una expresión explícita para y. Por ejemplo, sería difícil despejar a y de la ecuación $ye^x + \ln(x + y) = 0$. Ahora se considerará un método que evita todas estas dificultades.

Una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, como la que se tenía originalmente, expresa a y como función de x en forma *implícita*. La palabra *implícita* se usa puesto que y no está dada de manera explícita como función de x. Sin embargo, se supone o queda *implícito* que la ecuación define a y por lo menos como una función diferenciable de x. Asumimos entonces que la ecuación (1), $x^2 + y^2 - 4 = 0$, define alguna función diferenciable de x, digamos, $y = f(x)$. A continuación, se trata a y como una función de x y se diferencian ambos lados de la ecuación (1) con respecto a x. Por último, se despeja dy/dx del resultado. Al aplicar este procedimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) &= \frac{d}{dx}(0) \\ \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) &= \frac{d}{dx}(0) \qquad (3) \end{aligned}$$

Se sabe que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ y que tanto $\frac{d}{dx}(4)$ y $\frac{d}{dx}(0)$ son 0. Pero $\frac{d}{dx}(y^2)$ **no** es $2y$, porque se está diferenciando con respecto a x y no con respecto a y. Esto es, y no es la variable independiente. Como se supone que y es una función de x, y^2 tiene la forma u^n, donde y desempeña el papel de u. Así como la regla de la potencia establece que $\frac{d}{dx}(u^2) = 2u\frac{du}{dx}$, se tiene que $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$. De modo que la ecuación (3) se transforma en

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Al despejar dy/dx, resulta

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{para } y \neq 0 \tag{4}$$

Observe que la expresión para dy/dx contiene tanto la variable y como la variable x. Esto significa que para encontrar dy/dx en un punto, ambas coordenadas del punto deben sustituirse en dy/dx. Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

como antes. Este método para encontrar dy/dx se llama **diferenciación implícita**. Se observa que la ecuación (4) no está definida cuando $y = 0$. De manera geométrica, esto es claro, puesto que la recta tangente al círculo en (2, 0) o (−2, 0) es vertical y, por lo tanto, la pendiente no está definida.

A continuación se dan los pasos a seguir para diferenciar de manera implícita:

Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que supuestamente define a y de manera implícita como una función diferenciable de x, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como sigue:

1. Diferencie ambos lados de la ecuación con respecto a x.
2. Agrupe todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación y agrupe los demás términos en el otro lado.
3. Obtenga $\frac{dy}{dx}$ como factor común en el lado que contenga los términos $\frac{dy}{dx}$.
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$, tomando en cuenta cualesquiera restricciones.

EJEMPLO 1 Diferenciación implícita

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por diferenciación implícita si $y + y^3 - x = 7$.

Solución: Aquí y no está dada como función explícita de x [esto es, no está en la forma $y = f(x)$]. Por lo anterior, se supone que y es una función implícita (diferenciable) de x y se aplica el procedimiento previo de cuatro pasos:

1. Al diferenciar ambos lados con respecto a x, se tiene

$$\frac{d}{dx}(y + y^3 - x) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7)$$

¡ADVERTENCIA!

La derivada de y^3 con respecto a x es $3y^2\frac{dy}{dx}$, no $3y^2$.

Ahora, $\frac{d}{dx}(y)$ puede escribirse como $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Por la regla de la potencia,

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

Por consiguiente, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

2. Al agrupar todos los términos $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo y los demás en el lado derecho, resulta

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

3. Al factorizar $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo, se tiene

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1$$

4. Se despeja $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados entre $1 + 3y^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}$$

En un problema de diferenciación implícita, se tiene la capacidad de encontrar la derivada de una función sin conocer la función.

Debido a que frecuentemente el paso 4 del proceso implica la división entre una expresión que contiene a las variables, la respuesta obtenida debe restringirse para excluir aquellos valores de las variables que harían al denominador igual a cero. Aquí, el denominador siempre es mayor o igual que 1, de manera que no hay restricción.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

4. Suponga que P, la proporción de gente afectada por cierta enfermedad, se describe por medio de $\ln\left(\frac{P}{1-P}\right) = 0.5t$, donde t es el tiempo en meses. Encuentre $\frac{dP}{dt}$, la razón a la cual crece P con respecto al tiempo.

EJEMPLO 2 Diferenciación implícita

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

Solución: Como y no está dada de manera explícita en términos de x, se utiliza el método de diferenciación implícita:

1. Al suponer que y es una función de x y diferenciar ambos lados con respecto a x, resulta

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4xy^2 - 27) = \frac{d}{dx}(y^4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(27) = \frac{d}{dx}(y^4)$$

Para encontrar $\frac{d}{dx}(xy^2)$, se utiliza la regla del producto:

$$3x^2 + 4\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 0 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 4\left[x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)\right] = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

2. Al agrupar los términos $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo y los otros términos en el lado derecho, se obtiene

$$8xy\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2$$

3. Factorizando $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo resulta

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2$$

4. Al despejar $\frac{dy}{dx}$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}$$

lo cual da el valor de dy/dx en los puntos (x, y) para el cual $4y^3 - 8xy \neq 0$.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 3 Diferenciación implícita

Encuentre la pendiente de la curva $x^3 = (y - x^2)^2$ en (1, 2).

Solución: La pendiente en (1, 2) es el valor de dy/dx en ese punto. Para encontrar dy/dx por diferenciación implícita, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3) &= \frac{d}{dx}[(y-x^2)^2] \\
3x^2 &= 2(y-x^2)\left(\frac{dy}{dx} - 2x\right) \\
3x^2 &= 2\left(y\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3\right) \\
3x^2 &= 2y\frac{dy}{dx} - 4xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 4x^3 \\
3x^2 + 4xy - 4x^3 &= 2y\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy}{dx} \\
3x^2 + 4xy - 4x^3 &= 2\frac{dy}{dx}(y - x^2) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y-x^2)} \qquad \text{para } y - x^2 \neq 0
\end{aligned}$$

Para el punto (1, 2), $y - x^2 = 2 - 1^2 = 1 \neq 0$. Así, la pendiente de la curva en (1, 2) es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2(2-(1)^2)} = \frac{7}{2}$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

APLÍQUELO ▶

5. El volumen V contenido en un globo esférico de radio r está dado por la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radio está creciendo a una velocidad de 5 pulgadas por minuto (esto es, $\frac{dr}{dt} = 5$), entonces encuentre $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=12}$, la razón de aumento del volumen del globo, cuando el radio es de 12 pulgadas.

EJEMPLO 4 Diferenciación implícita

Si $q - p = \ln q + \ln p$, encuentre dq/dp.

Solución: Se supone que q es una función de p y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a p:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) &= \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p) \\
\frac{dq}{dp} - 1 &= \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{p} \\
\frac{dq}{dp} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} &= \frac{1}{p} + 1 \\
\frac{dq}{dp}\left(1 - \frac{1}{q}\right) &= \frac{1}{p} + 1 \\
\frac{dq}{dp}\left(\frac{q-1}{q}\right) &= \frac{1+p}{p} \\
\frac{dq}{dp} &= \frac{(1+p)q}{p(q-1)} \qquad \text{para } p(q-1) \neq 0
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

APLÍQUELO ▶

6. Una escalera de 10 pies de largo está recargada en una pared vertical. Suponga que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad constante de 3 pies/s. (Esto es, $\frac{dx}{dt} = 3$). ¿Qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera cuando esa parte se encuentra a 8 pies del suelo (es decir, cuando $\frac{dy}{dt}$)? (Utilice el teorema de Pitágoras para calcular triángulos rectángulos, $x^2 + y^2 = z^2$, donde x y y son los catetos del triángulo y z es la hipotenusa).

PROBLEMAS 8.4

En los problemas del 1 al 24, encuentre dy/dx mediante diferenciación implícita.

1. $x^2 + 4y^2 = 4$

2. $3x^2 + 6y^2 = 1$

3. $2y^3 - 7x^2 = 5$

4. $5y^2 - 2x^2 = 10$

5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$

6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4$

7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$

8. $y^3 = 4x$

9. $xy = 36$

10. $x^2 + xy - 2y^2 = 0$

11. $xy - y - 11x = 5$

12. $x^3 - y^3 = 3x^2y - 3xy^2$

13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$

14. $5x^3 + 6xy + 7y^3 = 0$

15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[4]{y}$

16. $x^3y^3 + x = 9$

17. $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$

18. $y^2 + y = \ln x$

19. $\ln(xy) = e^{xy}$

20. $\ln(xy) + x = 4$

21. $xe^y + y = 13$

22. $4x^2 + 9y^2 = 16$

23. $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y)$

24. $e^{x-y} = \ln(x - y)$

25. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre dy/dx en $(1, 2)$.

26. Si $x\sqrt{y+1} = y\sqrt{x+1}$, encuentre dy/dx en $(3, 3)$.

27. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$; en el punto (x_0, y_0).

28. Encuentre la pendiente de la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$ en el punto $(0, 2)$.

29. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x^3 + xy + y^3 = -1$$

en los puntos $(-1, -1)$, $(-1, 0)$ y $(-1, 1)$.

30. Repita el problema 29 para la curva

$$y^2 + xy - x^2 = 5$$

en el punto $(4, 3)$.

Para las ecuaciones de demanda presentadas en los problemas del 31 al 34, encuentre la razón de cambio de q con respecto a p.

31. $p = 100 - q^2$

32. $p = 400 - \sqrt{q}$

33. $p = \dfrac{20}{(q+5)^2}$

34. $p = \dfrac{3}{q^2 + 1}$

35. Radiactividad La actividad relativa I/I_0 de un elemento radiactivo varía con el tiempo transcurrido de acuerdo con la ecuación

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\lambda t$$

donde λ (letra griega "lambda") es la constante de desintegración e I_0 es la intensidad inicial (una constante). Encuentre la razón de cambio de la intensidad I con respecto al tiempo transcurrido t.

36. Sismos La magnitud M de un sismo y su energía E están relacionadas por la ecuación[6]

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right)$$

Aquí M está dada en términos de la escala preferida de Richter de 1958 y E está en ergios. Determine la razón de cambio de la energía con respecto a la magnitud y la razón de cambio de la magnitud con respecto a la energía.

37. Escala física La relación entre la velocidad (v), la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) de cualquier onda está dada por

$$v = f\lambda$$

Encuentre $df/d\lambda$ por diferenciación implícita. (Trate a v como una constante). Luego demuestre que se obtiene el mismo resultado si primero se despeja f y enseguida se diferencia con respecto a λ.

38. Biología La ecuación $(P + a)(v + b) = k$ se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[7] Aquí P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad del acortamiento de las fibras del músculo y a, b y k son constantes positivas. Use diferenciación implícita para mostrar que, en términos de P,

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{k}{(P+a)^2}$$

39. Propensión marginal al consumo Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = SI + I$$

donde S e I están en miles de millones. Encuentre la propensión marginal al consumo cuando $I = 16$ y $S = 12$.

40. Sustitución tecnológica Con frecuencia, las tecnologías o productos nuevos tienden a reemplazar a los viejos equipamientos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores a chorro en vez de motores de propulsión. En su análisis de pronósticos de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein[8] se refieren a la ecuación

$$\ln\frac{f(t)}{1 - f(t)} + \sigma\frac{1}{1 - f(t)} = C_1 + C_2 t$$

donde $f(t)$ es la participación en el mercado de un artículo sustituto en un tiempo t y C_1, C_2 y σ ("sigma") son constantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución es

$$f'(t) = \frac{C_2 f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}$$

Objetivo

Describir el método de diferenciación logarítmica y mostrar cómo diferenciar una función de la forma u^v.

8.5 Diferenciación logarítmica

Existe una técnica llamada **diferenciación logarítmica** que con frecuencia simplifica la diferenciación de $y = f(x)$ cuando $f(x)$ contiene productos, cocientes o potencias. El proce-

---

[6] K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1963).

[7] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[8] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein *et al.*, "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), pp. 197-221.

dimiento es como sigue:

Diferenciación logarítmica

Para diferenciar $y = f(x)$,

1. Obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación. Esto resulta en
$$\ln y = \ln(f(x))$$
2. Simplifique $\ln(f(x))$ usando las propiedades de los logaritmos.
3. Diferencie ambos lados con respecto a x.
4. Despeje $\dfrac{dy}{dx}$.
5. Exprese la respuesta solo en términos de x. Esto requiere sustituir $f(x)$ por y.

Existe un par de puntos útiles. Primero, independientemente de cualquier simplificación, el procedimiento produce

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))$$

de manera que

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dx}(\ln(f(x))$$

es una fórmula que puede memorizarse, si usted lo prefiere. Segundo, la cantidad $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, que resulta de diferenciar $\ln(f(x))$, es lo que se llama *tasa relativa de cambio de* $f(x)$ en la sección 7.3.

El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 1 Diferenciación logarítmica

Encuentre y' si $y = \dfrac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$.

Solución: La diferenciación de esta función en la manera usual resulta engorrosa porque implica las reglas del cociente, de la potencia y del producto. La diferenciación logarítmica simplifica el trabajo.

1. Se obtiene el logaritmo natural en ambos lados
$$\ln y = \ln \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$
2. Al simplificar mediante las propiedades de los logaritmos, se tiene
$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(2x-5)^3 - \ln\left(x^2\sqrt[4]{x^2+1}\right)\\ &= 3\ln(2x-5) - (\ln x^2 + \ln(x^2+1)^{1/4})\\ &= 3\ln(2x-5) - 2\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\end{aligned}$$
3. Al diferenciar con respecto a x, resulta
$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= 3\left(\frac{1}{2x-5}\right)(2) - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)\\ &= \frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$
4. Al despejar y' se obtiene
$$y' = y\left(\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right)$$

¡ADVERTENCIA!

Como y es una función de x, al diferenciar $\ln y$ con respecto a x se obtiene $\dfrac{y'}{y}$.

5. Al sustituir la expresión inicial para y se obtiene y' solo en términos de x:

$$y' = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right]$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

La diferenciación logarítmica puede usarse también para diferenciar funciones de la forma $y = u^v$, donde u y v son funciones diferenciables de x. Como la base y el exponente no necesariamente son constantes, aquí no se aplican las técnicas de diferenciación para u^n y a^u.

EJEMPLO 2 Diferenciación de la forma u^v

Diferencie $y = x^x$ usando la diferenciación logarítmica.

Solución: Este ejemplo es un buen candidato para aplicar la *fórmula* que aproxima la diferenciación logarítmica.

$$y' = y\frac{d}{dx}(\ln x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x\left((1)(\ln x) + (x)\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma $y = u^v$ es convertirla en una función exponencial con base e. A manera de ilustración, para la función de este ejemplo, se tiene

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$

$$y' = e^{x\ln x}\left(1\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

EJEMPLO 3 Tasa relativa de cambio de un producto

Demuestre que la tasa relativa de cambio de un producto es la suma de las tasas relativas de cambio de sus factores. Use este resultado para expresar la tasa porcentual de cambio de los ingresos en términos de la tasa porcentual de cambio en el precio.

Solución: Recuerde que la tasa relativa de cambio de una función r es $\frac{r'}{r}$. Se demostrará que si $r = pq$, entonces $\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}$. A partir de $r = pq$ se tiene $\ln r = \ln p + \ln q$, lo cual, al diferenciar ambos lados resulta en

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}$$

como se requería. Cuando se multiplican ambos lados por 100% se obtiene una expresión para la tasa porcentual de cambio de r en términos de las tasas de p y q:

$$\frac{r'}{r}100\% = \frac{p'}{p}100\% + \frac{q'}{q}100\%$$

Si p es el *precio* por artículo y q es la *cantidad* vendida, entonces $r = pq$ es el *ingreso* total. En este caso se toma la diferenciación con respecto a p y observe que ahora $\frac{q'}{q} = \eta\frac{p'}{p}$

, donde η es la elasticidad de la demanda tal como vimos en la sección 8.3. Se deduce que, en este caso, se tiene

$$\frac{r'}{r}100\% = (1+\eta)\frac{p'}{p}100\%$$

expresando la tasa porcentual de cambio del ingreso en términos de la tasa porcentual de cambio en el precio. Por ejemplo, si a un precio y a una cantidad dados, $\eta = -5$, entonces un aumento de 1% en el precio resultará en un incremento de $(1 - 5)\% = -4\%$ en el ingreso, que es igual a decir 4% de *disminución* en el ingreso, mientras que una disminución de 3% en el precio —es decir, un *aumento* de -3% en el precio— resultará en un aumento de $(1 – 5)(-3)\% = 12\%$ en el ingreso. También resulta claro que en los puntos donde existe elasticidad unitaria ($\eta = -1$), cualquier cambio porcentual en el precio no produce ningún cambio porcentual en el ingreso.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

EJEMPLO 4 Diferenciación de la forma u^v

Encuentre la derivada de $y = (1 + e^x)^{\ln x}$.

Solución: Esto tiene la forma $y = u^v$, donde $u = 1 + e^x$ y $v = \ln x$. Mediante diferenciación logarítmica, se tiene

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left((1 + e^x)^{\ln x}\right) \\
\ln y &= (\ln x) \ln (1 + e^x) \\
\frac{y'}{y} &= \left(\frac{1}{x}\right)(\ln (1 + e^x)) + (\ln x)\left(\frac{1}{1 + e^x} \cdot e^x\right) \\
\frac{y'}{y} &= \frac{\ln (1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x} \\
y' &= y\left(\frac{\ln (1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x}\right) \\
y' &= (1 + e^x)^{\ln x}\left(\frac{\ln (1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x}\right)
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

De manera alternativa, se puede diferenciar incluso una función general de la forma $y = u(x)^{v(x)}$ con $u(x) > 0$ usando la ecuación

$$u^v = e^{v \ln u}$$

De hecho, si $y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ para $u(x) > 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{v(x) \ln u(x)}\right) = e^{v(x) \ln u(x)} \frac{d}{dx}(v(x) \ln u(x)) = u^v\left(v'(x) \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

que puede resumirse como

$$(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

Tal como a menudo es el caso, no se sugiere memorizar la fórmula anterior. El punto relevante aquí es la demostración de que *cualquier* función de la forma u^v puede diferenciarse usando la ecuación $u^v = e^{v \ln u}$. Este mismo resultado se obtendría usando diferenciación logarítmica:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln (u^v) \\
\ln y &= v \ln u \\
\frac{y'}{y} &= v' \ln u + v\frac{u'}{u} \\
y' &= y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) \\
(u^v)' &= u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)
\end{aligned}$$

Después de terminar esta sección, usted deberá entender cómo diferenciar las siguientes formas:

$$y = \begin{cases} (f(x))^a & \textbf{(a)} \\ b^{f(x)} & \textbf{(b)} \\ (f(x))^{g(x)} & \textbf{(c)} \end{cases}$$

Para el tipo (a), puede utilizar la regla de la potencia. Para el tipo (b), utilice la fórmula de diferenciación para funciones exponenciales [si $b \neq e$, convierta primero $b^{f(x)}$ en una función e^u]. Para el tipo (c), utilice diferenciación logarítmica o convierta primero la función en una función e^u. No emplee una regla en situaciones en que no sea aplicable. Por ejemplo, la regla de la potencia no puede aplicarse a x^x.

PROBLEMAS 8.5

En los problemas del 1 al 12, encuentre y′ por medio de diferenciación logarítmica.

1. $y = (x+1)^2(x-2)(x^2+3)$

2. $y = (3x+4)(8x-1)^2(3x^2+1)^4$

3. $y = (3x^3-1)^2(2x+5)^3$ **4.** $y = (2x^2+1)\sqrt{8x^2-1}$

5. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+1}$ **6.** $y = (2x+1)\sqrt{x^3+2}\sqrt[3]{2x+5}$

7. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$ **8.** $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{x+9}}$

9. $y = \dfrac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}$ **10.** $y = \dfrac{x^2(1+x^2)}{\sqrt{x^2+4}}$

11. $y = \sqrt{\dfrac{(x+3)(x-2)}{2x-1}}$ **12.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{6(x^3+1)^2}{x^6e^{-4x}}}$

En los problemas del 13 al 20, determine y′.

13. $y = x^{x^2+1}$ **14.** $y = (2x)^{\sqrt{x}}$

15. $y = x^{\sqrt{x}}$ **16.** $y = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)^x$

17. $y = (3x+1)^{2x}$ **18.** $y = (x^2+1)^{x+1}$

19. $y = 4e^x x^{3x}$ **20.** $y = (\sqrt{x})^x$

21. Si $y = (4x-3)^{2x+1}$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

22. Si $y = (\ln x)^{\ln x}$, encuentre dy/dx cuando $x = e$.

23. Encuentre una ecuación de la recta tangente a

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

en el punto donde $x = 0$.

24. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = x^x$$

en el punto donde $x = 1$.

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = x^x$$

en el punto donde $x = e$.

26. Si $y = x^x$, encuentre la tasa relativa de cambio de y con respecto a x, cuando $x = 1$.

27. Si $y = (3x)^{-2x}$, determine el valor de x para el que la tasa de cambio *porcentual* de y con respecto a x es 60.

28. Suponga que $f(x)$ es una función positiva diferenciable, que g es una función diferenciable y que $y = (f(x))^{g(x)}$. Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = (f(x))^{g(x)}\left(f'(x)\frac{g(x)}{f(x)} + g'(x)\ln(f(x))\right)$$

29. La ecuación de demanda para un disco compacto es

$$q = 500 - 40p + p^2$$

Si el precio de \$15 se incrementa en 1/2%, encuentre el cambio porcentual correspondiente en el ingreso.

30. Repita el problema 29, con la misma información, pero ahora considere 5% de *disminución* en el precio.

Objetivo

Aproximar las raíces reales de una ecuación por medio del cálculo. El método que se muestra es adecuado para usarlo en calculadoras.

8.6 Método de Newton

Es muy fácil resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ cuando f es una función lineal o cuadrática. Por ejemplo, puede resolverse $x^2 + 3x - 2 = 0$ por medio de la fórmula cuadrática. Sin embargo, cuando $f(x)$ tiene un grado mayor que 2 (o no es un polinomio), puede resultar difícil o incluso imposible encontrar soluciones (o raíces) de $f(x) = 0$ por los métodos usuales. Es por ello que se recurre a soluciones aproximadas que pueden obtenerse de varias maneras eficientes. Por ejemplo, puede utilizarse una calculadora gráfica para estimar las raíces reales de $f(x) = 0$. Con tal fin, en esta sección se aprenderá cómo usar la derivada (siempre que f sea diferenciable). El procedimiento que se desarrollará, llamado *método de Newton*, es muy apropiado para usarse con una calculadora o computadora.

El método de Newton requiere que se haga una estimación inicial para una raíz de $f(x) = 0$. Una manera de obtener este valor inicial aproximado consiste en hacer un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$ y estimar la raíz a partir de la gráfica. Un punto en la gráfica donde $y = 0$ es una intersección x y el valor x de este punto es una raíz de $f(x) = 0$. Otra manera de localizar una raíz se basa en el hecho siguiente:

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real entre a y b.

En la figura 8.6 se muestra esta situación. La intersección x entre a y b corresponde a una raíz de $f(x) = 0$ y puede usarse a o b para aproximar esta raíz.

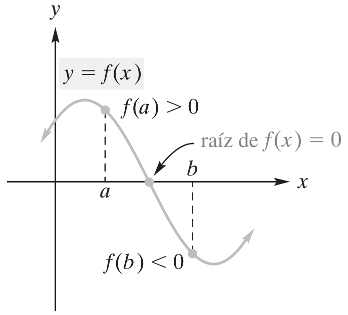


FIGURA 8.6 Raíz de $f(x) = 0$ entre a y b, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.

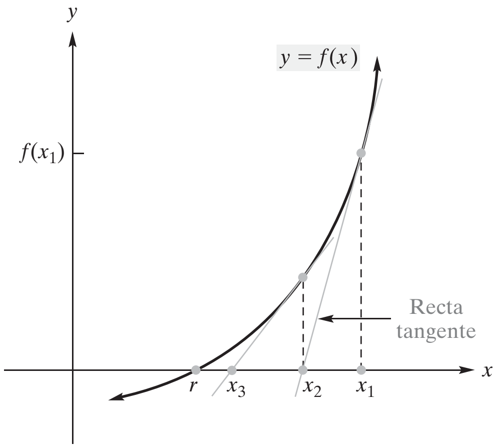


FIGURA 8.7 Mejora en la aproximación de la raíz por medio de la recta tangente.

Al suponer que se tiene un valor estimado (pero incorrecto) para una raíz, se verá cómo obtener una mejor aproximación de este valor. En la figura 8.7 se puede ver que $f(r) = 0$, por lo que r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Suponga que x_1 es una aproximación inicial a r (una que sea cercana a r). Observe que en $(x_1, f(x_1))$, la recta tangente a la curva interseca al eje x en el punto $(x_2, 0)$ y que x_2 es una mejor aproximación a r que x_1.

Se puede encontrar x_2 a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es $f'(x_1)$, entonces una forma punto-pendiente para esta recta es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \tag{1}$$

Como $(x_2, 0)$ está sobre la recta tangente, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Esto da

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \qquad \text{si } f'(x_1) \neq 0$$

Por lo que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{2}$$

Para obtener una mejor aproximación a r, se realiza de nuevo el procedimiento ya descrito, pero esta vez se usa x_2 como punto de partida. Esto da la aproximación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \tag{3}$$

Al repetir (o *iterar*) este proceso varias veces, se espera obtener mejores aproximaciones en el sentido de que la sucesión de valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

aproximará a r. En la práctica, el proceso termina cuando se alcanza cierto grado de exactitud deseado.

Si se analizan las ecuaciones (2) y (3), puede verse cómo se obtiene x_2 a partir de x_1 y cómo resulta x_3 partiendo de x_2. En general, x_{n+1} se obtiene a partir de x_n utilizando la siguiente fórmula general, llamada **método de Newton**:

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

PARA REPASAR las sucesiones definidas recursivamente, vea la sección 1.6.

Una fórmula, como la ecuación (4), que indica la manera en que, en una sucesión, se obtiene un número a partir del número precedente, se llama **fórmula recursiva** o *ecuación iterativa*.

APLÍQUELO ▶

7. Si la utilidad total por venta de x televisores es $P(x) = 20x - 0.01x^2 - 850 + 3\ln(x)$, use el método de Newton para aproximar las cantidades de equilibrio. (*Nota*: Existen dos cantidades de equilibrio; una está entre 10 y 50 y la otra entre 1900 y 2000). Redondee el valor de x al entero más cercano.

EJEMPLO 1 Aproximación de una raíz por el método de Newton

Aproxime la raíz de $x^4 - 4x + 1 = 0$ que se encuentra entre 0 y 1. Continúe el proceso de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

Solución: Si $f(x) = x^4 - 4x + 1$, se tiene

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

y

$$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

(Note el cambio de signo). Como $f(0)$ es más cercana a 0 que $f(1)$, se elige a 0 como la primera aproximación, x_1. Ahora,

En el caso de que una raíz caiga entre a y b y $f(a)$ y $f(b)$ sean igualmente cercanas a 0, se elige a a o a b como la primera aproximación.

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 4x_n^3 - 4$$

Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4} \\ &= \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4} \end{aligned}$$

así

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4}$$

Como $x_1 = 0$, hacer $n = 1$ en la ecuación (5) resulta

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4} = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25$$

Al hacer $n = 2$ en la ecuación (5) resulta

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4} = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4} \approx 0.25099$$

Al hacer $n = 3$ en la ecuación (5) resulta

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4} = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4} \approx 0.25099$$

Tabla 8.1

n	x_n	x_{n+1}
1	0.00000	0.25000
2	0.25000	0.25099
3	0.25099	0.25099

Los datos obtenidos hasta ahora se muestran en la tabla 8.1. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en menos de 0.0001, se considera que la raíz es igual a 0.25099 (esto es, x_4).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Aproximación de una raíz por el método de Newton

Aproxime la raíz de $x^3 = 3x - 1$ que se encuentra entre -1 y -2. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

Solución: Al hacer $f(x) = x^3 \text{ — } 3x + 1$ [es necesario tener la forma $f(x) = 0$], resulta que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

y

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$$

(Note el cambio en el signo). Como $f(-2)$ es más cercana a 0 que $f(-1)$, se elige a -2 como la primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3$$

Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

así

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3} \tag{6}$$

Como $x_1 = -2$, al hacer $n = 1$ en la ecuación (6) resulta

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 3} \approx -1.88889$$

Al continuar de esta manera, se obtiene la tabla 8.2. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en 0.00006, que es menor a 0.0001, se considera que la raíz es -1.87939 (esto es, x_4).

Tabla 8.2

n	x_n	$x_n + 1$
1	-2.00000	-1.88889
2	-1.88889	-1.87945
3	-1.87945	-1.87939

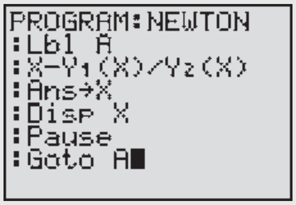
Ahora resuelva el problema 3 ◁

Si la elección de x_1 tiene $f'(x_1) = 0$, entonces el método de Newton no servirá para producir un valor de x_2. Esto ocurre en los problemas 2 y 8 de la serie de problemas 8.6. Cuando esto sucede, debe rechazarse la elección de x_1 y elegir un número diferente que sea cercano a la raíz deseada para x_1. Una gráfica de f puede ser útil en esta situación. Por último, se debe mencionar que hay casos en los que la sucesión de aproximaciones no tiende hacia la raíz. Un análisis de tales casos queda fuera del alcance de este libro.

TECNOLOGÍA

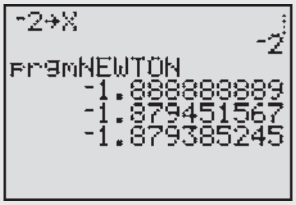
En la figura 8.8 se presenta un programa corto del método de Newton para la calculadora TI-83 Plus. Antes de ejecutar el programa, la primera aproximación a la raíz de $f(x) = 0$ se almacena como X y $f(x)$ y $f'(x)$ se almacenan como Y_1 y Y_2, respectivamente.

Al ser ejecutado, el programa calcula la primera iteración y se detiene. Las iteraciones subsiguientes se obtienen oprimiendo sucesivamente la tecla ENTER. En la figura 8.9 se muestran las iteraciones obtenidas para el problema del ejemplo 2.



```
PROGRAM:NEWTON
:Lbl A
:X-Y₁(X)/Y₂(X)
:Ans→X
:Disp X
:Pause
:Goto A
```

FIGURA 8.8 Programa de calculadora para el método de Newton.



```
⁻2→X
             ⁻2
prgmNEWTON
    -1.888888889
    -1.879451567
    -1.879385245
```

FIGURA 8.9 Iteraciones para el problema del ejemplo 2.

PROBLEMAS 8.6

En los problemas del 1 al 10, utilice el método de Newton para estimar la raíz que se indica de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

1. $x^3 - 5x + 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

2. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

3. $x^3 - x - 1 = 0$; raíz entre 1 y 2.

4. $x^3 - 9x + 6 = 0$; raíz entre 2 y 3.

5. $x^3 + x + 1 = 0$; raíz entre -1 y 0.

6. $x^3 = 2x + 6$; raíz entre 2 y 3.

7. $x^4 = 3x - 1$; raíz entre 0 y 1.

8. $x^4 + 4x - 1 = 0$; raíz entre -2 y -1.

9. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$; raíz entre 1 y 2.

10. $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$; raíz entre 1 y 2.

11. Estime, con precisión de tres decimales, la raíz cúbica de 73. [*Sugerencia*: Demuestre que el problema es equivalente a encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - 73 = 0$]. Elija 4 como aproximación inicial. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas, redondeadas a tres decimales, sean iguales.

12. Estime $\sqrt[4]{19}$ con precisión de dos decimales. Use 2 como aproximación inicial.

13. Encuentre, con precisión de dos decimales, todas las soluciones reales de la ecuación $e^x = x + 5$. (*Sugerencia*: Con un bosquejo de las gráficas de $y = e^x$ y $y = x + 5$, debe ser claro cuántas soluciones existen. Use valores enteros cercanos para sus estimaciones iniciales).

14. Encuentre, con precisión de tres decimales, todas las soluciones reales de la ecuación $\ln x = 5 - x$.

15. Cantidad del punto de equilibrio El costo de fabricar q toneladas de un producto está dado por

$$c = 250 + 2q - 0.1q^3$$

y el ingreso obtenido al vender las q toneladas está dado por

$$r = 3q$$

Aproxime, con precisión de dos decimales, la cantidad del punto de equilibrio. (*Sugerencia*: Aproxime una raíz de $r - c = 0$, elija el 13 como su aproximación inicial).

16. Cantidad del punto de equilibrio El costo total de fabricar q cientos de lápices está dado por c, donde

$$c = 50 + 4q + \frac{q^2}{1000} + \frac{1}{q}$$

El ciento de lápices se vende a \$8.

(a) Demuestre que la cantidad del punto de equilibrio es una solución de la ecuación

$$f(q) = \frac{q^3}{1000} - 4q^2 + 50q + 1 = 0$$

(b) Utilice el método de Newton para estimar la solución de $f(q) = 0$, donde $f(q)$ está dada en el inciso (*a*). Use 10 como aproximación inicial y escriba su respuesta con precisión de dos decimales.

17. Equilibrio Dada la ecuación de oferta $p = 2q + 5$ y la ecuación de demanda $p = \dfrac{100}{q^2 + 1}$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Escriba su respuesta con tres decimales de precisión.

18. Equilibrio Dada la ecuación de oferta

$$p = 0.2q^3 + 0.5q + 2$$

y la ecuación de demanda $p = 10 – q$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado y encuentre el precio de equilibrio correspondiente. Tome 5 como aproximación inicial para el valor requerido de q y escriba su respuesta con dos decimales de precisión.

19. Use el método de Newton para aproximar (con dos decimales de precisión) un valor crítico de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + 1$$

en el intervalo [3, 4].

8.7 Derivadas de orden superior

Objetivo

Encontrar derivadas de orden superior tanto en forma explícita como implícita.

Se sabe que la derivada de una función $y = f(x)$ es en sí misma una función, $f'(x)$. Cuando se diferencia $f'(x)$, la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x. Ésta se denota como $f''(x)$, lo cual se lee como "f doble prima de x". De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe $f'''(x)$. Continuando de esta manera, se obtienen *derivadas de orden superior*. En la tabla 8.3 aparecen algunos de los símbolos utilizados para representarlas. Para evitar notaciones confusas, las primas no se usan para derivadas de orden superior al tercero.

Tabla 8.3

Primera derivada:	y'	$f'(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	D_xy
Segunda derivada:	y''	$f''(x)$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$	D_x^2y
Tercera derivada:	y'''	$f'''(x)$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$\dfrac{d^3}{dx^3}(f(x))$	D_x^3y
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$	$\dfrac{d^4}{dx^4}(f(x))$	D_x^4y

¡ADVERTENCIA!

El símbolo d^2y/dx^2 representa la segunda derivada de y. No es lo mismo que $(dy/dx)^2$, que es el cuadrado de la primera derivada de y.

EJEMPLO 1 Determinación de derivadas de orden superior

a. Si $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encuentre todas sus derivadas de orden superior.

Solución: Al diferenciar $f(x)$ resulta

$$f'(x) = 18x^2 – 24x + 6$$

Al diferenciar $f'(x)$ se obtiene

$$f''(x) = 36x - 24$$

De manera similar,

$$f'''(x) = 36$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

Todas las derivadas subsecuentes también son iguales a 0: $f^{(5)}(x) = 0$, y así sucesivamente.

b. Si $f(x) = 7$, encuentre $f''(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 0$$
$$f''(x) = 0$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

8. La altura $h(t)$ de una piedra que se deja caer desde un edificio de 200 pies de alto está dada por $h(t) = 200 - 16t^2$, donde t es el tiempo medido en segundos. Encuentre $\frac{d^2h}{dt^2}$, la aceleración de la piedra en el tiempo t.

EJEMPLO 2 Determinación de una derivada de segundo orden

Si $y = e^{x^2}$, encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

APLÍQUELO ▶

9. Si el costo de producir q unidades de cierto artículo es

$$c(q) = 7q^2 + 11q + 19$$

y la función de costo marginal es $c'(q)$, encuentre la razón de cambio de la función de costo marginal con respecto a q cuando $q = 3$.

EJEMPLO 3 Evaluación de una derivada de segundo orden

Si $y = f(x) = \frac{16}{x+4}$, encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ y evalúela cuando $x = 4$.

Solución: Como $y = 16(x + 4)^{-1}$, la regla de la potencia da

$$\frac{dy}{dx} = -16(x+4)^{-2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x+4)^{-3} = \frac{32}{(x+4)^3}$$

Si se evalúa cuando $x = 4$, resulta

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}$$

La segunda derivada que se evalúa en $x = 4$ también se denota como $f''(4)$ o $y''(4)$.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

EJEMPLO 4 Determinación de la razón de cambio de $f''(x)$

Si $f(x) = x \ln x$, encuentre la razón de cambio de $f''(x)$.

La razón de cambio de $f''(x)$ es $f'''(x)$.

Solución: Para encontrar la razón de cambio de cualquier función, es necesario encontrar su derivada. Así, se desea obtener la derivada de $f''(x)$, que es $f'''(x)$. De acuerdo con esto,

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$
$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$
$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Diferenciación implícita de orden superior

Ahora se encontrará una derivada de orden superior por medio de la diferenciación implícita. Recuerde el supuesto de que *y* es una función de *x*.

EJEMPLO 5 Diferenciación implícita de orden superior

Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución: Al diferenciar ambos lados con respecto a *x*, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + 8y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-x}{4y} \qquad (1) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{4y\frac{d}{dx}(-x) - (-x)\frac{d}{dx}(4y)}{(4y)^2} \\ &= \frac{4y(-1) - (-x)\left(4\frac{dy}{dx}\right)}{16y^2} \\ &= \frac{-4y + 4x\frac{dy}{dx}}{16y^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{4y^2} \qquad (2) \end{aligned}$$

Aunque se ha encontrado una expresión para d^2y/dx^2, la respuesta involucra la derivada dy/dx. Se acostumbra expresar la respuesta sin la derivada, esto es, solo en términos de *x* y *y*. Esto se hace con facilidad. A partir de la ecuación (1), $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, por lo que al sustituir este valor en la ecuación (2), se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\left(\frac{-x}{4y}\right)}{4y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}$$

En el ejemplo 5, no es rara la simplificación de d^2y/dx^2 utilizando la ecuación original.

Esta respuesta puede simplificarse aún más. Como $x^2 + 4y^2 = 4$ (ecuación original),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}$$

Ahora resuelva el problema 23 ◁

EJEMPLO 6 Diferenciación implícita de orden superior

Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $y^2 = e^{x+y}$.

Solución: Al diferenciar ambos lados con respecto a *x* se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

Si se despeja dy/dx, resulta

$$\begin{aligned} 2y\frac{dy}{dx} &= e^{x+y} + e^{x+y}\frac{dy}{dx} \\ 2y\frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} &= e^{x+y} \end{aligned}$$

$$(2y - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}$$

Como $y^2 = e^{x+y}$ (ecuación original),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2 - y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-y)\frac{dy}{dx} - y\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{(2-y)^2} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{(2-y)^2}$$

Ahora se expresará la respuesta sin dy/dx. Como $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2-y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{y}{2-y}\right)}{(2-y)^2} = \frac{2y}{(2-y)^3}$$

Ahora resuelva el problema 31 ◁

PROBLEMAS 8.7

En los problemas del 1 al 20, encuentre las derivadas que se indican.

1. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2, y'''$

2. $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, y'''$

3. $y = 8 - x, \frac{d^2y}{dx^2}$

4. $y = -x - x^2, \frac{d^2y}{dx^2}$

5. $y = x^3 + e^x, y^{(4)}$

6. $F(q) = \ln(q+1), \frac{d^3F}{dq^3}$

7. $f(x) = x^3 \ln x, f'''(x)$

8. $y = \frac{1}{x}, y'''$

9. $f(q) = \frac{1}{2q^4}, f'''(q)$

10. $f(x) = \sqrt{x}, f''(x)$

11. $f(r) = \sqrt{9 - r}, f''(r)$

12. $y = e^{ax^2}, y''$

13. $y = \frac{1}{2x+3}, \frac{d^2y}{dx^2}$

14. $y = (3x+7)^5, y''$

15. $y = \frac{x+1}{x-1}, y''$

16. $y = 2x^{1/2} + (2x)^{1/2}, y''$

17. $y = \ln[x(x+a)], y''$

18. $y = \ln\frac{(2x+5)(5x-2)}{x+1}, y''$

19. $f(z) = z^2e^z, f''(z)$

20. $y = \frac{x}{e^x}, \frac{d^2y}{dx^2}$

21. Si $y = e^{2x} + e^{3x}$, encuentre $\left.\frac{d^5y}{dx^5}\right|_{x=0}$.

22. Si $y = e^{2\ln(x^2+1)}$, encuentre y'' cuando $x = 1$.

En los problemas del 23 al 32, encuentre y''.

23. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

24. $x^2 - y^2 = 16$

25. $y^2 = 4x$

26. $9x^2 + 16y^2 = 25$

27. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c$

28. $y^2 - 6xy = 4$

29. $xy + y - x = 4$

30. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

31. $y = e^{x+y}$

32. $e^x + e^y = x^2 + y^2$

33. Si $x^2 + 3x + y^2 = 4y$, encuentre d^2y/dx^2 cuando $x = 0$ y $y = 0$.

34. Demuestre que la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

se satisface cuando $f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$.

35. Encuentre la razón de cambio de $f'(x)$ si $f(x) = (5x - 3)^4$.

36. Encuentre la razón de cambio de $f''(x)$ si

$$f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}$$

37. **Costo marginal** Si $c = 0.2q^2 + 2q + 500$ es una función de costo, ¿qué tan rápido está cambiando el costo marginal cuando $q = 97.357$?

38. **Ingreso marginal** Si $p = 400 - 40q - q^2$ es una ecuación de demanda, ¿qué tan rápido está cambiando el ingreso marginal cuando $q = 4$?

39. Si $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$, determine los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$.

40. Suponga que $e^y = y^2e^x$. (a) Determine dy/dx y exprese su respuesta solo en términos de y. (b) Determine d^2y/dx^2 y exprese su respuesta solo en términos de y.

En los problemas 41 y 42, determine $f''(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todas las raíces reales de $f''(x) = 0$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$

42. $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$

Repaso del capítulo 8

Términos y símbolos importantes

Sección 8.1 **Derivadas de funciones logarítmicas**
derivada de $\ln x$ y de $\log_b u$

Sección 8.2 **Derivadas de funciones exponenciales**
derivada de e^x y de b^u

Sección 8.3 **Elasticidad de la demanda**
elasticidad puntual de la demanda, η elástica elasticidad unitaria inelástica

Sección 8.4 **Diferenciación implícita**
función implícita

Sección 8.5 **Diferenciación logarítmica**
diferenciación logarítmica razón de cambio relativa del ingreso

Sección 8.6 **Método de Newton**
fórmula recursiva, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Sección 8.7 **Derivadas de orden superior**
derivadas de orden superior, $f''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4}{dx^4}[f(x)], \ldots$

Resumen

Las fórmulas utilizadas para derivar logaritmos naturales y funciones exponenciales son

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

Para diferenciar funciones logarítmicas y exponenciales con base diferente a e, primero transforme la función a base e y luego diferencie el resultado. De manera alternativa, pueden aplicarse las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(b^u) = b^u(\ln b)\cdot\frac{du}{dx}$$

La elasticidad puntual de la demanda es una función que mide cómo un cambio en el precio afecta la demanda del consumidor. Está dada por

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

donde p es el precio por unidad al que se demandan q unidades. Las tres categorías de elasticidad son las siguientes:

$|\eta(p)| > 1$ la demanda es elástica.
$|\eta(p)| = 1$ elasticidad unitaria.
$|\eta(p)| < 1$ la demanda es inelástica.

Para un cambio porcentual dado en el precio, si existe un cambio porcentual más grande (respectivamente más pequeño) en la cantidad demandada, entonces la demanda es elástica (respectivamente inelástica) y viceversa.

Dos relaciones entre la elasticidad y la razón de cambio del ingreso están dadas por

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \qquad \frac{dr}{dp} = q(1 + \eta)$$

Si una ecuación define de manera implícita a y como función de x [en vez de definirla explícitamente en la forma $y = f(x)$], entonces dy/dx puede encontrarse por diferenciación implícita. Con este método, se trata a y como una función de x y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a x. Al hacer esto, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

y, de manera más general, que

$$\frac{d}{dx}(f(y)) = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

Por último, se despeja dy/dx de la ecuación resultante.

Suponga que $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias. Para diferenciar $y = \log_b(f(x))$, puede ser conveniente usar las propiedades de los logaritmos para reescribir $\log_b(f(x))$ en términos de logaritmos más simples y luego diferenciar esa forma. Para diferenciar $y = f(x)$, donde $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias, puede utilizarse el método de diferenciación logarítmica. En este método, se toma el logaritmo natural de ambos lados de $y = f(x)$ para obtener $\ln y = \ln(f(x))$. Después de simplificar $\ln(f(x))$ por medio de las propiedades de los logaritmos, se diferencian ambos miembros de $\ln y = \ln(f(x))$ con respecto a x y después se despeja y'. La diferenciación logarítmica se utiliza también para diferenciar $y = u^v$, donde tanto u como v son funciones de x.

Método de Newton es el nombre dado a la fórmula siguiente, la cual se usa para aproximar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, siempre y cuando f sea diferenciable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En la mayoría de los casos se encontrará que la aproximación mejora conforme n se incrementa.

Como la derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es en sí misma una función, puede diferenciarse de manera sucesiva para obtener la segunda derivada $f''(x)$, la tercera derivada $f'''(x)$ y otras derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 30, diferencie las funciones dadas.

1. $y = 3e^x + e^2 + e^{x^2} + x^{e^2}$

2. $f(w) = we^w + w^2$

3. $f(r) = \ln(7r^2 + 4r + 5)$

4. $y = e^{\ln x}$

5. $y = e^{x^2+4x+5}$

6. $f(t) = \log_6 \sqrt{t^2 + 1}$

7. $y = e^x(x^2 + 2)$

8. $y = 2^{3x^2}$

9. $y = \sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}$

10. $f(t) = e^{1/t}$

11. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

12. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2}$

13. $f(q) = \ln[(q+a)^m(q+b)^n]$

14. $y = (x+2)^3(x+1)^4(x-2)^2$

15. $y = 2^{2x^2+2x-5}$

16. $y = (e + e^2)^0$

17. $y = \dfrac{4e^{3x}}{xe^{x-1}}$

18. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

19. $y = \log_2(8x+5)^2$

20. $y = \ln\left(\dfrac{5}{x^2}\right)$

21. $f(l) = \ln(1 + l + l^2 + l^3)$

22. $y = (x^2)^{x^2}$

23. $y = (x^2+1)^{x+1}$

24. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

25. $\phi(t) = \ln\left(t\sqrt{4-t^2}\right)$

26. $y = (x+3)^{\ln x}$

27. $y = \dfrac{(x^2+1)^{1/2}(x^2+2)^{1/3}}{(2x^3+6x)^{2/5}}$

28. $y = (\ln x)\sqrt{x}$

29. $y = (x^x)^x$

30. $y = x^{(x^x)}$

En los problemas del 31 al 34, evalúe y′ en el valor dado de x′

31. $y = (x+1)\ln x^2, x = 1$

32. $y = \dfrac{e^{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}, x = 1$

33. $y = (1/x)^x, x = e$

34. $y = \left[\dfrac{2^{5x}(x^2-3x+5)^{1/3}}{(x^2-3x+7)^3}\right]^{-1}, x = 0$

En los problemas 35 y 36, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

35. $y = 3e^x, x = \ln 2$

36. $y = x + x^2 \ln x, x = 1$

37. Encuentre la intersección con el eje y de la recta tangente a la gráfica de $y = x(2^{2-x^2})$ en el punto donde $x = 1$.

38. Si $w = 2^x + \ln(1+x^2)$ y $x = \ln(1+t^2)$, encuentre w y dw/dt cuando $t = 0$.

En los problemas del 39 al 42, encuentre la derivada indicada en el punto dado.

39. $y = e^{x^2-2x+1}, y'', (1, 1)$

40. $y = x^2e^x, y''', (1, e)$

41. $y = \ln(2x), y''', (1, \ln 2)$

42. $y = x\ln x, y'', (1, 0)$

En los problemas del 43 al 46, encuentre dy/dx.

43. $x^2 + 2xy + y^2 = 4$

44. $x^3y^3 = 3$

45. $\ln(xy^2) = xy$

46. $y^2e^{y\ln x} = e^2$

En los problemas 47 y 48, encuentre d²y/dx² en el punto dado.

47. $x + xy + y = 5, (2, 1)$

48. $x^2 + xy + y^2 = 1, (0, -1)$

49. Si y está definida implícitamente por $e^y = (y+1)e^x$, determine dy/dx y d^2y/dx^2 solo como funciones explícitas de y.

50. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, encuentre $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, uno de tales modelos es[9]

$$f(t) = 1 - (0.8e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.0002t})$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de t días de hospitalización. Determine la razón de altas (proporción de altas por día) al término de t días.

52. Sismos De acuerdo con la escala Richter,[10] el número N de sismos de magnitud M o superiores por unidad de tiempo está dado por $\log N = A - bM$, donde A y b son constantes. Richter afirma que

$$\log\left(-\frac{dN}{dM}\right) = \mathrm{A} + \log\left(\frac{b}{q}\right) - bM$$

donde $q = \log e$. Verifique esta afirmación.

53. Si $f(x) = e^{x^4-10x^3+36x^2-2x}$, encuentre todas las raíces reales de $f'(x) = 0$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

54. Si $f(x) = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{2x^3}{3} + x^2 + 1$, encuentre todas las raíces reales de $f''(x) = 0$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

---

[9] Adaptado de W. W. Eaton y G. A. Whitmore, “Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia”, *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), pp. 273-292.

[10] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

Para las ecuaciones de demanda presentadas en los problemas del 55 al 57, determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria para el valor indicado de q.

55. $p = \dfrac{500}{q}$; $q = 200$

56. $p = 900 - q^2$; $q = 10$

57. $p = 18 - 0.02q$; $q = 600$

58. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = \left(\frac{20 - p}{2}\right)^2 \qquad \text{para } 0 \le p \le 20$$

(a) Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 8$.
(b) Encuentre todos los valores de p para los cuales la demanda es elástica.

59. La ecuación de la demanda de un producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$. Si el precio de 30 disminuye en $\frac{2}{3}$%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

60. La ecuación de la demanda para un producto es

$$q = \sqrt{100 - p}, \qquad \text{donde } 0 < p < 100$$

(a) Encuentre todos los precios que corresponden a la demanda elástica.
(b) Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$. Use su respuesta para estimar el aumento o la disminución porcentuales de la demanda cuando el precio aumenta 5% hasta $p = 42$.

61. La ecuación $x^3 - 2x - 2 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Use el método de Newton para estimar la raíz. Continúe con el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

62. Encuentre, con precisión de tres decimales, todas las soluciones reales a la ecuación $e^x = 3x$.

EXPLORE Y AMPLÍE Cantidad económica del pedido

En administración de inventarios, la cantidad económica del pedido es el tamaño más eficiente, en términos de costo, determinado para surtir nuevamente los pedidos. Con el fin de determinar este tamaño óptimo, es necesario tener una idea de cómo evolucionan las disminuciones y el reabastecimiento, además de saber cuál es el costo resultante.

A continuación se listan los supuestos más representativos:

1. El inventario está disminuyendo debido a compras ocurridas a una tasa constante D, la cual se mide en unidades por año.
2. Todos los pedidos de reabastecimiento son del mismo tamaño y cada uno llega en un envío, justo como las existencias van saliendo.
3. Además de los costos por artículo, cada pedido también incluye un costo fijo por orden, F.
4. Cada unidad en existencia tiene un valor constante, V, medido en términos monetarios.
5. El costo de almacenar el inventario es una fracción fija, R, del valor total presente del inventario. Este factor de costo por mantener inventario se mide en términos monetarios de unidad por año.

Los supuestos 1 y 2 dan origen a una gráfica del inventario con respecto al tiempo como la que se observa en la figura 8.10.

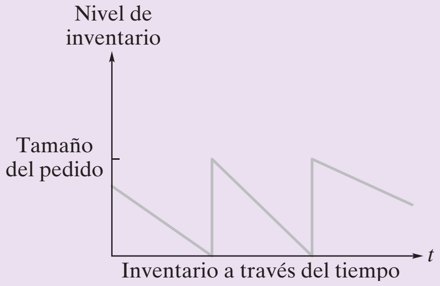


FIGURA 8.10 Inventario a través del tiempo.

Ahora se desea minimizar el costo, por año, de manejar el inventario en la forma que describe la figura 8.10. Si el reabastecimiento se pide en lotes de q unidades por lote, entonces existen $\dfrac{D}{q}$ pedidos por año, para representar un costo anual por pedidos de $\dfrac{FD}{q}$. (El gasto anual debido al costo por artículo no puede ajustarse mediante el cambio del tamaño del pedido, de modo que este costo no se toma en cuenta en los cálculos que se presentan aquí). Con un nivel de inventario promedio de $\dfrac{q}{2}$, el costo anual por mantener inventario es $\dfrac{RVq}{2}$. Entonces, el costo anual relacionado con el inventario, C, es la suma del costo de los pedidos y el costo por mantener inventario:

$$C = C(q) = \frac{FD}{q} + \frac{RVq}{2}$$

Resulta claro que esta función C crece, tanto cuando q se hace grande como cuando q se aproxima a 0. A partir de argumentos que se estudiarán con detalle en el capítulo siguiente, se deduce que existe un único valor de q donde $\dfrac{dC}{dq}$ es igual a 0, entonces este valor de q proporcionará un valor mínimo de C. A continuación se encontrará esta q.

$$\frac{dC}{dq} = \frac{-FD}{q^2} + \frac{RV}{2} = 0$$

$$q^2 = \frac{2FD}{RV}$$

$$q = \sqrt{\frac{2FD}{RV}}$$

Esta ecuación se llama fórmula de Wilson para el tamaño del lote, en honor de un consultor industrial que popularizó su uso. Al sustituir $F = \$10$ por pedido, $D = 1500$ unidades por año, $R = \$0.10$ por unidad monetaria por año y $V = \$10$, entonces q resulta que

$$q = \sqrt{\frac{2(10)(1500)}{(0.10)(10)}} \approx 173.2$$

El tamaño de pedido más eficiente en costo es de 173 unidades.

Las variaciones de la fórmula de Wilson hacen más flexibles uno o más de los cinco supuestos en los que se basa. Un supuesto que puede relajarse es el número 5. Suponga que el costo por mantener inventario como un porcentaje del valor del inventario se eleva cuando el inventario es bajo. (Piense en un gran almacén que se queda casi vacío). Se modelará esto reemplazando R con $R(1 + ke^{-sq})$. R es el costo anual de mantener inventarios por unidad monetaria para niveles de inventario grandes; el término ke^{-sq} $(k, s > 0)$ eleva el costo para niveles bajos de inventario. El costo anual total del costo del inventario ahora se convierte en

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq(1 + ke^{-sq})}{2}$$

De nuevo, se desea minimizar esta cantidad y otra vez C se hace grande cuando q crece y cuando q se aproxima a 0. El mínimo es donde

$$\frac{dC}{dq} = \frac{-FD}{q^2} + \frac{RV(1 + ke^{-sq} - ksqe^{-sq})}{2} = 0$$

Suponga que $k = 1, s = \dfrac{\ln 2}{1000} \approx 0.000693$. Entonces el costo monetario de mantener inventarios es el doble para un inventario pequeño que para uno grande y se encuentra en medio de dos costos obtenidos en un nivel de inventario de 1000 piezas. Si se conservan F, D, R y V igual que antes y se utiliza una calculadora gráfica u otra técnica de solución numérica, se encuentra que $\dfrac{dC}{dq} = 0$ cuando $q \approx 127.9$. El tamaño óptimo del pedido es de 128 unidades. Observe que aunque los supuestos incluyen ahora economías de escala, el costo por mantener inventarios es mayor en todos los niveles de inventario y ha conducido a una cantidad económica de pedido más pequeña.

Problemas

1. Utilice la fórmula de Wilson para el tamaño del lote y encuentre la cantidad económica del pedido para un artículo que tiene un valor de \$36.50, cuesta 5% de su valor almacenarlo por año, se vende a razón de 3400 unidades por año y se le compra a un proveedor que cobra \$25 por procesar cada pedido.

2. Suponga que los supuestos 1, 3, 4 y 5 se mantienen, pero que el 2 se modifica: un administrador nunca permite que un inventario caiga al nivel de 0, en lugar de eso mantiene un margen de seguridad de cierto número de unidades. ¿Qué diferencia produce esto en los cálculos de la cantidad económica del pedido?

3. ¿Qué otros supuestos, además del 2 y del 5, podrían relajarse de manera realista? Explique su respuesta.

TRAZADO DE CURVAS

9

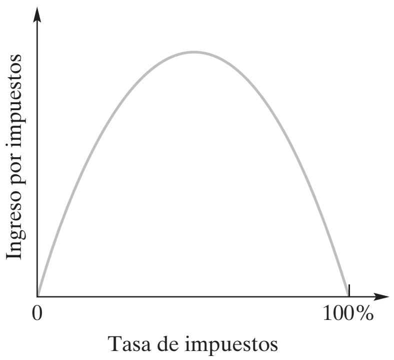
A mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político. Para ilustrar su argumento, Laffer tomó una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer.

La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno proveniente de los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuestos es 0, el gobierno no obtiene ingresos. Pero si la tasa de impuestos fuese de 100%, el ingreso también sería igual a 0, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo este se esfuma. Puesto que una tasa de entre 0 y 100% debe generar ingresos, razonó Laffer, la curva que relaciona los ingresos con los impuestos debe verse, en forma cualitativa, más o menos como la que se muestra en la figura del final de esta página.

El argumento de Laffer no pretendía mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese de 50%, sino probar que, bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuestos está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Este fue un argumento clave para implementar la reducción de impuestos aprobada por el Congreso estadounidense durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.

Dado que la curva de Laffer solo es un dibujo cualitativo, en realidad no proporciona una tasa de impuestos óptima. Los argumentos con base en los ingresos para reducir los impuestos incluyen la hipótesis de que el punto del máximo de ingresos está a la izquierda, en el eje horizontal, del esquema de impuestos actual. De igual manera, quienes argumentan por una elevación en los impuestos para aumentar los ingresos del gobierno, suponen que o bien existe una relación diferente entre impuestos e ingresos o una localización diferente en el máximo de la curva.

Entonces, la curva de Laffer es en sí misma demasiado abstracta como para ser de mucha ayuda en la determinación de la tasa óptima de impuestos. Pero incluso un bosquejo muy simple de curvas, como las curvas de oferta y demanda y la curva de Laffer, pueden ayudar a los economistas a describir los factores causales que dirigen una economía. En este capítulo, se estudiarán técnicas para el trazado y la interpretación de curvas.



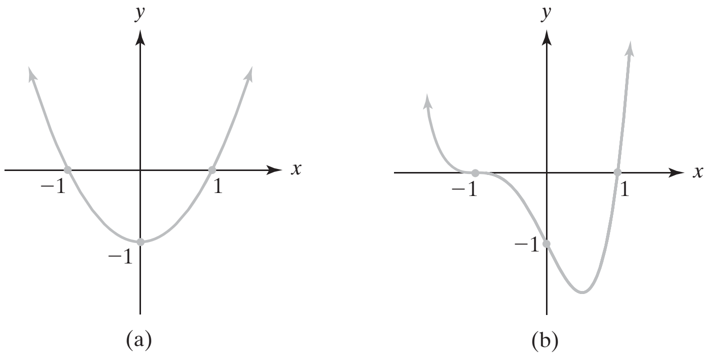
Objetivo

Encontrar cuándo es creciente o decreciente una función, determinar valores críticos, localizar máximos y mínimos relativos y establecer la prueba de la primera derivada. Asimismo, hacer el bosquejo de la gráfica de una función usando la información obtenida de la primera derivada.

9.1 Extremos relativos

Naturaleza creciente o decreciente de una función

El análisis del comportamiento gráfico de las funciones es una parte básica de las matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando se hace el bosquejo de una curva, si solo se colocan puntos quizá no se obtenga información suficiente acerca de su forma. Por ejemplo, los puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$ satisfacen la función dada por $y = (x + 1)^3(x - 1)$. Con base en estos puntos, podría concluirse a la ligera que la gráfica debe tener la forma que se muestra en la figura 9.1(a), pero de hecho, la forma verdadera es la que se ilustra en la figura 9.1(b). En este capítulo se explorará la gran utilidad de la diferenciación en el análisis de una función, de manera que se pueda determinar su forma verdadera y el comportamiento de su gráfica.



(a) (b)

FIGURA 9.1 Curvas que pasan por los puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$.

Se comenzará por analizar la gráfica de la función $y = f(x)$ de la figura 9.2. Observe que conforme x aumenta (de izquierda a derecha) en el intervalo I_1, entre a y b, los valores de $f(x)$ también aumentan y la curva asciende. En forma matemática, esta observación significa que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en I_1, tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Aquí se dice que f es una *función creciente* en I_1. Por otra parte, conforme x aumenta en el intervalo I_2, entre c y d, la curva desciende. En este intervalo, $x_3 < x_4$ implica que $f(x_3) > f(x_4)$ y se dice que f es una *función decreciente* en I_2. Estas observaciones se resumen en la definición siguiente.

Definición

Se dice que una función f es ***creciente*** en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2 incluidos en I, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es ***decreciente*** en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2 incluidos en I, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

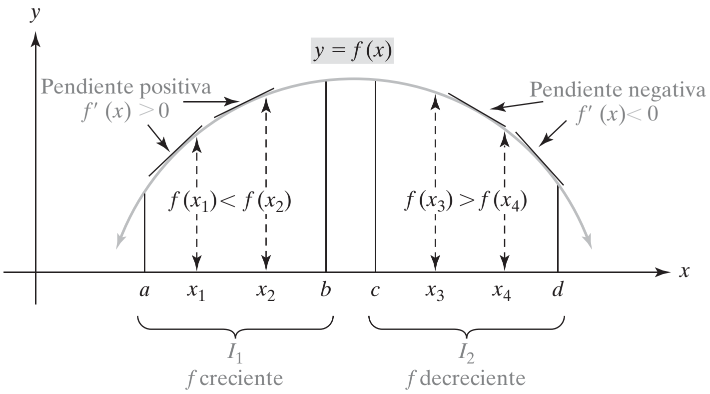


FIGURA 9.2 Naturaleza creciente o decreciente de una función.

En términos de la gráfica de la función, *f* es creciente en *I* si la curva se eleva hacia la derecha y *f* es decreciente en *I* si la curva cae hacia la derecha. Recuerde que una línea recta con pendiente positiva se eleva hacia la derecha y una recta con pendiente negativa cae hacia la derecha.

De regreso a la figura 9.2, se nota que en el intervalo I_1, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas, por lo que $f'(x)$ debe ser positiva para toda *x* en I_1. Una derivada positiva implica que la curva está elevándose. En el intervalo I_2, las rectas tangentes tienen pendientes negativas, por lo que $f'(x) < 0$ para toda *x* en I_2. La curva desciende donde la derivada es negativa. Así, se tiene la siguiente regla que permite usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente:

Regla 1 Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea *f* diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f'(x) > 0$ para toda *x* en (a, b), entonces *f* es creciente en (a, b). Si $f'(x) < 0$ para toda *x* en (a, b), entonces *f* es decreciente en (a, b).

Con el propósito de ilustrar estas ideas, se usará la regla 1 para determinar los intervalos en donde $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente y los intervalos en que *y* es decreciente. Haciendo $y = f(x)$, debemos determinar cuándo $f'(x)$ es positiva y cuándo es negativa. Se tiene

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

Empleando la técnica de la sección 6.4, es posible encontrar el signo de $f'(x)$ probando los intervalos determinados por las raíces de $2(3 + x)(3 - x) = 0$, esto es, -3 y 3. Tales valores deben disponerse en orden creciente en la parte superior de un diagrama de signos para f' de manera que se divida el dominio en *f* intervalos. (Vea la figura 9.3). En cada intervalo, el signo de $f'(x)$ está determinado por los signos de sus factores:

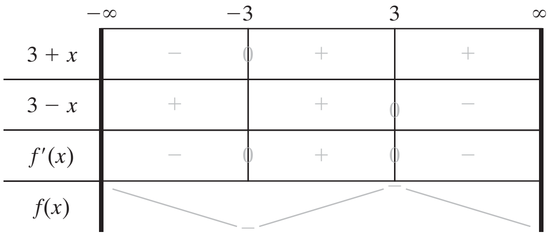


FIGURA 9.3 Diagrama de signos para $f'(x) = 18 - 9x^2$ y su interpretación para $f(x)$.

Si $x < -3$, entonces el signo $(f'(x)) = 2(-)(+) = -$, por lo que *f* es *decreciente*.

Si $-3 < x < 3$, entonces el signo $(f'(x)) = 2(+)(+) = +$, por lo que *f* es *creciente*.

Si $x > 3$, entonces el signo $(f'(x)) = 2(+)(-) = -$, por lo que *f* es *decreciente*.

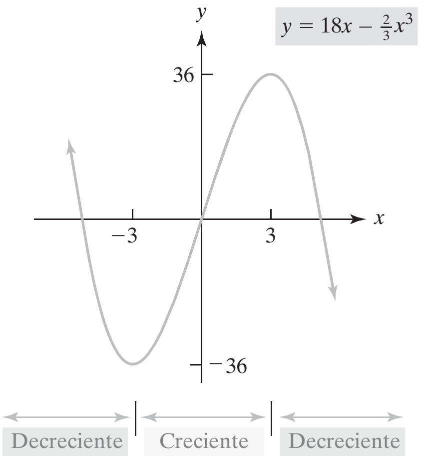


FIGURA 9.4 Crecimiento y decrecimiento para $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

Estos resultados se indican en el diagrama de signos dado en la figura 9.3, donde la línea inferior es una versión esquemática de lo que dicen los signos de f' acerca de *f*. Observe que los segmentos de recta horizontal en el renglón inferior indican tangentes horizontales para *f* en -3 y en 3. Así, *f* es decreciente en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$ y es creciente en $(-3, 3)$. Esto corresponde a la naturaleza creciente y decreciente de la gráfica de *f* mostrada en la figura 9.4. De hecho, la utilidad de un diagrama de signos bien construido consiste en proporcionar un esquema para la construcción subsiguiente de la propia gráfica de una función.

Extremos

Ahora vea la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 9.5. Pueden hacerse algunas observaciones. Primero, hay algo especial con respecto a los puntos *P*, *Q* y *R*. Observe que *P* es *más alto* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva —lo mismo puede decirse para *R*—. El punto *Q* es *más bajo* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva. Como *P*, *Q* y *R*, pueden no ser necesariamente los puntos más altos o más bajos en *toda* la curva, se dice que la gráfica

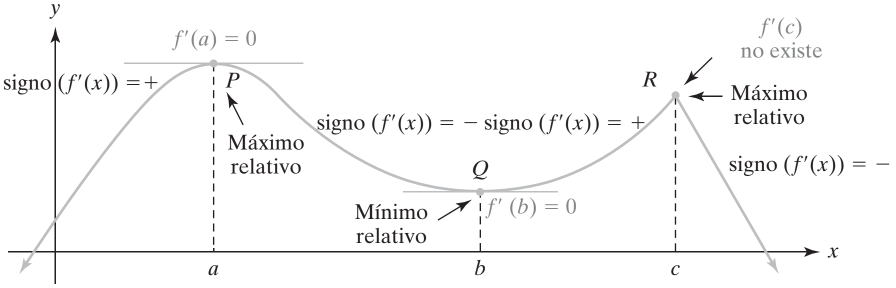


FIGURA 9.5 Máximos y mínimos relativos.

de *f tiene un máximo relativo en a y en c y un mínimo relativo en b*. La función *f tiene valores máximos relativos de f*(a) *en a y f*(c) *en c y tiene un valor mínimo relativo de f*(b) *en b*. También se dice que $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ *son puntos máximos relativos y que* $(b, f(b))$ *es un punto mínimo relativo en la gráfica de f*.

¡ADVERTENCIA!

Asegúrese de notar la diferencia entre los *valores* extremos relativos y el *lugar donde* ocurren éstos.

De regreso a la gráfica, se observa que hay un *máximo absoluto* (el punto más alto en toda la curva) en *a*, pero no un *mínimo absoluto* (el punto más bajo en toda la curva) porque se supone que la curva se prolonga de manera indefinida hacia abajo. De manera más precisa, estos nuevos términos se definen como sigue:

Definición

Una función *f* tiene un ***máximo relativo*** en *a* si existe un intervalo abierto que contenga a *a* sobre el cual $f(a) \geq f(x)$ para toda *x* incluida en el intervalo. El valor máximo relativo es $f(a)$. Una función *f* tiene un ***mínimo relativo*** en *a* si existe un intervalo abierto que contenga a *a* sobre el cual $f(a) \leq f(x)$ para toda *x* incluida en el intervalo. El valor mínimo relativo es $f(a)$.

Si existe un máximo absoluto, es único; sin embargo, puede ocurrir para más de un valor de *x*. Un enunciado semejante es cierto para un mínimo absoluto.

Definición

Una función *f* tiene un ***máximo absoluto*** en *a* si $f(a) \geq f(x)$ para toda *x* en el dominio de *f*. El máximo absoluto es $f(a)$. Una función *f* tiene un ***mínimo absoluto*** en *a* si $f(a) \leq f(x)$ para toda *x* incluida en el dominio de *f*. El valor mínimo absoluto es $f(a)$.

Cuando se haga referencia a un máximo o un mínimo relativo se le llamará **extremo relativo**. De manera análoga, se aludirá a los **extremos absolutos**.

Al tratar con extremos relativos, se compara el valor que tenga la función en un punto con el valor que tenga en puntos cercanos; sin embargo, al tratar con extremos absolutos, se compara el valor de la función en un punto con todos los otros valores determinados por el dominio. Así, los extremos relativos son *locales* por naturaleza, mientras que los extremos absolutos son *globales*.

Con referencia a la figura 9.5, se observa que en un extremo relativo la derivada puede no estar definida (por ejemplo, cuando $x = c$). Pero siempre que esté definida en un extremo relativo, es igual a 0 (por ejemplo, en $x = a$ y en $x = b$), por lo que la recta tangente es horizontal. Se puede establecer lo siguiente:

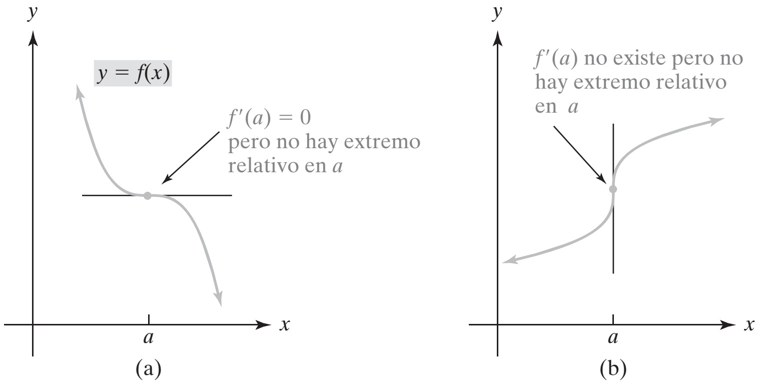
Regla 2 Una condición necesaria para extremos relativos

Si *f* tiene un extremo relativo en *a*, entonces $f'(a) = 0$ o bien $f'(a)$ no existe.

La implicación de la regla 2 solo es válida en una dirección:

$$\left.\begin{array}{c}\text{extremo relativo}\\ \text{en } a\end{array}\right\}\quad \text{implica}\quad \left\{\begin{array}{c} f'(a) = 0\\ \text{o}\\ f'(a) \text{ no existe}\end{array}\right.$$

La regla 2 *no* dice que si $f'(a)$ es 0 o $f'(a)$ no existe, entonces debe existir un extremo relativo en *a*. De hecho, es posible que no exista ninguno. Por ejemplo, en la figura 9.6*a*, $f'(a)$



(a) (b)

FIGURA 9.6 No hay extremo relativo en *a*.

es 0 porque la recta tangente es horizontal en a, pero no se tiene un extremo relativo ahí. En la figura 9.6*b*, $f'(a)$ no existe porque la recta tangente es vertical en a, pero de nuevo no se tiene un extremo relativo ahí.

Pero si se desea encontrar todos los extremos relativos de una función —y esta es una tarea importante— lo que la regla 2 *sí* dice es que la búsqueda puede limitarse a aquellos valores de x incluidos en el dominio de f para los cuales $f'(x) = 0$ *o bien* $f'(x)$ no existe. En forma típica, durante las aplicaciones, lo anterior reduce la búsqueda de extremos relativos a partir del número infinito de x para las cuales f está definida hasta un pequeño número finito de *posibilidades*. Como estos valores de x son tan importantes para localizar los extremos relativos de f, se llaman *valores críticos* para f y si a es un valor crítico para f, también puede decirse que $(a, f(a))$ es un *punto crítico* sobre la gráfica de f. Así, en la figura 9.5, los números a, b y c son valores críticos y P, Q y R son puntos críticos.

Definición

Para una a en el dominio de f, si $f'(a) = 0$ o bien $f'(a)$ no existe, entonces a se denomina ***valor crítico*** para f. Si a es un valor crítico, entonces el punto $(a, f(a))$ se denomina ***punto crítico*** para f.

En un punto crítico, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Además, a partir de la figura 9.5, se observa que cada extremo relativo ocurre en un punto alrededor del cual el signo de $f'(x)$ está cambiando. Para el máximo relativo en a, el signo de $f'(x)$ va desde $+$ para $x < a$ hasta — para $x > a$, *en tanto x esté cerca de a*. Para el mínimo relativo en b, el signo de $f'(x)$ va de $-$ a $+$ y, para el máximo relativo en c, va nuevamente de $+$ a $-$. Entonces, *alrededor de máximos relativos, f es creciente y luego decreciente y, para los mínimos relativos, es cierta la proposición inversa*. Con más precisión, se tiene la regla siguiente:

Regla 3 Criterios para extremos relativos

Suponga que f es continua en un intervalo abierto I que contiene el valor crítico a y que f es diferenciable en I, excepto posiblemente en a.

1. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando x aumenta al pasar por a, entonces f tiene un máximo relativo en a.

2. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando x aumenta al pasar por a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.

Para ilustrar la regla 3 con un ejemplo concreto, vea de nuevo la figura 9.3, el diagrama de signos para $f'(x) = 18 - 2x^2$. El renglón marcado por $f'(x)$ muestra claramente que $f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^2$ tiene un mínimo relativo en -3 y un máximo relativo en 3. El renglón que proporciona la interpretación de la gráfica para f, marcado como $f(x)$, se deduce inmediatamente a partir del renglón que está arriba de él. La importancia del renglón de $f(x)$ es

¡ADVERTENCIA!

Se hace énfasis de nuevo en que no a todo valor crítico le corresponde un extremo relativo. Por ejemplo, si $y = f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Como $f'(0) = 0$, 0 es un valor crítico. Pero si $x < 0$, entonces $3x^2 > 0$ y, si $x > 0$, entonces $3x^2 > 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo en 0, no existe un extremo relativo ahí. De hecho, como $f'(x) \geq 0$ para toda x, la gráfica de f no desciende nunca y se dice que f es *no decreciente*. (Vea la figura 9.8).

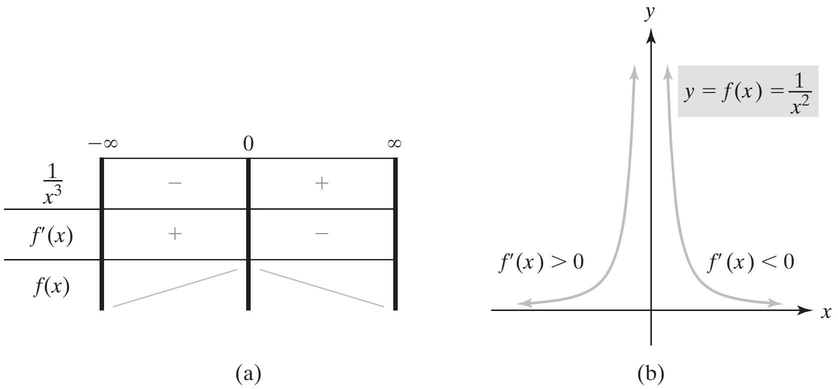


FIGURA 9.7 $f'(0)$ no está definida, pero 0 no es un valor crítico porque 0 no está en el dominio de f.

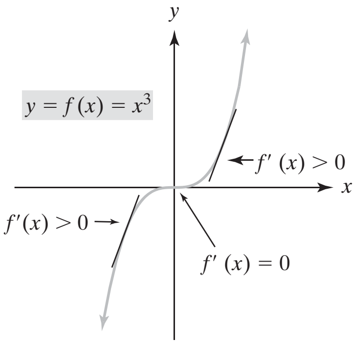


FIGURA 9.8 El 0 es un valor crítico, pero no proporciona un extremo relativo.

que proporciona un paso intermedio en el trazado real de la gráfica de f. En este renglón se establece, de manera visual, que f tiene un mínimo relativo en -3 y un máximo relativo en 3.

Cuando se buscan los extremos de una función f, debe tenerse cuidado con las a que no están en el dominio de f pero tienen valores cercanos en el dominio de f. Considere el siguiente ejemplo. Si

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Aunque $f'(x)$ no exista en 0, 0 no es un valor crítico porque no está en el dominio de f. Así, un extremo relativo no puede ocurrir en 0. Sin embargo, la derivada puede cambiar de signo alrededor de cualquier valor de x en que $f'(x)$ no esté definida, por lo que tales valores son importantes en la determinación de los intervalos sobre los que f es creciente o decreciente. En particular, dichos valores deben incluirse en un diagrama de signos para f'. Vea la figura 9.7(a) y la gráfica anexa 9.7(b).

Observe que la barra vertical en el 0 del diagrama sirve para indicar que 0 no está en el dominio de f. Aquí no existen extremos de ningún tipo.

En la regla 3, debe satisfacerse la hipótesis, o la conclusión no es necesariamente válida. Por ejemplo, considere el caso de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Aquí, 0 está explícitamente en el dominio de f pero f no es continua en 0. En la sección 7.1 se vio que si una función f no es continua en a, entonces f no es diferenciable en a, lo cual significa que $f'(a)$ no existe. Así, $f'(0)$ no existe y 0 es un valor crítico que debe incluirse en el diagrama de signos para f' que se muestra en la figura 9.9(a). Se extienden las convenciones del diagrama de signos al indicar con un símbolo × aquellos valores para

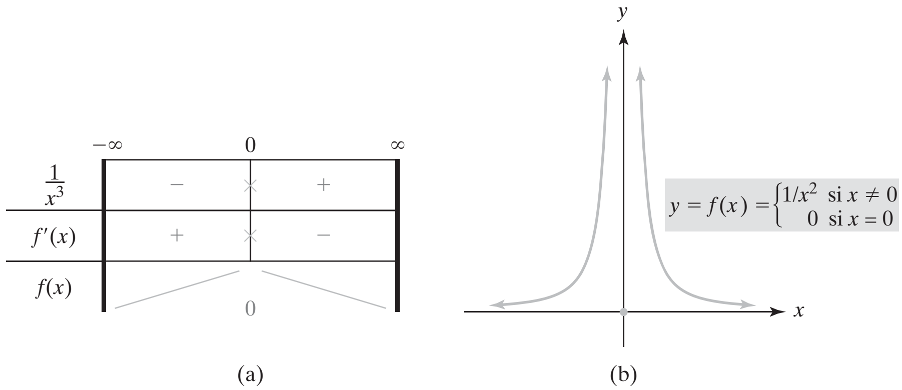


FIGURA 9.9 El 0 es un valor crítico, pero la regla 3 no es aplicable.

los cuales f' no existe. Se ve en este ejemplo que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando x aumenta al pasar por 0, pero que f *no* tiene un máximo relativo en 0. Aquí la regla 3 no es aplicable porque no se satisface su hipótesis de continuidad. En la figura 9.9(b), 0 se representa en el dominio de f. Resulta claro que f es un *mínimo* absoluto en 0 porque $f(0) = 0$ y, para toda $x \neq 0, f(x) > 0$.

Resumiendo los resultados de esta sección, se tiene la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para los extremos relativos

Paso 1. Encontrar $f'(x)$.

Paso 2. Determinar todos los valores críticos de f [aquellas a donde $f'(a) = 0$ o $f'(a)$ no exista] y cualquier a que no esté en el dominio de f pero tenga valores cercanos en el dominio de f, y construir entonces un diagrama de signos que muestre, para cada uno de los intervalos determinados por estos valores, si f es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente ($f'(x) < 0$).

Paso 3. Para cada valor crítico a en que f es continua, determinar si $f'(x)$ cambia de signo cuando x crece al pasar por a. Habrá un máximo relativo en a si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, al ir de izquierda a derecha, y habrá un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ al ir de izquierda a derecha. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no habrá un extremo relativo en a.

Paso 4. Para los valores críticos a en los cuales f no es continua, analizar la situación usando directamente las definiciones de los extremos.

EJEMPLO 1 Prueba de la primera derivada

Si $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, para $x \neq -1$, para $x \neq -1$ utilice la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.

Solución:

Paso 1. $f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$, por lo que

$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \quad \text{para } x \neq -1$$

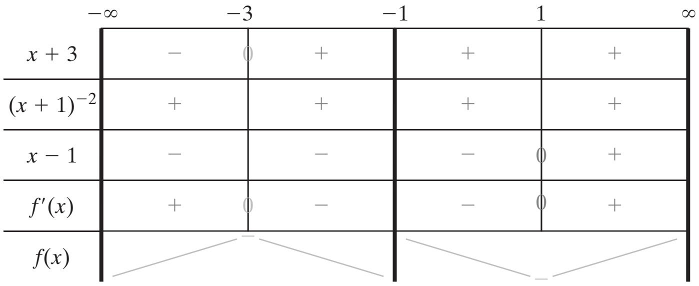
Observe que $f'(x)$ se expresó como un cociente con el numerador y el denominador completamente factorizados. Esto permite determinar con facilidad, en el paso 2, dónde $f'(x)$ es 0 o no existe, así como los signos de f'.

Paso 2. Haciendo $f'(x) = 0$, resulta $x = -3$, 1. El denominador de $f'(x)$ es 0 cuando x es -1. Se observa que -1 no está en el dominio de f pero que todos los valores cercanos a -1 sí están en el dominio de f. Se construye un diagrama de signos, encabezado por los valores -3, -1 y 1 (que se han colocado en orden creciente). Vea la figura 9.10.

Los tres valores conducen a probar cuatro intervalos como se muestra en el diagrama de signos. En cada uno de esos intervalos, f es diferenciable y no es 0. Se determina el signo de f' en cada intervalo al determinar primero el signo de cada uno de sus factores en cada intervalo. Por ejemplo, considerando primero el intervalo $(-\infty, -3)$, no es fácil ver inmediatamente que $f'(x) > 0$ ahí; pero sí es fácil ver que $x + 3 < 0$ para $x < -3$, mientras que $(x+1)^{-2} > 0$ para toda $x \neq 1$ y $x - 1 < 0$ para $x < 1$. Estas observaciones son útiles para los signos de los factores incluidos en la columna $(-\infty, -3)$ del diagrama. El signo de $f'(x)$ en esa columna se obtiene al "multiplicar signos" (hacia abajo): $(-)(+)(-) = +$. Se repiten estas consideraciones para los otros tres intervalos. Observe que la línea vertical gruesa trazada en el -1 del diagrama indica que -1 no está en el dominio de f y, por ende,

APLÍQUELO ▶

1. La ecuación de costo para un puesto de salchichas está dada por $c(q) = 2q^3 - 21q^2 + 60q + 500$, donde q es el número de bocadillos vendidos y $c(q)$ es el costo por unidad. Utilice la prueba de la primera derivada para determinar dónde ocurren los extremos relativos.



	$-\infty$	-3		-1		1	∞
$x + 3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x + 1)^{-2}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$							

FIGURA 9.10 Diagrama de signos para $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

no puede dar lugar a ningún extremo. En el renglón inferior del diagrama de signos se registra, de manera gráfica, la naturaleza de las líneas tangentes a $f(x)$ en cada intervalo y en los valores donde f' es 0.

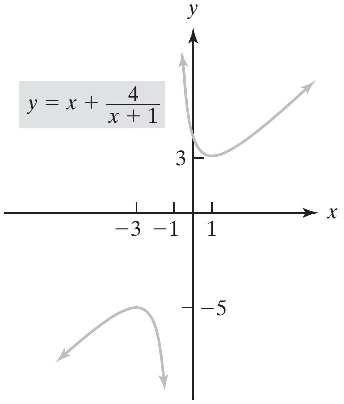
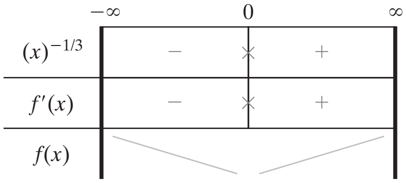


FIGURA 9.11 Gráfica de $y = x + \dfrac{4}{x+1}$.

Paso 3. Solo a partir del diagrama de signos se concluye que en -3 hay un máximo relativo (puesto que $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$ en -3). Además del diagrama, se calcula $f(-3) = -3 + (4/-2) = -5$ y esto da el valor máximo relativo de -5 en -3. A partir del diagrama, también se concluye que existe un mínimo relativo en 1 [porque $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ en 1]. Puesto que $f(1) = 1 + 4/2 = 3$, se ve que en 1 el valor mínimo relativo es 3.

Paso 4. No existen valores críticos en los puntos donde f no es continua, por lo que las consideraciones anteriores proporcionan la visión completa de los extremos relativos de $f(x)$, cuya gráfica se da en la figura 9.11. Observe que la forma general de la gráfica, de hecho, fue pronosticada por el renglón inferior del diagrama de signos (figura 9.10).

Ahora resuelva el problema 37 ◁



	$-\infty$	0	∞
$(x)^{-1/3}$	$-$	×	$+$
$f'(x)$	$-$	×	$+$
$f(x)$			

FIGURA 9.12 Diagrama de signos para $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

EJEMPLO 2 Un extremo relativo donde $f'(x)$ no existe

Pruebe $y = f(x) = x^{2/3}$ para los extremos relativos.

Solución: Se tiene

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

y el diagrama de signos es el que se muestra en la figura 9.12. De nuevo, se usa el símbolo × en la línea vertical de 0 para indicar que el factor $x^{-1/3}$ no existe en 0. Por lo tanto, $f'(0)$ no existe. Como f es continua en 0, a partir de la regla 3 se concluye que f tiene un mínimo relativo en 0 de $f(0) = 0$ y que no existen otros extremos relativos. Además, se observa mediante inspección que f tiene un mínimo *absoluto* en 0. La gráfica de f se comporta como se muestra en la figura 9.13. Note que se pudo haber predicho su forma a partir de la línea inferior del diagrama de signos de la figura 9.12, donde se muestra que no puede haber una tangente con pendiente en 0. (Por supuesto, la tangente sí existe en 0, pero es una recta vertical).

Ahora resuelva el problema 41 ◁

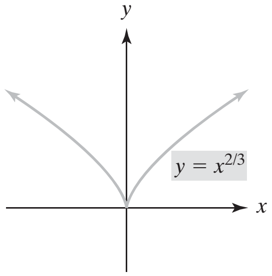


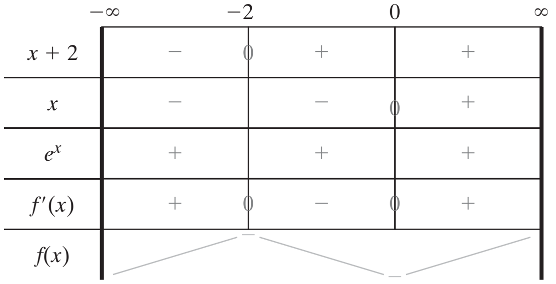
FIGURA 9.13 La derivada no existe en 0 y hay un mínimo en 0.

EJEMPLO 3 Determinación de extremos relativos

Pruebe $y = f(x) = x^2e^x$ para los extremos relativos.

Solución: Por la regla del producto,

$$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2)$$



	$-\infty$		-2		0		∞
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

FIGURA 9.14 Diagrama de signos para $f'(x) = x(x + 2)e^x$.

APLÍQUELO ▶

2. Un medicamento se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente. La concentración del medicamento en el torrente sanguíneo t horas después de haberse inyectado se aproxima por medio de $C(t) = \dfrac{0.14t}{t^2 + 4t + 4}$. Encuentre los extremos relativos para $t > 0$ y utilícelos para determinar cuándo está el medicamento en su máxima concentración.

Después de observar que e^x siempre es positiva, se obtienen los valores críticos 0 y -2. A partir del diagrama de signos de $f'(x)$ dado en la figura 9.14, se concluye que existe un máximo relativo cuando $x = -2$ y un mínimo relativo cuando $x = 0$.

Ahora resuelva el problema 49 ◁

Trazado de una curva

En el ejemplo siguiente se muestra la forma en que puede usarse la prueba de la primera derivada, junto con los conceptos de intersección y simetría, como una ayuda para trazar la gráfica de una función.

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trace la gráfica de $y = f(x) = 2x^3 - x^4$ con ayuda de las intersecciones, la simetría y la prueba de la primera derivada.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$, de modo que la intersección y es (0, 0). A continuación, observe que

$$f(x) = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2\left(\sqrt{2} + x\right)\left(\sqrt{2} - x\right)$$

De manera que si $y = 0$, entonces $x = 0, \pm\sqrt{2}$ y las intersecciones x son $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 0), y $(\sqrt{2}, 0)$. Se tiene el diagrama de signos *para la propia* f (figura 9.15), el cual muestra los intervalos sobre los que la gráfica de $y = f(x)$ está por encima del eje x (+) y los intervalos sobre los que la gráfica de $y = f(x)$ está por debajo del eje x (−).

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		∞
$\sqrt{2} + x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{2} - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

FIGURA 9.15 Diagrama de signos para $f(x) = (\sqrt{2} + x)x^2(\sqrt{2} - x)$.

Simetría Al investigar la simetría con respecto al eje y, se tiene

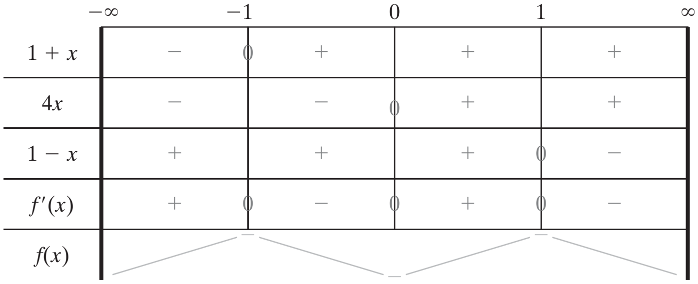
$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x)$$

Por lo que se tiene simetría con respecto al eje y. Como y es una función (y no es la función 0), no hay simetría con respecto al eje x y, en consecuencia, no hay simetría con respecto al origen.

Prueba de la primera derivada

Paso 1. $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 2. Al hacer $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = 0, \pm 1$. Como f es un polinomio, está definido y es diferenciable para toda x. Así que los únicos valores que encabezan el diagrama de signos para f' son -1, 0, 1 (en orden creciente) y el diagrama de signos se da en la figura 9.16. Como se tiene interés en determinar una gráfica,



	$-\infty$		-1		0		1		∞
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									

FIGURA 9.16 Diagrama de signos de $y' = (1 + x)4x(1 - x)$.

los *puntos* críticos adquieren mucha importancia. Sustituyendo los valores críticos en la ecuación *original*, $y = 2x^2 — x^4$, se obtienen las coordenadas y de esos puntos. Se encuentra que los puntos críticos son $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Paso 3. A partir del diagrama de signos y de las evaluaciones realizadas en el paso 2, es claro que f tiene máximos relativos en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$. (El paso 4 no es aplicable aquí).

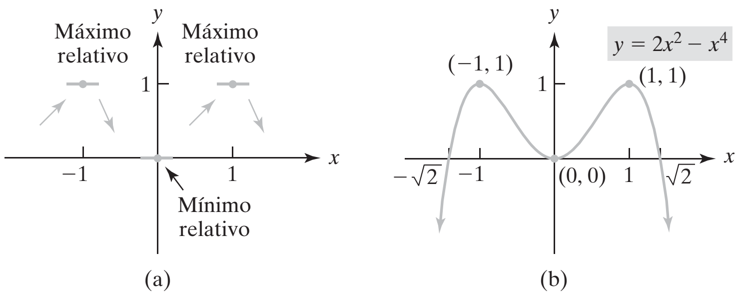


FIGURA 9.17 Reunión de la información para determinar la gráfica de $y = 2x^2 - x^4$.

Análisis En la figura 9.17(a), se han indicado las tangentes horizontales en los puntos máximo y mínimo relativos. Se sabe que la curva asciende desde la izquierda, tiene un máximo relativo, luego desciende, tiene un mínimo relativo, después se eleva hacia un máximo relativo y de ahí en adelante desciende. Por simetría, es suficiente con trazar la gráfica en un lado del eje y y luego construir una imagen en espejo en el otro lado. También se conocen, a partir del diagrama de signos construido para f, los puntos donde la gráfica cruza y toca al eje x, lo cual agrega aún más precisión al bosquejo que se muestra en la figura 9.17(b).

Como un simple comentario, puede observarse que ocurren máximos *absolutos* en $x = \pm 1$. Vea la figura 9.17(b). No existe mínimo absoluto.

Ahora resuelva el problema 59 ◁

TECNOLOGÍA

Una calculadora gráfica es una poderosa herramienta útil para investigar los extremos relativos. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$$

cuya gráfica se muestra en la figura 9.18. Parece que hay un mínimo relativo cerca de $x = 1$. Este mínimo puede localizarse usando la técnica “dibuje y amplifique” o (en la TI-83 Plus) la característica de “mínimo”. Este último procedimiento se muestra en la figura 9.19. Se estima que el punto mínimo relativo es $(1.00, 3)$.

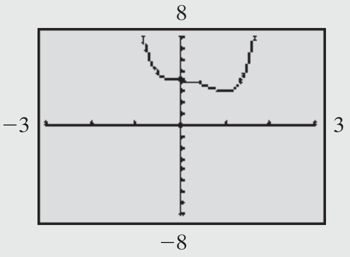


FIGURA 9.18 Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$.

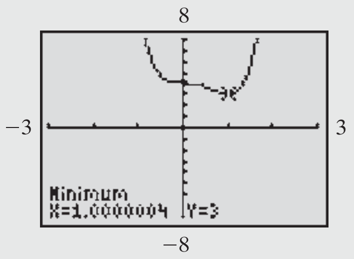


FIGURA 9.19 Mínimo relativo en (1.00, 3).

Ahora se verá que la gráfica de f' indica cuándo ocurren los extremos. Se tiene

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

cuya gráfica se muestra en la figura 9.20. Parece que $f'(x)$ es 0 en dos puntos. Usando “dibuje y amplifique” o el dispositivo para encontrar “ceros”, se estima que los ceros de f' (valores críticos de f) son 1 y 0. Alrededor de $x = 1$, se observa que $f'(x)$ pasa de valores negativos a valores positivos. (Esto es, la gráfica de f' pasa de abajo hacia arriba del eje x). Así, se concluye que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$, lo cual confirma el resultado anterior.

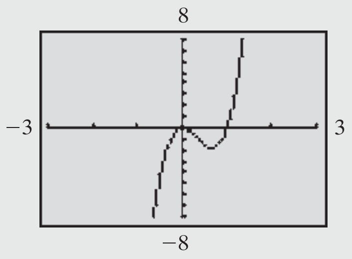


FIGURA 9.20 Gráfica de $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$.

Alrededor del valor crítico $x = 0$, los valores de $f'(x)$ son negativos. Como $f'(x)$ no cambia de signo, se concluye que no existe un extremo relativo en $x = 0$. Esto es también evidente en la gráfica de la figura 9.18.

Vale la pena mencionar que la gráfica de f' se puede aproximar sin determinar la propia $f'(x)$. Para ello, se hace uso de la característica “nDeriv”. Primero se introduce la función f como Y_1. Luego se establece

$$Y_2 = \text{nDeriv}(Y_1, X,X)$$

La gráfica de Y_2 aproxima la gráfica de $f'(x)$.

PROBLEMAS 9.1

En los problemas del 1 al 4, se da la gráfica de una función (figuras 9.21 a 9.24). Encuentre los intervalos abiertos en los que la función está creciendo o decreciendo, así como las coordenadas de todos los extremos relativos.

1.

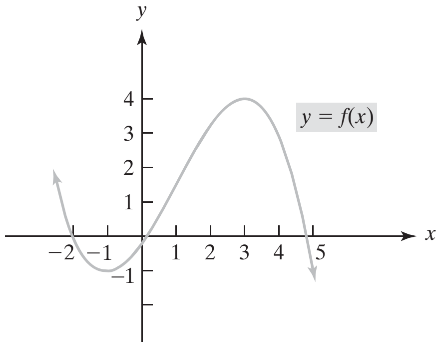


FIGURA 9.21

2.

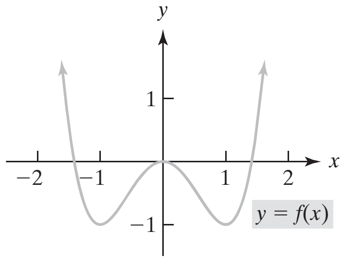


FIGURA 9.22

3.

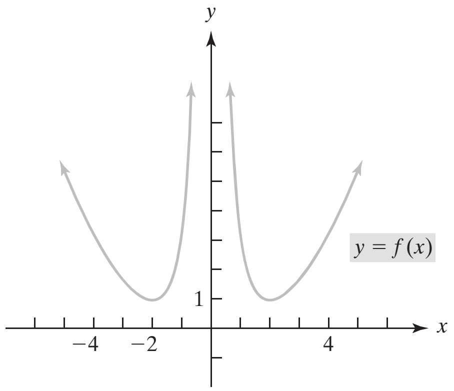


FIGURA 9.23

4.

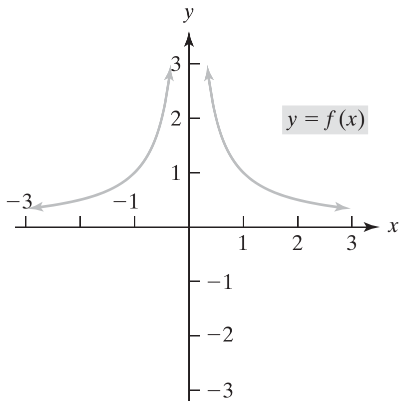


FIGURA 9.24

En los problemas del 5 al 8 se da la derivada de una función continua f. Encuentre los intervalos abiertos en los que f es **(a)** *creciente,* **(b)** *decreciente y* **(c)** *encuentre los valores de x de todos los extremos relativos.*

5. $f'(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$

6. $f'(x) = 2x(x - 1)^3$

7. $f'(x) = (x + 1)(x - 3)^2$ **8.** $f'(x) = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 + 1}$

En los problemas del 9 al 52, determine cuándo la función es **(a)** *creciente,* **(b)** *decreciente y* **(c)** *determine dónde ocurren los extremos relativos. No trace la gráfica.*

9. $y = -x^3 - 1$ **10.** $y = x^2 + 4x + 3$

11. $y = x - x^2 + 2$ **12.** $y = x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 6$

13. $y = -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$ **14.** $y = -\dfrac{x^4}{4} - x^3$

15. $y = x^4 - 2x^2$ **16.** $y = -3 + 12x - x^3$

17. $y = x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + 2x - 5$ **18.** $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

19. $y = 2x^3 - \dfrac{19}{2}x^2 + 10x + 2$ **20.** $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$

21. $y = \dfrac{x^3}{3} - 5x^2 + 22x + 1$ **22.** $y = \dfrac{9}{5}x^5 - \dfrac{47}{3}x^3 + 10x$

23. $y = 3x^5 - 5x^3$ **24.** $y = 3x - \dfrac{x^6}{2}$ (Observación: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene raíces reales).

25. $y = -x^5 - 5x^4 + 200$ **26.** $y = \dfrac{3x^4}{2} - 4x^3 + 17$

27. $y = 8x^4 - x^8$ **28.** $y = \dfrac{4}{5}x^5 - \dfrac{13}{3}x^3 + 3x + 4$

29. $y = (x^2 - 4)^4$ **30.** $y = \sqrt[3]{x}(x - 2)$

31. $y = \dfrac{5}{x - 1}$ **32.** $y = \dfrac{3}{x}$

33. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$ **34.** $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

(a) para $ad - bc > 0$
(b) para $ad - bc < 0$

35. $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$ **36.** $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$

37. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$ **38.** $y = \dfrac{2x^2}{4x^2 - 25}$

39. $y = \dfrac{ax^2 + b}{cx^2 + d}$ para $d/c < 0$ **40.** $y = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$

(a) para $ad - bc > 0$
(b) para $ad - bc < 0$

41. $y = (x - 1)^{2/3}$ **42.** $y = x^2(x + 3)^4$

43. $y = x^3(x - 6)^4$ **44.** $y = (1 - x)^{2/3}$

45. $y = e^{-\pi x} + \pi$ **46.** $y = x \ln x$

47. $y = x^2 - 9 \ln x$ **48.** $y = x^{-1}e^x$

49. $y = e^x - e^{-x}$ **50.** $y = e^{-x^2/2}$

51. $y = x \ln x - x$ **52.** $y = (x^2 + 1)e^{-x}$

En los problemas del 53 al 64, determine los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los extremos relativos, la simetría y aquellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

53. $y = x^2 - 3x - 10$ **54.** $y = 2x^2 + x - 10$

55. $y = 3x - x^3$ **56.** $y = x^4 - 16$

57. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **58.** $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 4$

59. $y = x^4 - 2x^2$ **60.** $y = x^6 - \dfrac{6}{5}x^5$

61. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$ **62.** $y = \sqrt{x}(x^2 - x - 2)$

63. $y = 2\sqrt{x} - x$ **64.** $y = x^{5/3} - 2x^{2/3}$

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(2) = 2, f(4) = 6$, $f'(2) = f'(4) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 2$, $f'(x) > 0$ para $2 < x < 4$, f tenga un máximo relativo en 4 y $\text{lím}_{x\to\infty} f(x) = 0$.

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 2, f(4) = 5$, $f'(1) = 0$, $f'(x) \geq 0$ para $x < 4$, f tenga un máximo relativo cuando $x = 4$ y tenga una recta tangente vertical en $x = 4$.

67. Costo promedio Si $c_f = 25\,000$ es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio $\overline{c}f = c_f/q$ es una función decreciente para $q > 0$. Por lo que, cuando la producción q crece una unidad, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

68. Costo marginal Si $c = 3q — 3q^2 + q^3$ es una función de costo, ¿cuándo es creciente el costo marginal?

69. Ingreso marginal Dada la función de demanda

$$p = 500 - 5q$$

encuentre cuándo es creciente el costo marginal.

70. Función de costo Para la función de costo $c = \sqrt{q}$, demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decrecientes para $q > 0$.

71. Ingreso Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por $r = 240q + 57q^2 — q^3$. Determine la producción necesaria para obtener un ingreso máximo.

72. Mercados de trabajo Eswaran y Kotwal[1] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados bajo contrato a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los eventuales son empleados por día y efectúan tareas rutinarias como deshierbe, cosecha y trillado. La diferencia z en el costo a valor presente de contratar a un trabajador permanente y a un eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante positiva y w_p es una función de w_c.

(a) Demuestre que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right]$$

(b) Si $dw_p/dw_c < b/(1 + b)$, demuestre que z es una función decreciente de w_c.

---

[1] M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economics", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), pp. 162-177.

73. Contaminación térmica En el análisis de Shonle acerca de la contaminación térmica,[2] la eficiencia de una planta de energía se mide por

$$E = 0.71\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas correspondientes a las reservas de agua que tienen temperaturas más elevadas y temperaturas más frías, respectivamente. Suponga que T_c es una constante positiva y que T_h es positiva. Por medio del cálculo, demuestre que la eficiencia aumenta conforme se incrementa T_h.

74. Servicio telefónico En un análisis de precio del servicio telefónico local, Renshaw[3] determina que el ingreso total r está dado por

$$r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b}$$

donde p es un precio indexado por llamada y a, b y F son constantes. Determine el valor de p que maximiza el ingreso.

75. Costos de almacenamiento y envío En su modelo de costos de almacenamiento y envío de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster[4] obtiene la siguiente función de costo

$$C(k) = 100\left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right) \qquad 1 \leq k \leq 100$$

donde $C(k)$ es el costo total de almacenamiento y transporte para 100 días de operación si una carga de k toneladas de material se traslada cada k días.

(a) Encuentre $C(1)$.

(b) ¿Para qué valor de k tiene $C(k)$ un mínimo?

(c) ¿Cuál es el valor mínimo?

76. Fisiología (aeroembolismo) Cuando un buzo sufre descompresión o un piloto vuela a gran altura, el nitrógeno empieza a burbujear en la sangre, ocasionando lo que se denomina *aeroembolismo*. Suponga que el porcentaje P de gente que sufre este efecto a una altura de h miles de pies está dado por[5]

$$P = \frac{100}{1 + 100\,000e^{-0.36h}}$$

¿Es P una función creciente de h?

En los problemas del 77 al 80, con base en la gráfica de la función, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

77. $y = 0.3x^2 + 2.3x + 5.1$

78. $y = 3x^4 - 4x^3 - 5x + 1$

79. $y = \dfrac{8.2x}{0.4x^2 + 3}$

80. $y = \dfrac{e^x(3 - x)}{7x^2 + 1}$

81. Grafique la función

$$f(x) = [x(x - 2)(2x - 3)]^2$$

en la ventana $-1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 3$. A primera vista, podría parecer que esta función tiene dos puntos mínimos relativos y un máximo relativo. Sin embargo, en realidad tiene tres puntos mínimos relativos y dos máximos relativos. Determine los valores x de esos puntos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

82. Si $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$, exhiba las gráficas de f y f' en la misma pantalla. Note que es en $f'(x) = 0$ donde ocurren los extremos relativos de f.

83. Sea $f(x) = 6 + 4x - 3x^2 - x^3$. (a) Encuentre $f'(x)$. (b) Grafique $f'(x)$. (c) Observe dónde es positiva $f'(x)$ y dónde es negativa. Proporcione los intervalos (redondeados a dos decimales) en que f es creciente y decreciente. (d) Grafique f y f' en la misma pantalla y verifique sus resultados del inciso (c).

84. Si $f(x) = x^4 - x^2 - (x + 2)^2$, encuentre $f'(x)$. Determine los valores críticos de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

Objetivo

Encontrar los valores extremos en un intervalo cerrado.

9.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Si una función f es *continua* en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, puede demostrarse que entre *todos* los valores de $f(x)$ de la función de x en $[a, b]$ debe haber un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto. Esos dos valores se llaman **valores extremos** de f en ese intervalo. Esta importante propiedad de las funciones continuas se llama *teorema del valor extremo*.

Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función tiene *tanto* un valor máximo *como* un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo, en la figura 9.25 cada función es continua en el intervalo cerrado $[1, 3]$. En forma geométrica, el teorema del valor extremo asegura que sobre este intervalo cada gráfica tiene un punto de altura máxima y otro de altura mínima.

En el teorema del valor extremo, es importante que haya una situación en la que se tenga

1. un intervalo cerrado y
2. una función continua sobre ese intervalo.

---

[2] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

[3] E. Renshaw, "A Note of Equity and Efficiency in the Pricing of Local Telephone Services", *The American Economic Review*, 75, núm. 3 (1985), pp. 515-518.

[4] P. Lancaster, *Mathematics: Models of the Real World* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1976).

[5] Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, 2a. ed. (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

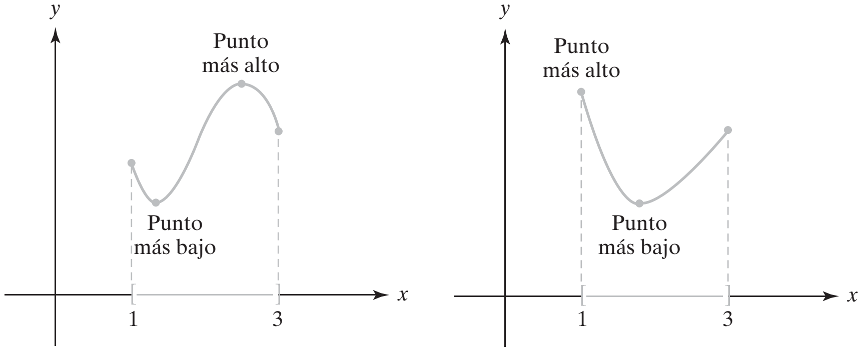
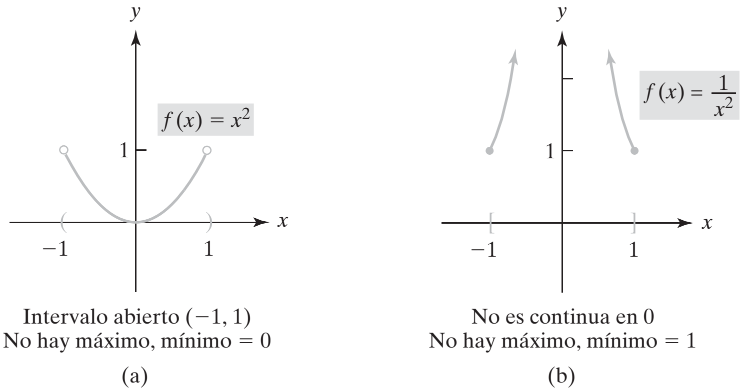


FIGURA 9.25 Ilustración del teorema de los valores extremos.

Si cualquiera de las dos condiciones anteriores (1 o 2) no se cumple, entonces los valores extremos no están garantizados. Por ejemplo, en la figura 9.26(a) se muestra la gráfica de la función continua $f(x) = x^2$ en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$. Usted puede ver que f no tiene un valor máximo en el intervalo (aunque tenga ahí un valor mínimo). Ahora considere la función $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Aquí, *f no es continua* en 0. En la gráfica de f de la figura 9.26(b), puede verse que f no tiene un valor máximo (aunque sí tiene un valor mínimo).



Intervalo abierto $(-1, 1)$
No hay máximo, mínimo = 0
(a)

No es continua en 0
No hay máximo, mínimo = 1
(b)

FIGURA 9.26 El teorema de los valores extremos no es aplicable.

En la sección anterior, se puso énfasis en los extremos relativos. Ahora la atención estará centrada en los extremos absolutos y se hará uso del teorema del valor extremo donde sea posible. Si el dominio de una función es un intervalo cerrado, para determinar extremos *absolutos* se debe examinar la función no solo en los valores críticos, sino también en los puntos extremos. Por ejemplo, en la figura 9.27 se muestra la gráfica de la función continua $y = f(x)$ en $[a, b]$. El teorema del valor extremo garantiza extremos absolutos en el intervalo. Es claro que los puntos importantes sobre la gráfica se presentan en $x = a, b, c$

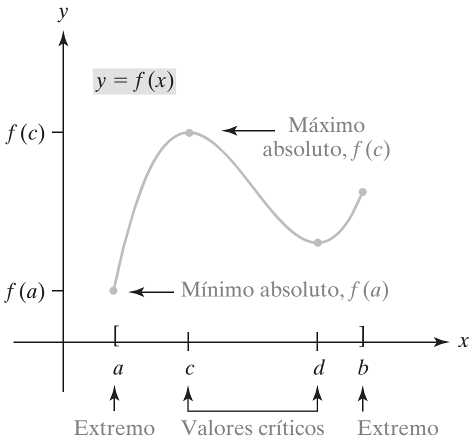


FIGURA 9.27 Extremos absolutos.

y d, los cuales corresponden a puntos extremos o a valores críticos. Note que el máximo absoluto ocurre en el valor crítico c y que el mínimo absoluto ocurre en el punto extremo a. Estos resultados sugieren el procedimiento siguiente:

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f que es continua en $[a, b]$

Paso 1. Encontrar los valores críticos de f.

Paso 2. Evaluar $f(x)$ en los puntos extremos a y b y en los valores críticos en (a, b).

Paso 3. El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

EJEMPLO 1 Determinación de los valores extremos en un intervalo cerrado

Encuentre los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado [1, 4].

Solución: Como f es continua sobre [1, 4], el procedimiento anterior es aplicable aquí.

Paso 1. Para encontrar los valores críticos de f, primero se encuentra f':

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Esto da el valor crítico $x = 2$.

Paso 2. Al evaluar $f(x)$ en los puntos extremos 1 y 4 y en el valor crítico 2, se tiene

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(4) &= 5 \end{aligned} \quad \text{valores de } f \text{ en los extremos}$$

y

$$f(2) = 1 \quad \text{valor de } f \text{ en el valor crítico 2 en } (1, 4)$$

Paso 3. A partir de los valores de la función evaluados en el paso 2, se concluye que el máximo es $f(4) = 5$ y el mínimo es $f(2) = 1$. (Vea la figura 9.28).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

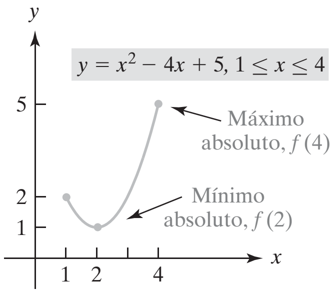


FIGURA 9.28 Valores extremos para el ejemplo 1.

PROBLEMAS 9.2

En los problemas del 1 al 14, encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, [0, 3]
2. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5$, [−3, 2]
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, [−1, 0]
4. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$, [0, 1]
5. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 50$, [0, 5]
6. $f(x) = x^{2/3}$, [−8, 8]
7. $f(x) = -3x^5 + 5x^3$, [−2, 0]
8. $f(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, [0, 3]
9. $f(x) = 3x^4 - x^6$, [−1, 2]
10. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 2$, [0, 4]
11. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2$, [−1, 3]
12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, [0, 2]
13. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$, [−26, 28]
14. $f(x) = 0.2x^3 - 3.6x^2 + 2x + 1$, [−1, 2]
15. Considere la función

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$$

en el intervalo [−4, 9].

(a) Determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de x en que f alcanza un valor mínimo.
(b) ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de f?
(c) Determine el o los valores de x en que f alcanza un valor máximo.
(d) ¿Cuál es el valor máximo de f?

Objetivo

Probar una función por concavidad y puntos de inflexión. También, hacer el bosquejo de curvas con ayuda de la información obtenida a partir de la primera y segunda derivadas.

9.3 Concavidad

La primera derivada proporciona mucha información útil para el trazado de gráficas. Se usa para determinar cuándo es creciente o decreciente una función y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva se necesita más información. Por ejemplo, considere la curva $y = f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$,

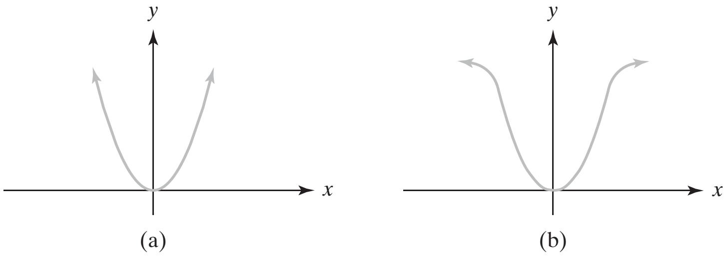


FIGURA 9.29 Dos funciones con $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$.

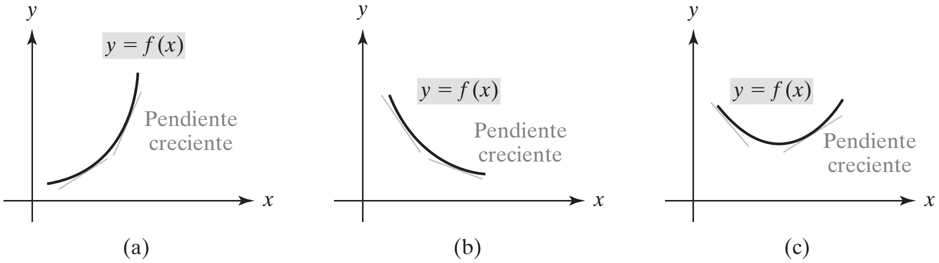


FIGURA 9.30 Cada una de las curvas es cóncava hacia arriba.

$x = 0$ es un valor crítico. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente; si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Por lo tanto, se tiene un mínimo relativo cuando $x = 0$. En la figura 9.29 ambas curvas satisfacen las condiciones anteriores. Pero, ¿cuál gráfica describe verdaderamente la curva $y = x^2$? Esta pregunta se contesta con facilidad usando la segunda derivada y la noción de *concavidad*.

En la figura 9.30, observe que cada curva $y = f(x)$ se "flexiona" (o abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedarán *por arriba* de las tangentes. Además, las pendientes de las rectas tangentes *crecen* en valor al aumentar x: en la parte (a), las pendientes van de valores positivos pequeños a valores mayores; en la parte (b), son negativas y se acercan a 0 (por ende son crecientes); en la parte (c), pasan de valores negativos a positivos. Como $f'(x)$ proporciona la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que f' debe ser una función creciente. Para describir esta propiedad, se dice que cada curva (o función f) de la figura 9.30 es *cóncava hacia arriba*.

En la figura 9.31, puede observarse que cada curva se encuentra por debajo de las rectas tangentes y que las curvas se flexionan hacia abajo. Cuando x aumenta, las pendientes de las rectas tangentes son *decrecientes*. Entonces, aquí f' debe ser una función decreciente y se dice que es *cóncava hacia abajo*.

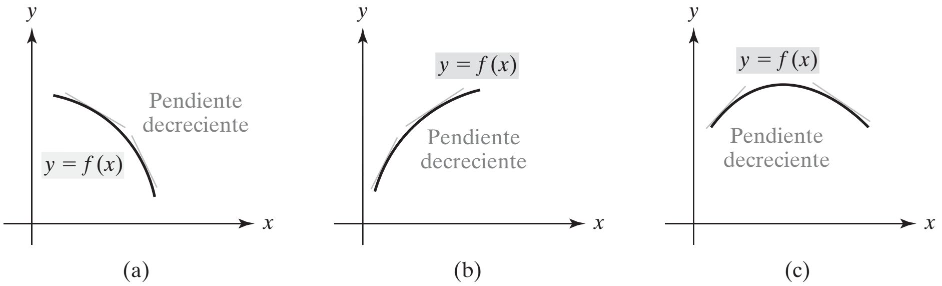


FIGURA 9.31 Cada una de las curvas es cóncava hacia abajo.

Definición

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces, se dice que f es ***cóncava hacia arriba*** **[*cóncava hacia abajo*]** en (a, b) si f' es creciente [decreciente] sobre (a, b). (Tome en cuenta que en economía se acostumbra llamar *funciones convexas* a aquellas que son cóncavas hacia arriba y *funciones cóncavas* a las funciones que son cóncavas hacia abajo).

Recuerde: Si f es cóncava hacia arriba en un intervalo, entonces, desde el punto de vista geométrico, ahí su gráfica se flexiona hacia arriba. Si f es cóncava hacia abajo, su gráfica se flexiona hacia abajo.

¡ADVERTENCIA!

La concavidad se refiere a si f', no f, es creciente o decreciente. En la figura 9.30(b), note que f es cóncava hacia arriba y decreciente; sin embargo, en la figura 9.31(a), f es cóncava hacia abajo y decreciente.

Como f' es creciente cuando su derivada $f'(x)$ es positiva y f' es decreciente cuando $f'(x)$ es negativa, puede establecerse la regla siguiente:

Regla 1 Criterios de concavidad

Sea f' diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

También se dice que una función f es cóncava hacia arriba en un punto c si existe un intervalo abierto alrededor de c en el cual f es cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que se considerarán, si $f''(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en c. En forma similar, f es cóncava hacia abajo en c si $f''(c) < 0$.

EJEMPLO 1 Prueba de la concavidad

Determine dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo la función dada.

a. $y = f(x) = (x - 1)^3 + 1$.

Solución: Para aplicar la regla 1, se deben examinar los signos de y''. Ahora, $y' = 3(x - 1)^2$, por lo que

$$y'' = 6(x - 1)$$

Así, f es cóncava hacia arriba cuando $6(x - 1) > 0$; esto es, cuando $x > 1$. Y f es cóncava hacia abajo cuando $6(x - 1) < 0$; esto es, cuando $x < 1$. A continuación se usa un diagrama de signos para f'' (junto con un renglón de interpretación de f) con el fin de organizar las conclusiones a que hemos llegado. (Vea la figura 9.32).

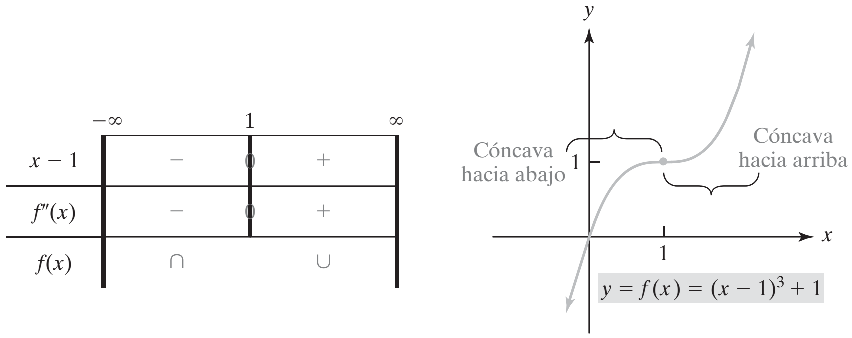


FIGURA 9.32 Diagrama de signos para f'' y concavidad para $f(x) = (x - 1)^3 + 1$.

b. $y = x^2$.

Solución: Se tiene $y' = 2x$ y $y'' = 2$. Como y'' siempre es positiva, la gráfica de $y = x^2$ debe ser siempre cóncava hacia arriba, como se ve en la figura 9.29(a). La gráfica no puede ser como en la figura 9.29(b), ya que esa curva a veces es cóncava hacia abajo.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Un punto sobre una gráfica cuya concavidad cambia de ser cóncava hacia abajo a ser cóncava hacia arriba, o viceversa, como el punto (1, 1) de la figura 9.32, se llama *punto de inflexión*. Alrededor de tal punto, el signo de $f''(x)$ debe pasar de − a + o de + a −. De manera más precisa, se tiene la siguiente definición:

Definición

Una función f tiene un ***punto de inflexión*** en a si y solo si f es continua en a y cambia de concavidad en a.

La definición de un punto de inflexión implica que a está en el dominio de f.

Para determinar la concavidad de una función y sus puntos de inflexión, encuentre primero los valores de x donde $f''(x)$ es 0 o no está definida. Esos valores de x determinan intervalos. En cada intervalo, determine si $f''(x) > 0$ (f es cóncava hacia arriba) o $f''(x) < 0$ (f es cóncava hacia abajo). Si la concavidad cambia alrededor de uno de esos valores de x y f es continua ahí, entonces f tiene un punto de inflexión en ese valor de x. El requisito de continuidad implica que el valor x debe estar en el dominio de la función. En breve, un *candidato* a punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones:

1. f'' debe ser 0 o no existir en ese punto.
2. f debe ser continua en ese punto.

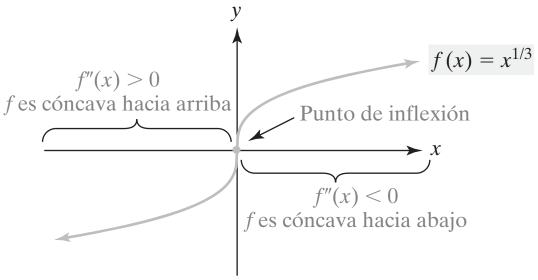


FIGURA 9.33 Punto de inflexión para $f(x) = x^{1/3}$.

El candidato *será* un punto de inflexión si la concavidad cambia a su alrededor. Por ejemplo, si $f(x) = x^{1/3}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ y

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

Como f'' no existe en 0, pero f es continua en 0, se tiene un candidato a punto de inflexión en 0. Si $x > 0$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava hacia abajo para $x > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba para $x < 0$. Como la concavidad cambia en 0, ahí se tiene un punto de inflexión. (Vea la figura 9.33).

EJEMPLO 2 Concavidad y puntos de inflexión

Pruebe la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución: Se tiene

$$y' = 24x^3 - 24x^2$$
$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x - 2)$$

	$-\infty$		0		2/3		∞
x		−	0	+		+	
$3x - 2$		−		−	0	+	
y''		+	0	−	0	+	
y		∪		∩		∪	

FIGURA 9.34 Diagrama de signos de $y'' = 24x(3x - 2)$ para $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Para encontrar cuándo $y'' = 0$, se iguala a 0 cada factor incluido en y''. Esto da $x = 0, \frac{2}{3}$. También se observa que y'' nunca deja de estar definida. Así, hay tres intervalos por considerar, tal como se registra en la parte superior del diagrama de signos de la figura 9.34. Como y es continua en 0 y en $\frac{2}{3}$, esos puntos son candidatos a puntos de inflexión. Después de completar el diagrama de signos, se observan los cambios de concavidad en 0 y $\frac{2}{3}$. Así que estos candidatos son en efecto puntos de inflexión. (Vea la figura 9.35). En resumen, la curva es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, \infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(0, \frac{2}{3})$. Los puntos de inflexión ocurren en 0 y en $\frac{2}{3}$. Estos puntos son $(0, y(0)) = (0, 1)$ y $(\frac{2}{3}, y(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{27})$.

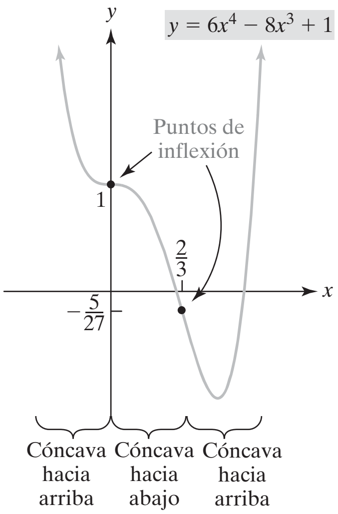


FIGURA 9.35 Gráfica de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

Tal como se hizo en el análisis de las gráficas crecientes y decrecientes, en la concavidad debe considerarse el estudio de aquellos puntos *a* que no están en el dominio de *f* pero son puntos cercanos en el dominio de *f*. Esto se ilustrará en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Cambio en la concavidad sin punto de inflexión

Analice la concavidad y encuentre todos los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: Dado que $f(x) = x^{-1}$ para $x \neq 0$,

$$f'(x) = -x^{-2} \quad \text{para } x \neq 0$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \quad \text{para } x \neq 0$$

Se observa que $f''(x)$ nunca es 0, pero no está definida en $x = 0$. Como *f* no es continua en 0, se concluye que 0 no es un candidato a punto de inflexión. Así, la función dada no tiene puntos de inflexión. Sin embargo, 0 debe considerarse en el análisis de la concavidad. Vea el diagrama de signos de la figura 9.36; observe que se ha trazado una línea vertical en 0 para indicar que no está en el dominio de *f* y no puede corresponder a un punto de inflexión. Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) < 0$. Por lo tanto, *f* es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. (Vea la figura 9.37). Aunque la concavidad cambia alrededor de $x = 0$, ahí no existe punto de inflexión porque *f* no es continua en 0 (ni está definida ahí).

Ahora resuelva el problema 23 ◁

	$-\infty$		0		∞
$\frac{1}{x^3}$		−		+	
$f''(x)$		−		+	
$f(x)$		∩		∪	

FIGURA 9.36 Diagrama de signos para $f''(x)$.

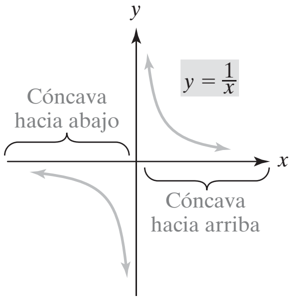


FIGURA 9.37 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

¡ADVERTENCIA!

Un candidato a punto de inflexión no tiene que ser necesariamente un punto de inflexión. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f''(x) = 12x^2$ y $f''(0) = 0$. Pero, $f''(x) > 0$ tanto cuando $x < 0$ como cuando $x > 0$. Así que la concavidad no cambia y no se tienen puntos de inflexión. (Vea la figura 9.38).

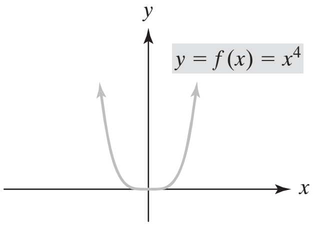


FIGURA 9.38 Gráfica de $f(x) = x^4$.

Trazado de una curva

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trace la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Haciendo $y = 0$, resulta que $0 = x(2x^2 - 9x + 12)$. Claramente, $x = 0$ es una solución y, al utilizar la fórmula cuadrática en $2x^2 - 9x + 12 = 0$, se encuentra que no tiene raíces reales. Por lo tanto, la única intersección es (0, 0). De hecho, como $2x^2 - 9x + 12$ es una función continua cuyo valor en 0 es $2 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$, se concluye que $2x^2 - 9x + 12 > 0$ para toda *x*, lo cual da el diagrama de signos de la figura 9.39 para *y*.

Observe que este diagrama indica que la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ está confinada al tercero y cuarto cuadrantes del plano *xy*.

Simetría Ninguna.

Máximos y mínimos Se tiene

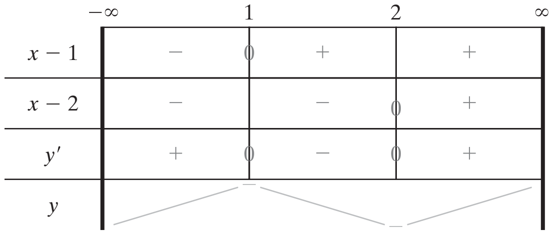
$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

Los valores críticos son $x = 1, 2$, de manera que éstos y los factores $x - 1$ y $x - 2$ determinan el diagrama de signos de y' (figura 9.40).

A partir del diagrama de signos para y' vemos que existe un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 2. Observe también que la línea inferior de la figura 9.40, junto con la de la figura 9.39, ayuda a determinar una gráfica precisa de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Por

	$-\infty$		0		∞
x		−	0	+	
$2x^2 - 9x + 12$		+		+	
y		−	0	+	

FIGURA 9.39 Diagrama de signos para *y*.



	$-\infty$		1		2		∞
$x - 1$		−	0	+		+	
$x - 2$		−		−	0	+	
y'		+	0	−	0	+	
y							

FIGURA 9.40 Diagrama de signos de $y' = 6(x - 1)(x - 2)$.

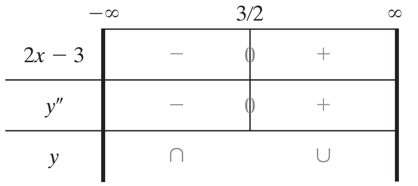


FIGURA 9.41 Diagrama de signos de y''.

supuesto, ayudará también a conocer el máximo relativo $y(1) = 5$, el cual ocurre en 1, y el mínimo relativo $y(2) = 4$, que ocurre en 2, de manera que además de la intersección (0, 0) también se graficará (1, 5) y (2, 4).

Concavidad

$$y'' = 12x - 18 = 6(2x - 3)$$

Al hacer $y'' = 0$, resulta un punto de inflexión posible en $x = \frac{3}{2}$, a partir del cual se construye el diagrama de signos para y'' mostrado en la figura 9.41.

Como la concavidad cambia en $x = \frac{3}{2}$, en cuyo punto f es ciertamente continua, existe un punto de inflexión en $\frac{3}{2}$.

Análisis Se conocen las coordenadas de tres de los puntos importantes de la gráfica. Desde nuestra perspectiva, el otro único punto importante es el punto de inflexión y, como $y(3/2) = 2(3/2)^3 - 9(3/2)^2 + 12(3/2) = 9/2$, el punto de inflexión es $(3/2, 9/2)$.

Se grafican los cuatro puntos indicados anteriormente y se observa, a partir de los tres diagramas de signos en conjunto, que la curva crece a través del tercer cuadrante y pasa por (0, 0), siendo cóncava hacia abajo hasta que alcanza un máximo relativo en (1, 5). Después la curva cae hasta llegar a un mínimo relativo en (2, 4). Sin embargo, en ese transcurso la concavidad cambia en (3/2, 9/2) de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y permanece así por el resto de la curva. Después de (2, 4) la curva es creciente a través del primer cuadrante. La gráfica se presenta en la figura 9.42.

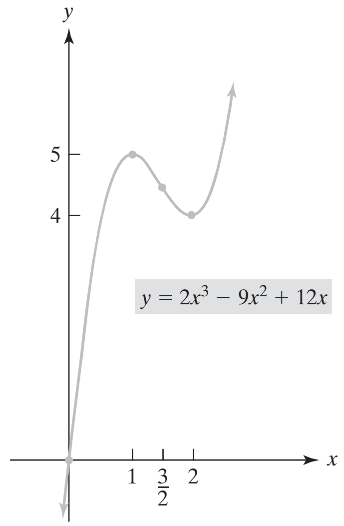


FIGURA 9.42 Gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Ahora resuelva el problema 39 ◁

TECNOLOGÍA

Suponga que usted desea encontrar los puntos de inflexión para

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{17}{16}x^4 + \frac{273}{32}x^3 - \frac{4225}{128}x^2 + \frac{750}{4}$$

La segunda derivada de f está dada por

$$f''(x) = x^3 - \frac{51}{4}x^2 + \frac{819}{16}x - \frac{4225}{64}$$

Aquí las raíces de $f'' = 0$ no son obvias. Por ello, se graficará f'' utilizando una calculadora gráfica. (Vea la figura 9.43). Se encuentra que las raíces de $f'' = 0$ son aproximadamente 3.25 y 6.25. Alrededor de $x = 6.25$, $f''(x)$ pasa de valores negativos a positivos. Así, en $x = 6.25$ se tiene un punto de inflexión. Alrededor de $x = 3.25$, $f''(x)$ no cambia de signo, por lo que no existe punto de inflexión en $x = 3.25$. Al comparar estos resultados con la gráfica de f mostrada en la figura 9.44, se ve que todo concuerda.

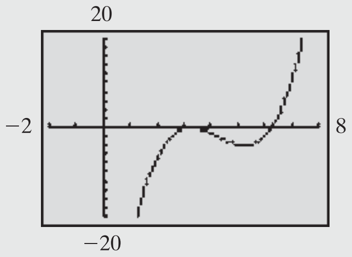


FIGURA 9.43 Gráfica de f''; las raíces de $f'' = 0$ son aproximadamente 3.25 y 6.25.

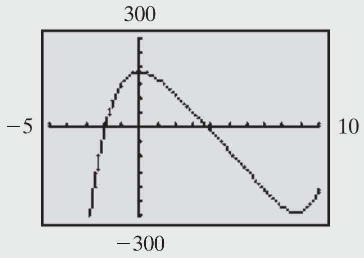


FIGURA 9.44 Gráfica de f; punto de inflexión en $x = 6.25$, pero no en $x = 3.25$.

PROBLEMAS 9.3

En los problemas del 1 al 6, se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de f y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión.

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 1; f''(x) = 6(2x+1)(x-2)$
2. $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - 2x^2; f''(x) = (x-1)(x+2)^2$
3. $f(x) = \frac{2+x-x^2}{x^2-2x+1}; f''(x) = \frac{2(7-x)}{(x-1)^4}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}; f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$
5. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}; f''(x) = \frac{6(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$
6. $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2}; f''(x) = \frac{x(2x^2-3a^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

En los problemas del 7 al 34, determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

7. $y = -2x^2 + 4x$
8. $y = -74x^2 + 19x - 37$
9. $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x$
10. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
11. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
12. $y = x^4 - 8x^2 - 6$
13. $y = 2x^4 - 48x^2 + 7x + 3$
14. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$
15. $y = 2x^{1/5}$
16. $y = \frac{a}{x^3}$
17. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$
18. $y = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$
19. $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$
20. $y = \frac{1}{10}x^5 - 3x^3 + 17x + 43$
21. $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{7}{12}x^4 + 6x^2 + 5x - 4$
22. $y = x^6 - 3x^4$
23. $y = \frac{x+1}{x-1}$
24. $y = 1 - \frac{1}{x^2}$
25. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
26. $y = \frac{ax^2}{x+b}$
27. $y = \frac{21x+40}{6(x+3)^2}$
28. $y = 3(x^2-2)^2$
29. $y = 5e^x$
30. $y = e^x - e^{-x}$
31. $y = axe^x$
32. $y = xe^{x^2}$
33. $y = \frac{\ln x}{2x}$
34. $y = \frac{x^2+1}{3e^x}$

En los problemas del 35 al 62, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría y las intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

35. $y = x^2 - x - 6$
36. $y = x^2 + a$ para $a > 0$
37. $y = 5x - 2x^2$
38. $y = x - x^2 + 2$
39. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$
40. $y = x^3 - 25x^2$
41. $y = \frac{x^3}{3} - 5x$
42. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
43. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
44. $y = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$
45. $y = 4x^3 - 3x^4$
46. $y = -x^3 + 8x^2 - 5x + 3$
47. $y = -2 + 12x - x^3$
48. $y = (3+2x)^3$
49. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$
50. $y = \frac{x^5}{100} - \frac{x^4}{20}$
51. $y = 16x - x^5$
52. $y = x^2(x-1)^2$
53. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$
54. $y = 3x^5 - 5x^3$
55. $y = 4x^2 - x^4$
56. $y = x^2e^x$
57. $y = x^{1/3}(x-8)$
58. $y = (x-1)^2(x+2)^2$
59. $y = 4x^{1/3} + x^{4/3}$
60. $y = (x+1)\sqrt{x+4}$
61. $y = 2x^{2/3} - x$
62. $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$
63. Bosqueje la gráfica de una función continua f tal que $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 2$ y $f''(x) > 0$ si $x > 2$.
64. Bosqueje la gráfica de una función continua f tal que $f(4) = 4$, $f'(4) = 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 4$ y $f''(x) > 0$ para $x > 4$.
65. Bosqueje la gráfica de un función continua f tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.
66. Bosqueje la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 1$, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para $x < 1$, y tanto $f(x) > 0$ como $f''(x) < 0$ para $x > 1$.
67. **Ecuación de demanda** Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda $p = \frac{100}{q+2}$ es decreciente y cóncava hacia arriba para $q > 0$.
68. **Costo promedio** Para la función de costo

$$c = q^2 + 2q + 1$$

demuestre que la gráfica de la función de costo promedio $\bar{c}$ siempre es cóncava hacia arriba para $q > 0$.

69. **Especies de plantas** El número de especies de plantas incluidas en un lote puede depender del tamaño del lote. Por ejemplo, en la figura 9.45, se ve que en lotes de 1 m^2 hay tres especies (A, B y C en el lote izquierdo; A, B y D en el lote derecho) y que en un lote de 2 m^2 hay cuatro especies (A, B, C y D).

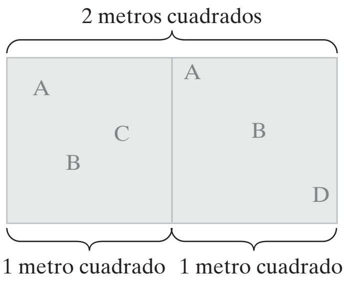


FIGURA 9.45

En un estudio acerca de las plantas con raíz de cierta región geográfica,[6] se determinó que el número promedio de especies, S, que se

---

[6] Adaptado de R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

presentan en lotes de tamaño A (en metros cuadrados) está dado por

$$S = f(A) = 12\sqrt[4]{A} \quad 0 \leq A \leq 625$$

Bosqueje la gráfica de f. (*Nota:* Su gráfica debe ser creciente y cóncava hacia abajo. Por ello, el número de especies es creciente con respecto al área, pero a una razón decreciente).

70. Artículo inferior En un análisis de un artículo inferior, Persky[7] considera una función de la forma

$$g(x) = e^{(U_0/A)}e^{-x^2/(2A)}$$

donde x es determinada cantidad del artículo, U_0 es una constante que representa la utilidad y A es una constante positiva. Persky afirma que la gráfica de g es cóncava hacia abajo para $x > \sqrt{A}$ y cóncava hacia arriba para $x > \sqrt{A}$. Verifique esto.

71. Psicología En un experimento psicológico que implicaba respuestas condicionadas,[8] varias personas escucharon cuatro tonos, denotados como 0, 1, 2 y 3. Inicialmente, las personas se condicionaron al tono 0 al recibir un choque eléctrico siempre que lo oían. Luego, cuando cada uno de los cuatro tonos (estímulos) se escucharon sin choques eléctricos, la respuesta del sujeto se registró por medio de un dispositivo rastreador que medía la reacción galvánica de la piel. Se determinó la respuesta media para cada estímulo (sin choque eléctrico) y los resultados se graficaron en un plano coordenado, donde los ejes x y y representan el estímulo (0, 1, 2 y 3) y la respuesta galvánica promedio, respectivamente. También se determinó que los puntos se ajustan a una curva dada aproximadamente por la gráfica de

$$y = 12.5 + 5.8(0.42)^x$$

Demuestre que esta función es decreciente y cóncava hacia arriba.

72. Entomología En un estudio sobre los efectos de la privación de alimento en condiciones de hambre,[9] un insecto fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Después fue privado de alimento durante t horas (periodo de privación). Al final de este periodo, el insecto de nuevo fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Se encontró estadísticamente que el peso H (en gramos) del alimento que se consumió en este tiempo era una función de t, donde

$$H = 1.00[1 - e^{-(0.0464t+0.0670)}]$$

Aquí H es una medida del hambre. Demuestre que H es creciente con respecto a t y cóncava hacia abajo.

73. Dispersión de insectos En un experimento sobre la dispersión de un insecto específico,[10] se coloca un gran número de insectos en un punto de liberación en un campo abierto. Alrededor de este punto hay trampas dispuestas según un arreglo circular concéntrico a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etc., del punto de liberación. Veinticuatro horas después de que se liberan, se cuenta el número de insectos contenidos en cada trampa. Se determinó que a una distancia de r metros del punto en que se ponen en libertad, el número promedio de insectos contenidos en una trampa es

$$n = f(r) = 0.1 \ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8 \quad 1 \leq r \leq 10$$

(a) Demuestre que la gráfica de f es siempre decreciente y cóncava hacia arriba. (b) Bosqueje la gráfica de f. (c) Cuando $r = 5$, ¿a qué razón está decreciendo el número promedio de insectos contenidos en una trampa con respecto a la distancia?

74. Grafique $y = -0.35x^3 - 4.1x^2 + 8.3x - 7.4$ y, con base en la gráfica, determine el número de (a) puntos máximos relativos, (b) puntos mínimos relativos y (c) puntos de inflexión.

75. Grafique $y = x^5(x - 2.3)$ y, con base en la gráfica, determine el número de puntos de inflexión. Ahora, pruebe que para cualquier $a \neq 0$, la curva $y = x^5(x - a)$ tiene dos puntos de inflexión.

76. Grafique $y = xe^{-x}$ y determine el número de puntos de inflexión, primero usando una calculadora gráfica y después por medio de las técnicas de este capítulo. Si una ecuación de demanda tiene la forma $q = q(p) = Qe^{-Rp}$ para las constantes Q y R, relacione la gráfica de la función de ingreso resultante con la de la función graficada anteriormente considerando a $Q = 1 = R$.

77. Grafique la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ y también la recta tangente a la curva en $x = 2$. Alrededor de $x = 2$, ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con base en su apreciación, determine la concavidad en $x = 2$.

78. Si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$. Observe que donde f' tiene un mínimo relativo, f cambia la dirección de su flexión (convexidad). ¿Por qué?

79. Si $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$, encuentre los valores x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

80. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, determine los valores x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

Objetivo

Localizar extremos relativos mediante aplicación de la prueba de la segunda derivada.

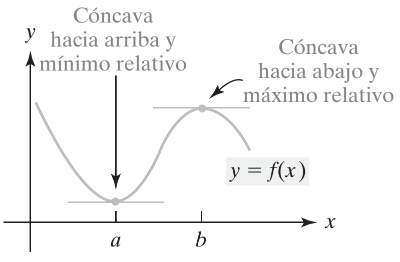


FIGURA 9.46 Relación de la concavidad con los extremos relativos.

9.4 Prueba de la segunda derivada

La segunda derivada puede usarse para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos. En la figura 9.46, observe que se tiene una tangente horizontal en a; esto es, $f'(a) = 0$. Además, alrededor de a la función es cóncava hacia arriba [esto es, $f''(a) > 0$]. Lo anterior lleva a concluir que habrá un mínimo relativo en a. Por otra parte, alrededor de b la función es cóncava hacia abajo [esto es, $f''(b) < 0$]. Como la recta tangente

---

[7] A. L. Persky, “An Inferior Good and a Novel Indifference Map”, *The American Economist* XXIX, núm. 1 (1985), pp. 67-69.

[8] Adaptado de C. I. Hovland, “The Generalization of Conditioned Responses: I. The Sensory Generalization of Conditioned Responses with Varying Frequencies of Tone”, *Journal of General Psychology*, 17 (1937), pp. 125-148.

[9] C. S. Holling, “The Functional Response of Invertebrate Predators to Prey Density”, *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 48 (1966).

[10] Adaptado de Poole, *op. cit*.

es horizontal en b, se concluye que ahí existe un máximo relativo. Esta técnica de examinar la segunda derivada en puntos donde la primera derivada es 0 se llama *prueba de la segunda derivada* para extremos relativos.

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que $f'(a) = 0$.

Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a.

Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.

Se debe enfatizar que la *prueba de la segunda derivada* no *es aplicable cuando* $f''(a) = 0$. Si tanto $f'(a) = 0$ como $f''(a) = 0$, entonces puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos en a. En esos casos debe usarse la prueba de la primera derivada para analizar qué está sucediendo en a. [Además, la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando $f'(a)$ no existe].

EJEMPLO 1 Prueba de la segunda derivada

Analice las siguientes funciones en relación con sus máximos y mínimos relativos. De ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada.

a. $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

Solución:

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

$$y'' = -4x \qquad \text{tomando } \frac{d}{dx} \text{ de } 18 - 2x^2$$

Al resolver $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = \pm 3$.

$$\text{Si } x = 3, \quad \text{entonces } y'' = -4(3) = -12 < 0.$$

Existe un máximo relativo cuando $x = 3$.

$$\text{Si } x = -3, \quad \text{entonces } y'' = -4(-3) = 12 > 0.$$

Existe un mínimo relativo cuando $x = -3$. (Consulte la figura 13.4).

b. $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución:

$$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1)$$

$$y'' = 72x^2 - 48x$$

Al resolver $y' = 0$, se obtienen los valores críticos $x = 0, 1$. Se observa que

$$\text{si } x = 0, \quad \text{entonces } y'' = 0$$

y

$$\text{si } x = 1, \quad \text{entonces } y'' > 0$$

De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene un mínimo relativo en $x = 1$. No se puede aplicar la prueba cuando $x = 0$ porque ahí $y'' = 0$. Para ver qué pasa en 0, es necesario realizar la prueba de la primera derivada:

$$\text{Si } x < 0, \quad \text{entonces } y' < 0.$$

$$\text{Si } 0 < x < 1, \quad \text{entonces } y' < 0.$$

Por lo tanto, no existe máximo ni mínimo en $x = 0$. (Consulte la figura 9.35).

Ahora resuelva el problema 5 ◁

¡ADVERTENCIA!

Aunque la prueba de la segunda derivada puede ser muy útil, se recomienda no depender por completo de ella. Esta prueba puede no ser aplicable y, además, en ocasiones podría resultar muy complicado encontrar la segunda derivada.

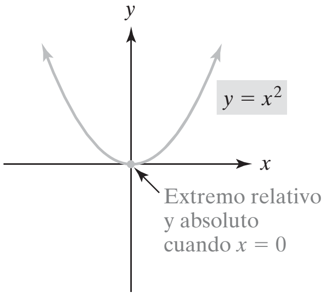


FIGURA 9.47 Exactamente un extremo relativo implica un extremo absoluto.

Si una función continua tiene *exactamente un* extremo relativo en un intervalo, puede demostrarse que el extremo relativo también debe ser un extremo *absoluto* en el intervalo. Para ilustrar esto, en la figura 9.47 la función $y = x^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 0$ y no hay otros extremos relativos. Como $y = x^2$ es continua, este mínimo relativo es también un mínimo absoluto para la función.

EJEMPLO 2 Extremos absolutos

Si $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, determine dónde ocurren los extremos absolutos en el intervalo $(0, \infty)$.

Solución: Se tiene

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x + 1)(x - 3)$$

El único valor crítico existente en el intervalo $(0, \infty)$ es 3. Al aplicar la prueba de la segunda derivada en este punto, se obtiene

$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

Así, existe un mínimo relativo en 3. Como este es el único extremo relativo en $(0, \infty)$ y f es continua ahí, se concluye a partir del análisis previo que, en realidad, hay un valor mínimo *absoluto* en 3; este valor es $f(3) = -22$. (Vea la figura 9.48).

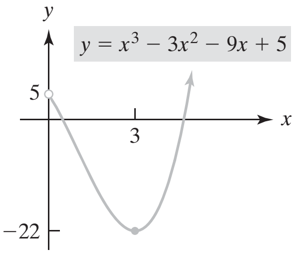


FIGURA 9.48 En $(0, \infty)$, existe un mínimo absoluto en 3.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

PROBLEMAS 9.4

En los problemas del 1 al 14, realice la prueba para máximos y mínimos. En caso de ser posible, use la prueba de la segunda derivada. En los problemas del 1 al 4 establezca si los extremos relativos son también extremos absolutos.

1. $y = x^2 - 5x + 6$
2. $y = 3x^2 + 12x + 14$
3. $y = -4x^2 + 2x - 8$
4. $y = 3x^2 - 5x + 6$
5. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$
6. $y = x^3 - 12x + 1$
7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 17$
8. $y = x^4 - 2x^2 + 4$
9. $y = 7 - 2x^4$
10. $y = -2x^7$
11. $y = 81x^5 - 5x$
12. $y = 15x^3 + x^2 - 15x + 2$
13. $y = (x^2 + 7x + 10)^2$
14. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

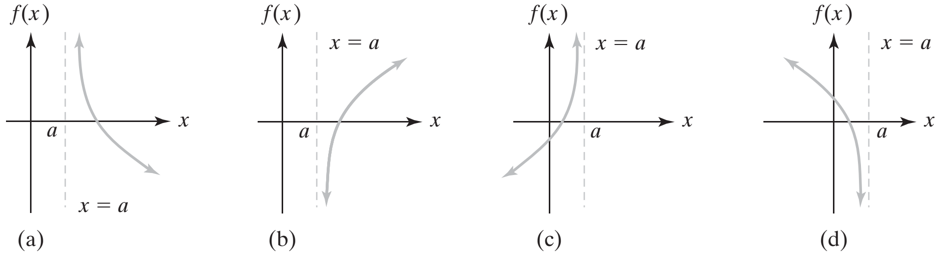
9.5 Asíntotas

Objetivo

Determinar asíntotas horizontales y verticales para una curva y bosquejar las gráficas de funciones que tienen asíntotas.

Asíntotas verticales

En esta sección, se concluye el análisis de los procedimientos utilizados para el trazado de curvas mediante la investigación de las funciones que tienen *asíntotas*. Una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más. (También existen asíntotas curvilíneas: una asíntota curvilínea es una curva a la que la gráfica de una función se acerca cada vez más). Por ejemplo, en cada inciso de la figura 9.49, la línea punteada $x = a$ es una asíntota.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 9.49 Asíntotas verticales $x = a$.

Para dar más precisión a esto, es necesario hacer uso de los límites infinitos. En la figura 9.49(a), observe que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve positivamente infinita:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

En la figura 9.49(b), cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve negativamente infinita:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

En las figuras 9.49(c) y (d), se tiene

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

respectivamente.

Hablando de manera informal, se puede decir que cada gráfica de la figura 9.49 tiene una “explosión” alrededor de la línea vertical punteada $x = a$, en el sentido de que el límite de $f(x)$ desde alguno de sus lados en a es ∞ o bien $-\infty$. La recta $x = a$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica. Una asíntota vertical no forma parte de la gráfica, pero es útil en el trazado de ésta porque parte de la gráfica se acerca a la asíntota. Debido a la explosión que ocurre alrededor de $x = a$, la función *no* es continua en a.

Definición

La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** para la gráfica de la función si y solo si se cumple al menos uno de los enunciados siguientes:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

o

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

¡ADVERTENCIA!

Para verificar que la condición acerca de los *términos mínimos* es necesaria, observe que

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{(3x-5)(x-2)}{(x-2)^2}$$

de manera que $x = 2$ es una asíntota vertical de $\frac{(3x-5)(x-2)}{(x-2)^2}$, y aquí 2 iguala a 0 *tanto* al denominador *como* al numerador.

Para determinar asíntotas verticales, se deben encontrar valores de x alrededor de los cuales $f(x)$ aumente o disminuya sin cota alguna. Para una función racional (cociente de dos polinomios) *expresada en los términos mínimos (mínima expresión)*, esos valores de x son precisamente aquéllos para los que el denominador se hace 0 pero el numerador no se hace 0. Por ejemplo, considere la función racional

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$$

Cuando x es 2, el denominador es 0, pero el numerador no. Si x es ligeramente mayor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta cercano a 0 y positivo y el valor de $3x - 5$ es cercano a 1. Así, $(3x - 5)/(x - 2)$ es muy grande, por lo que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x-5}{x-2} = \infty$$

Este límite es suficiente para concluir que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Como se tiene interés en el comportamiento de una función alrededor de una asíntota vertical, vale la pena examinar qué le pasa a esta función cuando x se acerca a 2 por la izquierda. Si x es ligeramente menor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta ser muy cercano a 0 pero negativo y el valor de $3x - 5$ es cercano a 1. Así, $(3x - 5)/(x - 2)$ es “muy negativo”, por lo que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x-5}{x-2} = -\infty$$

Se concluye que la función se incrementa sin límite cuando $x \to 2^+$ y decrece sin límite cuando $x \to 2^-$. La gráfica se muestra en la figura 9.50.

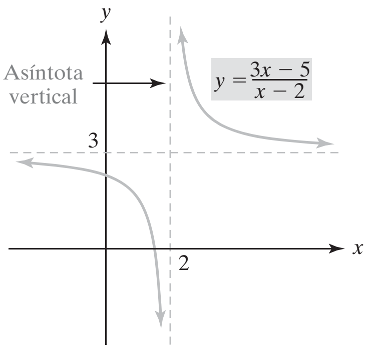


FIGURA 9.50 Gráfica de $y = \frac{3x-5}{x-2}$

En resumen, se tiene una regla para las asíntotas verticales.

Regla de las asíntotas verticales para funciones racionales

Suponga que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales y el cociente está en los términos mínimos. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si y solo si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$.

[Aquí podría pensarse que con "términos mínimos" se elimina la posibilidad de obtener un valor que haga *tanto* al denominador *como* al numerador iguales a 0, pero considere la función racional $\frac{(3x - 5)(x - 2)}{(x - 2)}$. En este caso no es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 2$, para obtener el polinomio $3x - 5$, porque el dominio de dicho polinomio no es igual al dominio de la ecuación original].

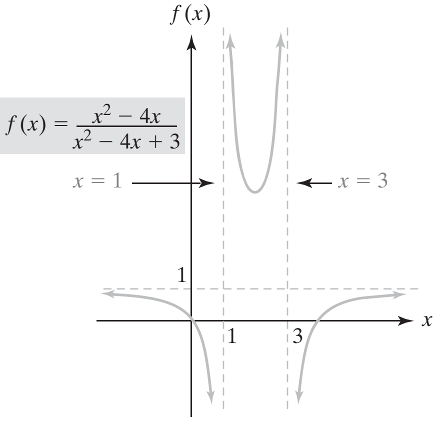


FIGURA 9.51 Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$.

Aunque la regla de la asíntota vertical garantiza que las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales, no indica la naturaleza precisa de la "explosión" ocurrida alrededor de estas rectas. Un análisis preciso requiere del uso de los límites laterales.

EJEMPLO 1 Determinación de asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$$

Solución: Como f es una función racional, aquí es aplicable la regla de las asíntotas verticales. Si se escribe

$$f(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 3)(x - 1)} \quad \text{factorizando}$$

resulta claro que el denominador es 0 cuando x es 3 o 1. Ninguno de esos valores hace que el numerador sea igual a 0. Así que las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. (Vea la figura 9.51).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Asíntotas horizontales y oblicuas

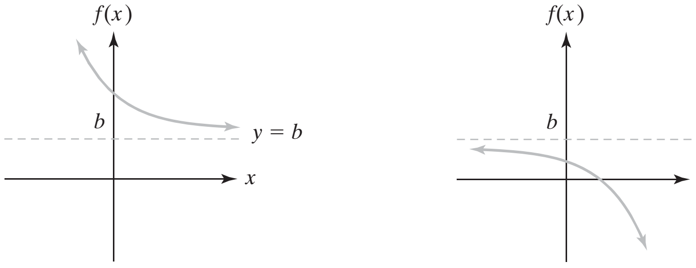
Una curva $y = f(x)$ puede tener otro tipo de asíntota. En la figura 9.52(a), conforme x se incrementa sin límite ($x \to \infty$), la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

En la figura 9.52(b), cuando x tiende a infinito negativamente, la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

En cada caso, la línea punteada $y = b$ se llama *asíntota horizontal* de la gráfica. Ésta es una recta horizontal hacia la cual "tiende" la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.



(a) (b)

FIGURA 9.52 Asíntotas horizontales $y = b$.

En resumen, se tiene la definición siguiente:

Definición

Sea f una función no lineal. La recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de f si y solo si, por lo menos, uno de los siguientes enunciados es cierto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

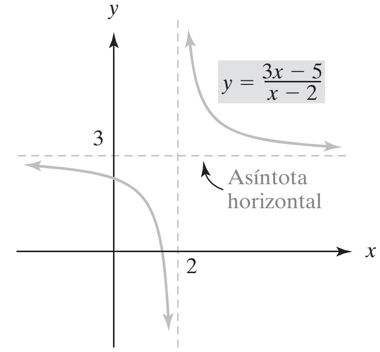


FIGURA 9.53 Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$.

Para determinar las asíntotas horizontales, primero se deben encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. A manera de ilustración, de nuevo se considera

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$$

Como ésta es una función racional, pueden usarse los procedimientos de la sección 6.2 para encontrar los límites. Como el término dominante del numerador es $3x$ y el término dominante en el denominador es x, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to\infty} 3 = 3$$

Así, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal. (Vea la figura 13.53). Además,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3$$

Por lo tanto, la gráfica tiende a la recta horizontal $y = 3$ cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas horizontales

Encuentre las asíntotas horizontales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$$

Solución: Se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Por lo tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. El mismo resultado se obtiene cuando $x \to -\infty$. (Consulte la figura 9.51).

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Las asíntotas horizontales que surgen de límites como $\lim_{t\to\infty} f(t) = b$, donde t significa *tiempo*, pueden ser importantes en aplicaciones de negocios como expresiones del comportamiento a largo plazo.

Si se reescribe $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ cuando $\lim_{x\to\infty} (f(x) - b) = 0$, entonces es posible sugerir otra posibilidad. Podría ser que el comportamiento a largo plazo de f, aunque no fuera constante, sea lineal. Esto conduce a lo siguiente:

Definición

Sea f una función no lineal. La recta $y = mx + b$ es una ***asíntota oblicua*** para la gráfica de f si y solo si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0$$

Por supuesto, si $m = 0$, entonces solo se ha repetido la definición de asíntota horizontal. Pero si $m \neq 0$, entonces $y = mx + b$ es la ecuación de una recta no horizontal (y no vertical) con pendiente m que en ocasiones se describe como *oblicua*. Por lo tanto, decir que $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0$ es igual a decir que para valores más grandes de x, la gráfica se asienta cerca de la línea $y = mx + b$, llamada con frecuencia *asíntota oblicua* para la gráfica.

Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado de P es uno más que el grado de Q, entonces la división larga permite escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = (mx+b) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $m \neq 0$ y donde $R(x)$ es el polinomio

0 o bien el grado de R es estrictamente menor que el grado de Q. En este caso, $y = mx + b$ será una asíntota oblicua para la gráfica de f. Esto se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Localización de una asíntota oblicua

Encuentre la asíntota oblicua para la gráfica de la función racional

$$y = f(x) = \frac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2}$$

Solución: Como el grado del numerador es 2, uno más grande que el grado del denominador, se usa la división larga para expresar

$$f(x) = \frac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2} = 2x + 1 + \frac{3}{5x + 2}$$

Así,

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (2x + 1)) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{5x + 2} = 0$$

lo cual muestra que $y = 2x + 1$ es una asíntota oblicua, de hecho es la única asíntota no vertical, como se explica líneas abajo. Por otra parte, resulta claro que $x = -\frac{2}{5}$ es una asíntota vertical —y la única—. (Vea la figura 9.54).

Ahora resuelva el problema 35 ◁

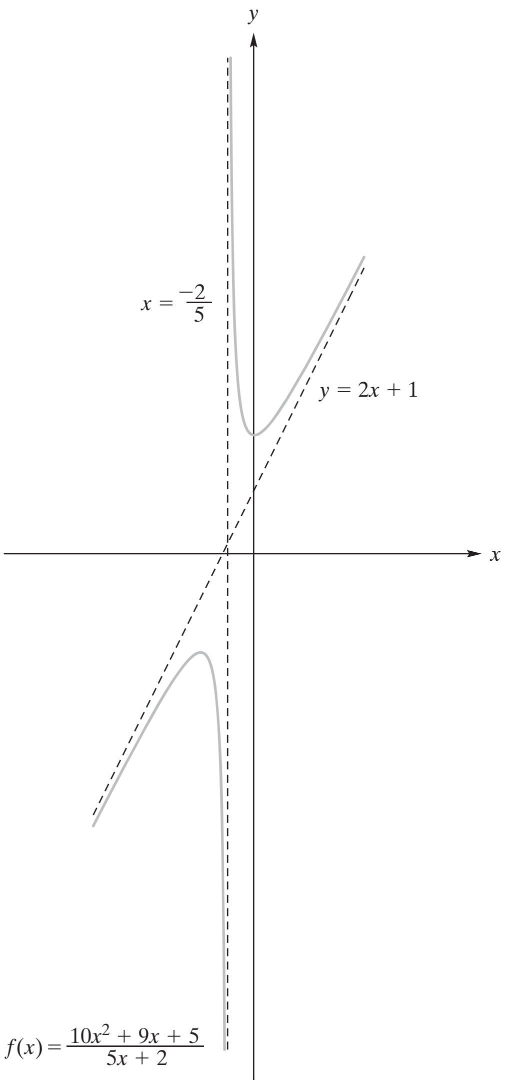


FIGURA 9.54 La gráfica de $f(x) = \dfrac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2}$ tiene una asíntota oblicua.

Ahora es apropiado hacer algunos comentarios sobre las asíntotas. Con las asíntotas verticales se examina el comportamiento de una gráfica alrededor de valores específicos de x. Sin embargo, con las asíntotas no verticales se analiza la gráfica cuando x aumenta sin límite. Aunque una gráfica puede tener numerosas asíntotas verticales, puede tener a lo más dos asíntotas no verticales diferentes —posiblemente una para $x \to \infty$ y una para $x \to -\infty$—. Si, por ejemplo, la gráfica tiene dos asíntotas horizontales, entonces no puede tener asíntotas oblicuas.

En la sección 6.2 se vio que cuando el numerador de una función racional tiene un grado mayor que el denominador, no existe un límite cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. De esta observación se concluye que *siempre que el grado del numerador de una función racional sea mayor que el grado del denominador, la gráfica de la función no puede tener una asíntota horizontal*. De manera similar, puede mostrarse que si el grado del numerador de una función racional es mayor que el grado del denominador, la función no puede tener una asíntota oblicua.

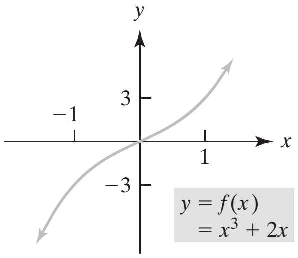


FIGURA 9.55 La gráfica de $y = x^3 + 2x$ no tiene asíntotas horizontales ni verticales.

EJEMPLO 4 Determinación de asíntotas verticales y horizontales

Encuentre las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función polinomial

$$y = f(x) = x^3 + 2x$$

Solución: Se comienza con las asíntotas verticales. Ésta es una función racional con denominador igual a 1, que nunca es igual a 0. Por la regla de las asíntotas verticales, no se tienen asíntotas verticales. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (0), no se tienen asíntotas horizontales. Sin embargo, se examinará el comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se tiene

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Entonces, cuando $x \to \infty$, la gráfica se debe extender indefinidamente hacia arriba, y cuando $x \to -\infty$, se debe extender indefinidamente hacia abajo. (Vea la figura 9.55).

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Los resultados del ejemplo 3 pueden generalizarse para cualquier función polinomial:

> Una función polinomial de grado mayor que 1 no tiene asíntotas.

EJEMPLO 5 Determinación de asíntotas horizontales y verticales

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales para la gráfica de $y = e^x - 1$.

Solución: Para investigar las asíntotas horizontales, se hace que $x \to \infty$. Entonces e^x crece sin límite, por lo que

$$\lim_{x \to \infty} (e^x - 1) = \infty$$

Así, la gráfica no tiende a valor alguno cuando $x \to \infty$. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$, se tiene que $e^x \to 0$, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 1) = \lim_{x \to -\infty} e^x - \lim_{x \to -\infty} 1 = 0 - 1 = -1$$

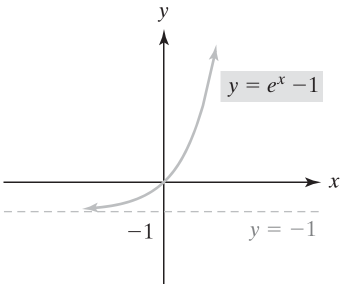


FIGURA 9.56 La gráfica de $y = e^x - 1$ tiene una asíntota horizontal.

Por lo tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas verticales porque $e^x - 1$ ni se incrementa ni disminuye sin límite alrededor de algún valor fijo de x. (Vea la figura 9.56).

Ahora resuelva el problema 23 ◁

Trazado de curvas

En esta sección se muestra cómo graficar una función empleando todas las herramientas que se han desarrollado para el trazado de curvas.

EJEMPLO 6 Trazado de una curva

Bosqueje la gráfica de $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$. Si $y = 0$, entonces $0 = 1/(4 - x^2)$, que no tiene solución. Así $(0, \frac{1}{4})$ es la única intersección. Sin embargo, la factorización

$$y = \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{(2 + x)(2 - x)}$$

permite construir el siguiente diagrama de signos para y, figura 9.57, mostrando dónde es que la gráfica está por debajo del eje x (−) y dónde está por arriba del eje x (+).

	$-\infty$	-2	2	∞
$\dfrac{1}{2+x}$	−	+	+	
$\dfrac{1}{2-x}$	+	+	−	
y	−	+	−	

FIGURA 9.57 Diagrama de signos para $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Simetría Existe simetría con respecto al eje y:

$$y(-x) = \frac{1}{4 - (-x)^2} = \frac{1}{4 - x^2} = y(x)$$

Como y es una función de x (y no la función constante 0), no puede haber simetría alrededor del eje x y, por ende, no hay simetría con respecto al origen. Como x no es una función de y (y y es una función de x), tampoco puede existir simetría con respecto a $y = x$.

Asíntotas En la factorización de y anterior, se observa que $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. Al probar por asíntotas horizontales, se tiene

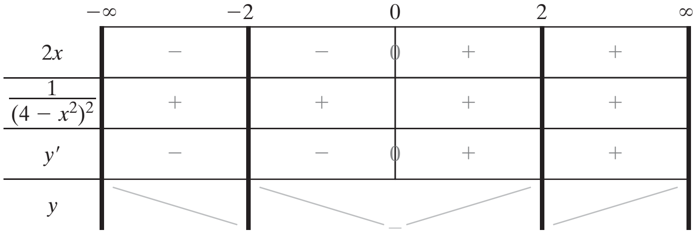
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{-x^2} = -\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es la única asíntota no vertical.

Máximos y mínimos Como $y = (4 — x^2)^{-1}$,

$$y' = -1(4 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$$

Se observa que y' es 0 cuando $x = 0$ y que y' no está definida cuando $x = \pm 2$. Sin embargo, solo 0 es un valor crítico, dado que y no está definida en ± 2. A continuación se presenta el diagrama de signos para y'. (Vea la figura 9.58).



	$-\infty$	-2	0		2	∞
$2x$	−	−	0	+	+	
$\dfrac{1}{(4 - x^2)^2}$	+	+		+	+	
y'	−	−	0	+	+	
y	↘	↘	—	↗	↗	

FIGURA 9.58 Diagrama de signos para $y' = \dfrac{2x}{(4 - x^2)^2}$.

El diagrama de signos muestra claramente que la función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$ y $(2, \infty)$, además existe un mínimo relativo en $x = 0$.

Concavidad

$$y'' = \frac{(4 - x^2)^2(2) - (2x)2(4 - x^2)(-2x)}{(4 - x^2)^4}$$

$$= \frac{2(4 - x^2)[(4 - x^2) - (2x)(-2x)]}{(4 - x^2)^4} = \frac{2(4 + 3x^2)}{(4 - x^2)^3}$$

Al hacer $y'' = 0$, no se obtienen raíces reales. Sin embargo, y'' no está definida cuando $x = \pm 2$. Aunque la concavidad puede cambiar alrededor de esos valores de x, éstos no corresponden a puntos de inflexión porque no están en el dominio de la función. Hay tres intervalos donde se debe probar la concavidad. (Vea la figura 9.59).

El diagrama de signos muestra que la gráfica es cóncava hacia arriba en $(-2, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$.

	$-\infty \quad -2$	$-2 \quad 2$	$2 \quad \infty$
$4 + 3x^2$	+	+	+
$\frac{1}{(4 - x^2)^3}$	−	+	−
y''	−	+	−
y	∩	∪	∩

FIGURA 9.59 Análisis de concavidad.

x	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$

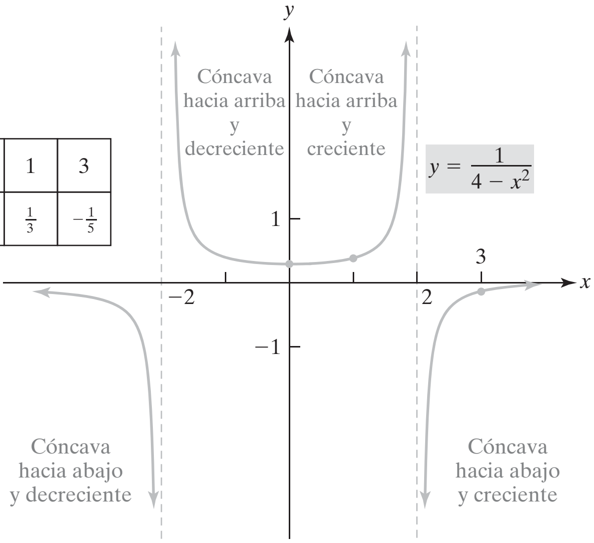


FIGURA 9.60 Gráfica de $y = \frac{1}{4 - x^2}$.

Análisis Solo un punto sobre la curva, $(0, 1/4)$, ha surgido como un punto especial que debe graficarse (porque es una intersección y al mismo tiempo un mínimo local). Se podría desear graficar unos cuantos puntos más de la tabla en la figura 9.60, pero note que cualquiera de esos puntos extra solo son valiosos si están en el mismo lado del eje y (debido a la simetría). Tomando en cuenta toda la información recopilada, se obtiene la gráfica de la figura 9.60.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

EJEMPLO 7 Trazado de una curva

Trace la gráfica de $y = \frac{4x}{x^2 \quad 1}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0$, $y = 0$; cuando $y = 0$, $x = 0$. Así, $(0, 0)$ es la única intersección. Como el denominador de y es siempre positivo, se observa que el signo de y es el de x. Aquí se evita la construcción de un diagrama de signos para y. A partir de las observaciones realizadas hasta ahora, se deduce que la gráfica va del tercer cuadrante (x negativa y y negativa) hacia $(0, 0)$ y hasta el cuadrante positivo (x positiva y y positiva).

Simetría Existe simetría con respecto al origen:

$$y(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -y(x)$$

No existe ninguna otra simetría.

Asíntotas El denominador de esta función racional nunca es 0, de manera que no hay asíntotas verticales. Al investigar las asíntotas horizontales, se tiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal y la única asíntota no vertical.

Máximos y mínimos Se tiene

$$y' = \frac{(x^2+1)(4) - 4x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

Los valores críticos son $x = \pm 1$, por lo que hay tres intervalos a considerar en el diagrama de signos. (Vea la figura 9.61).

Se observa que y es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, creciente en $(-1, 1)$, con un mínimo relativo en -1 y un máximo relativo en 1. El mínimo relativo es $(-1, y(-1)) = (-1, -2)$; el máximo relativo es $(1, y(1)) = (1, 2)$.

	$-\infty$		-1		1		∞
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$		$+$		$+$		$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

FIGURA 9.61 Diagrama de signos para y'.

Concavidad Como $y' = \dfrac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{(x^2+1)^2(-8x) - (4-4x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

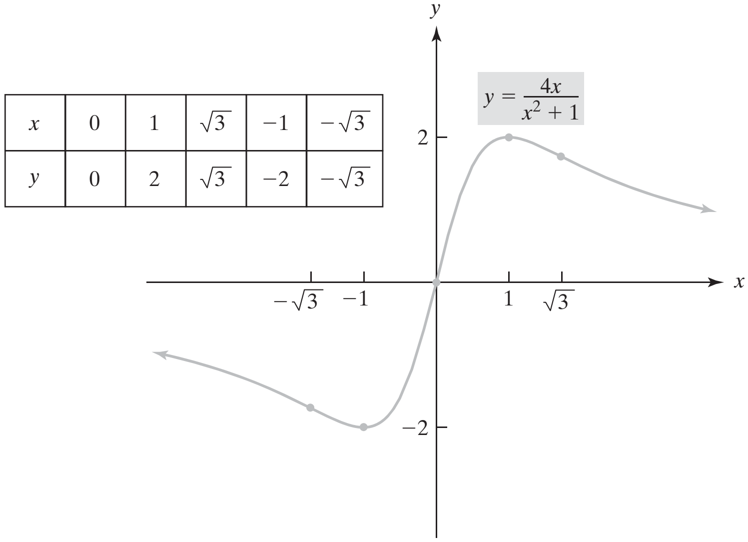
Al hacer $y'' = 0$, se concluye que los puntos de inflexión posibles se presentan cuando $x = \pm\sqrt{3}, 0$. Hay cuatro intervalos a considerar en el diagrama de signos. (Vea la figura 9.62).

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		∞
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{(x^2+1)^3}$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

FIGURA 9.62 Análisis de concavidad para $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Los puntos de inflexión ocurren en $x = 0$ y $\pm\sqrt{3}$. Los puntos de inflexión son

$$(-\sqrt{3}, y(\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (0, y(0)) = (0, 0) \quad (\sqrt{3}, y(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$$



x	0	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
y	0	2	$\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

FIGURA 9.63 Gráfica de $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Análisis Después de considerar toda la información obtenida, se llega a la gráfica de $y = 4x/(x^2+1)$ que se muestra en la figura 9.63 junto con una tabla de puntos importantes.

Ahora resuelva el problema 39 ◁

PROBLEMAS 9.5

En los problemas del 1 al 24, encuentre las asíntotas verticales y no verticales para las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.

1. $y = \dfrac{x}{x-1}$

2. $y = \dfrac{x+1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{x+5}{2x+7}$

4. $y = \dfrac{2x+1}{2x+1}$

5. $y = \dfrac{4}{x}$

6. $y = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

7. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

8. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

9. $y = x^2 - 5x + 5$

10. $y = \dfrac{x^4}{x^3-4}$

11. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x-6}$

12. $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$

13. $y = \dfrac{15x^2+31x+1}{x^2-7}$

14. $y = \dfrac{2x^3+1}{3x(2x-1)(4x-3)}$

15. $y = \dfrac{2}{x-3} + 5$

16. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2-9x+4}$

17. $f(x) = \dfrac{3-x^4}{x^3+x^2}$

18. $y = \dfrac{5x^2+7x^3+9x^4}{3x^2}$

19. $y = \dfrac{x^2-3x-4}{1+4x+4x^2}$

20. $y = \dfrac{x^4+1}{1-x^4}$

21. $y = \dfrac{9x^2-16}{2(3x+4)^2}$

22. $y = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2x}{12x^2+5x-2}$

23. $y = 5e^{x-3} - 2$

24. $f(x) = 12e^{-x}$

En los problemas del 25 al 46, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; los máximos y mínimos relativos; los puntos de inflexión; la simetría; las asíntotas verticales y no verticales y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después trace la gráfica de la curva.

25. $y = \dfrac{3}{x}$

26. $y = \dfrac{2}{2x-3}$

27. $y = \dfrac{x}{x-1}$

28. $y = \dfrac{50}{\sqrt{3x}}$

29. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

30. $y = \dfrac{3x^2-5x-1}{x-2}$

31. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

32. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

33. $y = \dfrac{2+x}{3-x}$

34. $y = \dfrac{1+x}{x^2}$

35. $y = \dfrac{x^2}{7x+4}$

36. $y = \dfrac{x^3+1}{x}$

37. $y = \dfrac{9}{9x^2-6x-8}$

38. $y = \dfrac{4x^2+2x+1}{2x^2}$

39. $y = \dfrac{3x+1}{(3x-2)^2}$

40. $y = \dfrac{3x+1}{(6x+5)^2}$

41. $y = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

42. $y = \dfrac{3x}{(x-2)^2}$

43. $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

44. $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

45. $y = \dfrac{-3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1}$

46. $y = 3x + 2 + \dfrac{1}{3x+2}$

47. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$ tenga una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$, una asíntota vertical $x = 2$, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para $x > 2$.

48. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = -4$ y $f(4) = -2$ tenga una asíntota horizontal $y = -3$ para $x \to \pm\infty$, una asíntota vertical $x = 2$, tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$ para $x > 2$.

49. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$ tenga una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, asíntotas verticales $x =$ —1 y $x = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < -1$ y para $-1 < x < 2$, además de $f''(x) < 0$ para $x > 2$.

50. Trace la gráfica de una función f tal que $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ tenga una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$, asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$, $f''(x) > 0$ para $x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 1$ y $f''(x) < 0$ para $1 < x$.

51. Poder de compra Al analizar el patrón temporal de compras, Mantell y Sing[11] utilizan la curva

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

como un modelo matemático. Encuentre las asíntotas para su modelo.

52. Trace las gráficas de $y = 6 - 3e^{-x}$ y $y = 6 + 3e^{-x}$. Demuestre que son asintóticas a la misma recta. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?

53. Mercado para un producto Para un producto nuevo, el número anual de miles de paquetes vendidos y, después de t años contados a partir de su introducción al mercado, se estima que está dado por

$$y = f(t) = 250 - 83e^{-t}$$

Demuestre que $y = 250$ es una asíntota horizontal para la gráfica de esta ecuación. Lo cual revela que una vez que el producto se ha establecido entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

54. Grafique $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

55. Grafique $y = \dfrac{6x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{3x^3 - 2x^2 - 18x + 12}$. A partir de la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

56. Grafique $y = \dfrac{\ln(x + 4)}{x^2 - 8x + 5}$ en la pantalla estándar. La gráfica sugiere que hay dos asíntotas verticales de la forma $x = k$, donde $k > 0$. También, parece que la gráfica "comienza" cerca de $x = -4$. Cuando $x \to -4^+$, $\ln(x + 4) \to -\infty$ y $x^2 - 8x + 5 \to 53$. Así, $\lim_{x\to 4+} y =$ —∞. Esto proporciona la asíntota vertical $x = -4$. De modo que, en realidad, existen *tres* asíntotas verticales. Utilice la característica de acercamiento para hacer clara la asíntota $x = -4$ en la pantalla.

57. Grafique $y = \dfrac{0.34e^{0.7x}}{4.2 + 0.71e^{0.7x}}$, donde $x > 0$. A partir de la gráfica, determine una ecuación de la asíntota horizontal examinando los valores de y cuando $x \to \infty$. Para confirmar esta ecuación de manera algebraica, encuentre el $\lim_{x\to\infty} y$ dividiendo primero tanto el numerador como el denominador entre $e^{0.7x}$.

Objetivo

Modelar situaciones que involucran la maximización o minimización de cantidades.

9.6 Aplicaciones de máximos y mínimos

Mediante el uso de los procedimientos vistos en este capítulo, es posible resolver problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, se podría desear la maximización de una ganancia o la minimización de un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego se diferencia y se prueban los valores críticos resultantes. Para esto, pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivadas, aunque a partir de la naturaleza del problema puede ser obvio si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como el interés estriba en los máximos y mínimos *absolutos*, a veces será necesario examinar los puntos extremos del dominio de la función. (Con mucha frecuencia, la función usada para modelar la situación de un problema será la restricción a un intervalo cerrado de una función que tiene un dominio natural más grande. Tales limitaciones del *mundo real* tienden a generar puntos extremos).

El objetivo de este ejemplo es establecer una función de costo a partir de la cual se pueda minimizar el costo.

EJEMPLO 1 Minimización del costo de una cerca

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 10 800 pies^2 adyacente a un edificio que se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio da a una carretera y costará \$3 (dólares estadounidenses) por pie instalado, mientras que la cerca de los otros dos lados costará \$2 por pie instalado. Encuentre la cantidad de cada tipo de cerca de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?

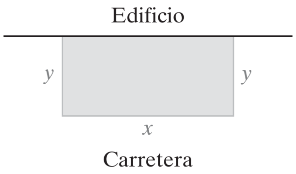


FIGURA 9.64 Problema de la cerca del ejemplo 1.

Solución: Como primer paso en un problema de este tipo, es una buena idea dibujar un diagrama que refleje la situación. En la figura 9.64, se llama x a la longitud del lado paralelo al edificio y y a las longitudes de los otros dos lados, donde x y y están en pies.

Como se desea minimizar el costo, el siguiente paso es determinar una función que proporcione el costo. Es obvio que el costo depende de cuánta cerca se ponga a lo largo de la carretera y cuánta a lo largo de los otros dos lados. A lo largo de la carretera, el costo por

---

[11] L. H. Mantell y F. P. Sing, *Economics for Business Decisions* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972), p. 107.

pie es de \$3, por lo que el costo total de esa cerca es $3x$. De manera similar, a lo largo de *cada uno* de los otros dos lados, el costo es $2y$. Así, el costo total C de la cerca está dado por la función de costo

$$C = 3x + 2y + 2y$$

es decir,

$$C = 3x + 4y \tag{1}$$

Es necesario encontrar el valor mínimo absoluto de C. Para hacerlo, se usan las técnicas analizadas en este capítulo; es decir, se examina a C en sus valores críticos (y en cualesquiera puntos extremos) incluidos en el dominio. Sin embargo, para diferenciar, primero se necesita expresar C en función de solo una variable. [La ecuación (1) proporciona a C como una función de *dos* variables, x y y]. Esto se puede lograr encontrando primero una relación entre x y y. En el enunciado del problema, se observa que el área de almacenamiento, que es xy, debe ser igual a 10 800:

$$xy = 10\,800 \tag{2}$$

Con esta ecuación, se puede expresar una variable (por ejemplo y) en términos de la otra (x). Entonces, al sustituir en la ecuación (1) se tendrá a C como función de solo una variable. Al despejar y de la ecuación (2) se obtiene

$$y = \frac{10\,800}{x} \tag{3}$$

Al sustituir en la ecuación (1), resulta

$$C = C(x) = 3x + 4\left(\frac{10\,800}{x}\right)$$

$$C(x) = 3x + \frac{43\,200}{x} \tag{4}$$

Dada la naturaleza física del problema, el dominio de C es $x > 0$.

Ahora se encuentra dC/dx, se iguala a 0 y se despeja x. Se tiene

$$\frac{dC}{dx} = 3 - \frac{43\,200}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}(43\,200x^{-1}) = -43\,200x^{-2}$$

$$3 - \frac{43\,200}{x^2} = 0$$

$$3 = \frac{43\,200}{x^2}$$

de lo cual se deduce que

$$x^2 = \frac{43\,200}{3} = 14\,400$$

$$x = 120 \qquad \text{puesto que } x > 0$$

Así, 120 es el *único* valor crítico y no hay puntos extremos que considerar. Para probar este valor, se usará la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{86\,400}{x^3}$$

Cuando $x = 120$, $d^2C/dx^2 > 0$, entonces puede concluirse que $x = 120$ da un mínimo relativo. Sin embargo, como 120 es el único valor crítico incluido en el intervalo abierto $(0, \infty)$ y C es continua en ese intervalo, dicho mínimo relativo también debe ser un mínimo absoluto.

Pero el ejercicio aún no está terminado. Todas las preguntas del problema deben contestarse. Para tener un costo mínimo, el número de pies de cerca a lo largo de la carretera es de 120. Cuando $x = 120$, a partir de la ecuación (3) se tiene $y = 10\,800/120 = 90$. Por lo tanto, el número de pies de cerca necesarios para los otros dos lados es $2y = 180$. Entonces, se requieren 120 pies de cerca de \$3 y 180 pies de la cerca de \$2. El costo mínimo puede obtenerse a partir de la función de costo dada por la ecuación (4) y es

$$C(120) = 3x + \frac{43\,200}{x}\bigg|_{x=120} = 3(120) + \frac{43\,200}{120} = 720$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Con base en el ejemplo 1, la siguiente guía puede ser útil en la resolución de problemas prácticos sobre máximos y mínimos:

Guía para la resolución de problemas de aplicación de máximos y mínimos

Paso 1. Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que refleje la información dada en el problema.

Paso 2. Formule una expresión para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.

Paso 3. Escriba la expresión del paso 2 como una función de una sola variable y señale el dominio de esa función. El dominio puede estar implícito en la naturaleza del problema.

Paso 4. Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cuál proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, asegúrese de examinar también los valores de la función en esos puntos.

Paso 5. Con base en los resultados del paso 4, responda las preguntas que se formularon en el enunciado del problema.

EJEMPLO 2 Maximización del ingreso

Este ejemplo implica la maximización del ingreso cuando se conoce una ecuación de demanda.

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4} \qquad 0 \leq q \leq 80$$

donde q es el número de unidades y p el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución: Sea r el ingreso total, que es la cantidad a maximizar. Como

$$\text{ingreso} = (\text{precio})(\text{cantidad})$$

se tiene

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} \cdot q = \frac{80q - q^2}{4} = r(q)$$

donde $0 \leq q \leq 80$. Al hacer $dr/dq = 0$, resulta

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80 - 2q}{4} = 0$$

$$80 - 2q = 0$$

$$q = 40$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora se verá si este valor da un máximo. Examinando la primera derivada para $0 \leq q < 40$, se tiene $dr/dq > 0$, por lo que r es creciente. Si $q > 40$, entonces $dr/dq < 0$, por lo que r es decreciente. Dado que que r es creciente a la izquierda de 40 y r es decreciente a la derecha de 40, se concluye que $q = 40$ da el ingreso máximo *absoluto*, a saber

$$r(40) = (80)(40) - (40)^2)/4 = 400$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 3 Minimización del costo promedio

Este ejemplo implica la minimización del costo promedio cuando se conoce la función de costo.

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = c(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

donde c es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad? ¿Cuál es este mínimo?

Solución: La cantidad a minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \bar{c}(q) = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q} \qquad (5)$$

Aquí q debe ser positiva. Para minimizar $\bar{c}$, se diferencia:

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}$$

Para obtener los valores críticos, se resuelve $d\bar{c}/dq = 0$:

$$q^2 - 1600 = 0$$

$$(q - 40)(q + 40) = 0$$

$$q = 40 \quad \text{puesto que } q > 0$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo, se usará la prueba de la segunda derivada. Se tiene

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3}$$

que es positiva para $q = 40$. Así, $\bar{c}$ tiene un mínimo relativo cuando $q = 40$. Se observa que $\bar{c}$ es continua para $q > 0$. Como $q = 40$ es el único extremo relativo, se concluye que este mínimo relativo es en efecto un mínimo absoluto. Al sustituir $q = 40$ en la ecuación (5) se obtiene el costo promedio mínimo $\bar{c}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23$.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 4 Maximización aplicada a enzimas

Este ejemplo es una aplicación biológica que implica la maximización de la rapidez a la que se forma una enzima. La ecuación involucrada es una ecuación literal.

Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción química que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima se convierte en otra enzima llamada el producto. Este actúa como catalizador para su propia formación. La velocidad R a la que el producto se forma (con respecto al tiempo) está dada por

$$R = kp(l - p)$$

donde l es la cantidad inicial total de ambas enzimas, p la cantidad de la enzima producto y k una constante positiva. ¿Para qué valor de p se tendrá una R máxima?

Solución: Se puede escribir $R = k(pl — p^2)$. Al hacer $dR/dp = 0$ y despejar p se obtiene

$$\frac{dR}{dp} = k(l - 2p) = 0$$

$$p = \frac{l}{2}$$

Ahora, $d^2R/dp^2 = -2k$. Como $k > 0$, la segunda derivada es siempre negativa. De modo que $p = 1/2$ da un máximo relativo. Además, como R es una función continua de p, se concluye que hay un máximo absoluto en $p = l/2$.

◁

El cálculo puede aplicarse a decisiones relativas a inventarios, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Tamaño económico del lote

Este ejemplo implica la determinación del número de unidades en una corrida de producción para minimizar ciertos costos.

Una empresa produce y vende anualmente 10 000 unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos por mantener inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. Este número se denomina **tamaño económico del lote o cantidad económica del pedido**. El costo de producir cada unidad es de \$20 y los costos por mantener inventarios (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 10% del valor promedio del inventario. Los costos de operación por periodo de producción son de \$40. Encuentre el tamaño económico del lote.

Solución: Sea q el número de unidades en una corrida de producción. Como las ventas están distribuidas a razón uniforme, se supondrá que el inventario varía uniformemente de q a 0 entre periodos de producción. Así, se toma el inventario promedio igual a $q/2$ unidades. Los costos de producción son de \$20 por unidad, por lo que el valor promedio del inventario es de $20(q/2)$. Los costos por mantener inventarios son el 10% de este valor:

$$0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right)$$

El número de corridas de producción por año es de $10\,000/q$. Entonces, los costos totales de operación son

$$40\left(\frac{10\,000}{q}\right)$$

Por lo tanto, el total de los costos de inventario y operación está dado por

$$\begin{aligned} C &= 0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10\,000}{q}\right) \\ &= q + \frac{400\,000}{q} \qquad\qquad q > 0 \\ \frac{dC}{dq} &= 1 - \frac{400\,000}{q^2} = \frac{q^2 - 400\,000}{q^2} \end{aligned}$$

Al hacer $dC/dq = 0$, se obtiene

$$q^2 = 400\,000$$

Como $q > 0$,

$$q = \sqrt{400\,000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5$$

Para determinar si este valor de q minimiza a C, se examinará la primera derivada. Si $0 < q < \sqrt{400\,000}$, entonces $dC/dq < 0$. Si $q > \sqrt{400\,000}$, entonces $dC/dq > 0$. Se concluye que hay un mínimo *absoluto* en $q = 632.5$. El número de periodos de producción es de $10\,000/632.5 \approx 15.8$. Para propósitos prácticos, serían 16 lotes, cada uno con tamaño económico del lote igual a 625 unidades.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

EJEMPLO 6 Maximización del ingreso de una empresa de televisión por cable

La intención de este ejemplo es establecer una función de ingreso a partir de la cual se maximice el ingreso sobre un intervalo cerrado.

La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100 000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?

Solución: Sea x el número de disminuciones de \$0.25. La cuota mensual es entonces de $40 - 0.25x$, donde $0 \leq x \leq 160$ (la cuota no puede ser negativa) y el número de suscriptores nuevos es $1000x$. Por lo tanto, el número total de suscriptores es $100\,000 + 1000x$. Se desea maximizar el ingreso, que está dado por

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor}) \\ &= (100\,000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2) \end{aligned}$$

Haciendo $r' = 0$ y despejando x, resulta

$$\begin{aligned} r' = 1000(15 - 0.5x) &= 0 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Como el dominio de r es el intervalo cerrado [0, 160], el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en $x = 30$ o en uno de los puntos extremos del intervalo. Ahora se calculará r en esos tres puntos:

$$r(0) = 1000(4000 + 15(0) - 0.25(0)^2) = 4\,000\,000$$

$$r(30) = 1000(4000 + 15(30) - 0.25(30)^2) = 4\,225\,000$$

$$r(160) = 1000(4000 + 15(160) - 0.25(160)^2) = 0$$

De acuerdo con esto, el ingreso máximo ocurre cuando $x = 30$. Lo anterior corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.50; esto es, la cuota mensual es de \$40 − \$7.50 = \$32.50. El número de suscriptores con esa cuota es 100 000 + 30(1000) = 130 000.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 7 Maximización del número de beneficiarios de servicios de salud

Aquí se maximiza una función sobre un intervalo cerrado.

Un artículo publicado en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, al cabo de t años, n miles de personas ancianas recibirían beneficios directos, donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \quad 0 \le t \le 12$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Solución: Al hacer $dn/dt = 0$, se tiene

$$\frac{dn}{dt} = t^2 - 12t + 32 = 0$$
$$(t - 4)(t - 8) = 0$$
$$t = 4 \quad \text{o} \quad t = 8$$

Como el dominio de n es el intervalo cerrado [0, 12], el valor máximo absoluto de n debe ocurrir en $t = 0, 4, 8$ o 12:

$$n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32(0) = 0$$
$$n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32(4) = \frac{160}{3}$$
$$n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32(8) = \frac{128}{3}$$
$$n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32(12) = \frac{288}{3} = 96$$

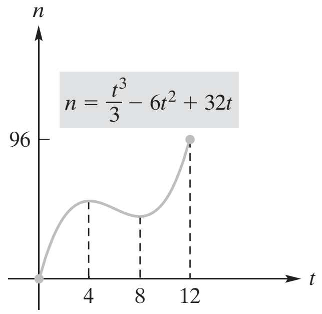


FIGURA 9.65 Gráfica de $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ en [0, 12].

Así, se tiene un máximo absoluto en $t = 12$. En la figura 9.65 se muestra una gráfica de la función.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

¡ADVERTENCIA!

El ejemplo anterior ilustra que no deben ignorarse los puntos extremos cuando se determinan extremos absolutos en un intervalo cerrado.

En el ejemplo siguiente se usa la palabra *monopolista*. En una situación de monopolio, solo hay un vendedor de un producto para el cual no existen sustitutos similares y el vendedor —es decir el monopolista— controla el mercado. Considerando la ecuación de demanda para el producto, el monopolista puede fijar el precio (o el volumen de producción) de manera que se obtenga una utilidad máxima.

EJEMPLO 8 Maximización de la utilidad

Este ejemplo implica la maximización de la utilidad cuando se conocen las funciones de demanda y de costo promedio. En la última parte, se impone un impuesto al monopolio y se analiza una nueva función de utilidad.

Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $\bar{c} = 0.2q + 4 + (400/q)$, donde q es el número de unidades y tanto p como $\bar{c}$ se expresan en dólares por unidad.

a. Determine el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.
b. Determine el precio que garantiza la utilidad máxima.
c. Determine la utilidad máxima.
d. Si, como una medida reguladora, el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

Solución: Se sabe que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Como el ingreso total r y el costo total c están dados por

$$r = pq = 400q - 2q^2$$

y

$$c = q\bar{c} = 0.2q^2 + 4q + 400$$

la utilidad es

$$P = r - c = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400)$$

de manera que

$$P(q) = 396q - 2.2q^2 - 400 \quad \text{para } q > 0$$

a. Para maximizar la utilidad, se hace $dP/dq = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dq} &= 396 - 4.4q = 0\\ q &= 90\end{aligned}$$

Ahora, $d^2P/dq^2 = -4.4$ siempre es negativa, por lo que es negativa en el valor crítico $q = 90$. De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo relativo. Como $q = 90$ es el único valor crítico en $(0, \infty)$, se debe tener ahí un máximo absoluto.

b. El precio que garantiza la utilidad máxima se obtiene haciendo $q = 90$ en la ecuación de demanda:

$$p = 400 - 2(90) = 220$$

c. La utilidad máxima se obtiene evaluando $P(90)$. Se tiene

$$P(90) = 396(90) - 2.2(90)^2 - 400 = 17\,420$$

d. El impuesto de \$22 por unidad implica que para q unidades el costo total aumenta en $22q$. La nueva función de costo es $c_1 = 02q^2 + 4q + 400 + 22q$ y la nueva utilidad está dada por

$$\begin{aligned}P_1 &= 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400 + 22q)\\ &= 374q - 2.2q^2 - 400\end{aligned}$$

Al hacer $dP_1/dq = 0$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dq} &= 374 - 4.4q = 0\\ q &= 85\end{aligned}$$

Como $d^2P_1/dq^2 = -4.4 < 0$, se concluye que, para maximizar la utilidad, el monopolista debe restringir la producción a 85 unidades a un precio mayor de $p_1 = 400 - 2(85) =$ \$230. Como este precio es solo \$10 mayor que antes, parte del impuesto se ha cargado al consumidor y el monopolista debe pagar la diferencia. La utilidad es ahora de \$15 495, lo cual es menor que la ganancia anterior.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

Este análisis conduce al principio económico de que cuando la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Esta sección concluye usando el cálculo para desarrollar un principio muy importante en economía. Suponga que $p = f(q)$ es la función de demanda para el producto de una empresa, donde p es el precio por unidad y q el número de unidades producidas y vendidas. Entonces, el ingreso total está dado por $r = qp = qf(q)$, que es una función de q. Sea $c = g(q)$ la función de costo total para producir q unidades. Así, la utilidad total, que es igual a ingreso total − costo total, es también una función de q, a saber,

$$P(q) = r - c = qf(q) - g(q)$$

Considere la producción más favorable para la empresa. Si no se toman en cuenta los casos especiales, se sabe que la utilidad es máxima cuando $dP/dq = 0$ y $d^2P/dq^2 < 0$. Se tiene,

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}(r - c) = \frac{dr}{dq} - \frac{dc}{dq}$$

En consecuencia, $dP/dq = 0$ cuando

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}$$

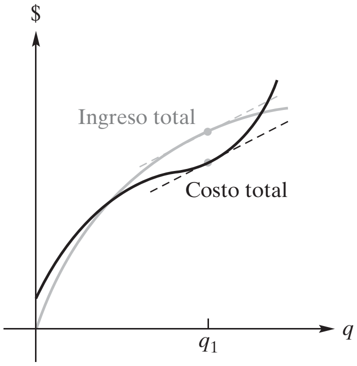


FIGURA 9.66 En la utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Esto es, al nivel de la utilidad máxima, la pendiente de la tangente a la curva de ingreso total debe ser igual a la pendiente de la tangente a la curva de costo total (figura 9.66). Pero dr/dq es el ingreso marginal IM y dc/dq es el costo marginal CM. Así, bajo condiciones comunes, para maximizar la utilidad es necesario que

$$\text{IM} = \text{CM}$$

Para que esto corresponda realmente a un máximo, es necesario que $d^2P/dq^2 < 0$:

$$\frac{d^2P}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}(r - c) = \frac{d^2r}{dq^2} - \frac{d^2c}{dq^2} < 0 \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \frac{d^2r}{dq^2} < \frac{d^2c}{dq^2}$$

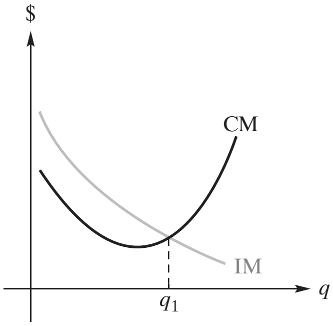


FIGURA 9.67 En la utilidad máxima, la curva de costo marginal corta a la curva de ingreso marginal desde abajo.

Esto es, para tener una utilidad máxima cuando IM = CM, la pendiente de la curva del ingreso marginal deber ser menor que la pendiente de la curva del costo marginal.

La condición de que $d^2P/dq^2 < 0$ cuando $dP/dq = 0$ puede verse de otra manera. En forma equivalente, para que IM = CM corresponda a un máximo, dP/dq debe pasar de + a —; esto es, debe ir de $dr/dq - dc/dq > 0$ a $dr/dq - dc/dq < 0$. Por lo tanto, cuando la producción aumenta, se debe tener IM > CM y luego IM < CM. Esto significa que en el punto q_1 de utilidad máxima, *la curva de costo marginal debe cortar a la curva de ingreso marginal desde abajo* (figura 9.67). Para una producción de hasta q_1, el ingreso proveniente de la producción adicional sería mayor que el costo de tal producción y la utilidad total aumentaría. Para una producción mayor a q_1, CM > IM y cada unidad de producción agregaría un tanto más a los costos totales que al ingreso total. Por lo tanto, las utilidades totales se reducirían.

PROBLEMAS 9.6

En esta serie de problemas, a menos que se especifique otra cosa, p es el precio por unidad y q el nivel de producción. Los costos fijos se refieren a costos que permanecen constantes bajo todo nivel de producción en un periodo dado (un ejemplo es la renta).

1. Encuentre dos números cuya suma sea 82 y cuyo producto sea el más grande posible.

2. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y para los cuales el producto de dos veces uno de los números por el cuadrado del otro sea un máximo.

3. Cercado Una empresa dispone de $9000 para cercar una porción rectangular del terreno adyacente a un río y al río lo usará como un lado del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de $15 por pie instalado y el costo para los dos lados restantes es de $9 por pie instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada.

4. Cercado El propietario del Vivero Laurel quiere cercar un terreno que tiene forma rectangular y área de 1400 pies^2 con el fin de usarlo para plantar diferentes tipos de arbustos. El terreno será dividido en seis lotes iguales con cinco cercas paralelas al mismo par de lados, como se muestra en la figura 9.68. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca necesarios?

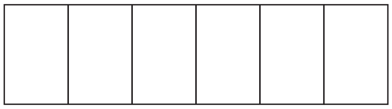


FIGURA 9.68

5. Costo promedio Un fabricante determina que el costo total, c, de producir un artículo está dado por la función de costo

$$c = 0.05q^2 + 5q + 500$$

¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

6. Gastos de un automóvil El costo por hora de operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08 \qquad 0 \le s \le 60$$

donde s es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es mínimo el costo por hora?

7. Ingreso La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = -5q + 30$$

¿A qué precio se maximizará el ingreso?

8. Ingreso Suponga que la función de demanda para el producto de un monopolista es

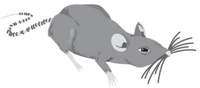
$$q = Ae^{-Bp}$$

para constantes positivas A y B. En términos de A y B, encuentre el valor de p para el cual se obtiene el ingreso máximo. ¿Puede explicar por qué su respuesta no depende de A?

9. Ganancia de peso Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales producidos en ratas a las que se les administró una dieta que contenía 10% de proteína.[12] La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en cierto periodo fue de

$$f(p) = 170 - p - \frac{1600}{p+15} \qquad 0 \le p \le 100$$

Encuentre (a) el aumento máximo de peso y (b) el aumento mínimo de peso.



10. Dosis de un medicamento La severidad de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial D de un medicamento está dada por[13]

$$R = f(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

donde la constante C denota la cantidad máxima de medicamento que puede administrarse. Demuestre que R tiene una *razón de cambio* máxima cuando $D = C/2$.

11. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = 85 - 0.05q$$

y la función de costo es

$$c = 600 + 35q$$

¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?

12. Utilidad Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de \$3 y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

¿Qué precio dará la utilidad máxima?

13. Utilidad Para el producto de un monopolista, la ecuación de demanda es

$$p = 42 - 4q$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}$$

Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

14. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{50}{\sqrt{q}}$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{1}{4} + \frac{2500}{q}$$

Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

15. Utilidad Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200$$

y la función de costo promedio del fabricante es

$$\bar{c} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10\,000}{q}$$

Determine la producción q que maximiza la utilidad y la utilidad máxima correspondiente.

16. Costo Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo unitario promedio está dado por

$$\bar{c} = 2q^2 - 42q + 228 + \frac{210}{q}$$

donde $3 \le q \le 12$.

(a) ¿A qué nivel dentro del intervalo [3, 12] debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?

(b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo [7, 12], ¿qué valor de q minimizaría el costo total?

17. Utilidad Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los costos combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{100}{\sqrt{q}}$$

¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

18. Ingreso Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede rentarse en \$400 por mes. Sin embargo, por cada \$10 mensuales de incremento habrá dos departamentos vacíos sin posibilidad de ser rentados. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

---

[12] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum, eds. (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

[13] R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum, eds., *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

19. Ingreso Una empresa de televisión por cable tiene 6400 suscriptores que pagan cada uno \$24 mensuales y puede conseguir 160 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la cuota mensual. ¿Cuál será la cuota que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

20. Utilidad Un fabricante de cierto producto encuentra que para las primeras 600 unidades que produce y vende la utilidad es de \$40 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 600 disminuye en \$0.05 por cada unidad adicional. Por ejemplo, la utilidad total cuando produce y vende 602 unidades es $600(40) + 2(39.90)$. ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad?

21. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes está diseñando una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada que debe tener un volumen de 32 pies^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se requiere utilizar la menor cantidad de material?

22. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa y de base cuadrada va a construirse con 192 pies^2 de material. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen máximo?

23. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de L pulgadas de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo? (Vea la figura 9.69).

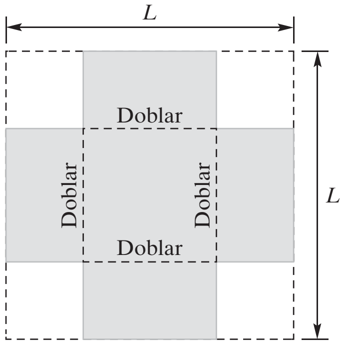


FIGURA 9.69

24. Diseño de un cartel Un cartel rectangular de cartón debe tener 720 pulg^2 para el material impreso, márgenes de 5 pulgadas a cada lado y de 4 pulgadas arriba y abajo. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima. (Vea la figura 9.70).

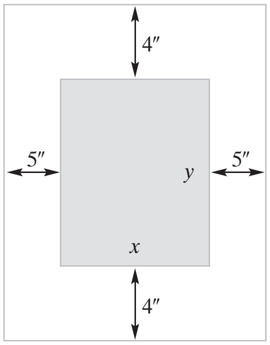
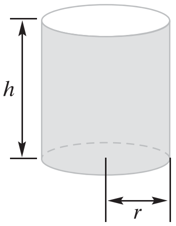


FIGURA 9.70

25. Diseño de un recipiente Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen fijo K. Demuestre que al usar la cantidad mínima de material el radio y la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$. (Vea la figura 9.71).

Volumen $= \pi r^2 h$
Área superficial $= 2\pi rh + \pi r^2$



Abierta en la parte superior

FIGURA 9.71

26. Diseño de un recipiente Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material, K. Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a $\sqrt{K/(3\pi)}$. (Vea la figura 9.71).

27. Utilidad La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 600 - 2q$$

y la función de costo total es

$$c = 0.2q^2 + 28q + 200$$

Encuentre la producción y el precio que maximizan la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían entonces la producción y el precio que maximizan la utilidad? ¿Cuál sería entonces la utilidad?

28. Utilidad Utilice los datos *originales* del problema 27 y suponga que el gobierno impone una cuota por licencia de \$1000 al fabricante. Ésta es una cantidad global independiente de la producción. Demuestre que el precio y la producción que maximizan la utilidad permanecen iguales. Sin embargo, demuestre que se tendrá una utilidad menor.

29. Tamaño económico del lote Un fabricante debe producir anualmente 3000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de \$12 y los costos por mantener inventarios (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 19.2% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de \$54. Encuentre el tamaño económico del lote.

30. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de costo es

$$c = 0.004q^3 + 20q + 5000$$

y la función de demanda es

$$p = 450 - 4q$$

Encuentre la producción que maximiza la utilidad.

31. Asistencia a un taller La empresa Imperial Educational Services (IES) está considerando ofrecer un taller sobre asignación de recursos a directivos de la Compañía Acme. Para que el ofrecimiento sea económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de \$50 cada una. Además, IES acepta reducir la cuota *a todos* en \$1.25 por cada persona adicional a las primeras 30. ¿Cuántas personas deben inscribirse para que el ingreso de IES sea máximo? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

32. Costo de alquilar un motor La compañía Kiddie Toy planea alquilar un motor eléctrico del cual utilizará 80 000 caballos de fuerza-hora por año en su proceso de manufactura. Un caballo de fuerza-hora es el trabajo hecho en 1 hora por un motor de un caballo de fuerza. El costo anual de alquilar el motor es de \$200 más \$0.40 por caballo de fuerza. El costo por caballo de fuerza-hora de operar el motor es de \$0.008/N, donde N es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor, en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?

33. Costo de transporte El costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es

$$0.165 + \frac{s}{200}$$

por milla, donde s es la velocidad (estable) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de \$18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

34. Costo Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de \$30 por mano de obra y de \$10 por material; los gastos indirectos son de \$20 000 por semana. Si se fabrican más de 5000 artículos por semana, la mano de obra se eleva a \$45 por artículo para las unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por artículo?

35. Utilidad La señora Jones tiene una agencia de seguros pequeña que vende pólizas para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora Jones, que no vende por sí misma las pólizas, recibe una comisión de \$50 de la compañía de seguros. De experiencias pasadas, la señora Jones ha determinado que cuando emplea m vendedores puede vender

$$q = m^3 - 15m^2 + 92m$$

pólizas por semana. Ella paga a cada uno de los vendedores un salario semanal de \$1000 y sus gastos fijos por semana son de \$3000. Su oficina actual solo puede tener cabida para ocho vendedores. Determine el número de vendedores que la señora Jones debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?

36. Utilidad Una compañía manufacturera vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de demanda para esos sacos es

$$p = 400 - 50q$$

donde p es el precio de venta (por saco) y q la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal de la compañía está dada por

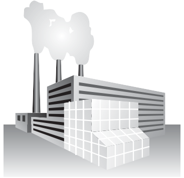
$$\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q+5}$$

demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

37. Producción química Una empresa fabrica diariamente x toneladas del producto químico A ($x \leq 4$) y

$$y = \frac{24 - 6x}{5 - x}$$

toneladas del producto químico B. La utilidad con A es de \$2000 por tonelada y con B es de \$1000 por tonelada. ¿Cuántas toneladas de A deben producirse al día para maximizar la utilidad? Responda la misma pregunta si la utilidad con A es de P por tonelada y con B es de $P/2$ por tonelada.



38. Tasa de rendimiento Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de \$1.44 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etc. Si se construyen x pisos, el costo (excluyendo los costos fijos) es

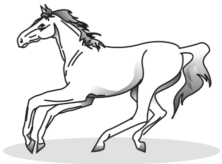
$$c = 10x[120\,000 + 3000(x - 1)]$$

El ingreso por mes es de \$60 000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (Tasa de rendimiento = ingreso total/costo total).

39. Marcha y potencia desarrollada por un animal En un modelo planteado por Smith,[14] la potencia desarrollada por un animal a una velocidad dada en función de su movimiento o *marcha*, j, resulta ser

$$P(j) = Aj\frac{L^4}{V} + B\frac{V^3L^2}{1+j}$$

donde A y B son constantes, j es una medida de "inconstancia" de la marcha, L es una constante que representa una dimensión lineal y V una velocidad constante hacia adelante.



Suponga que P es mínima cuando $dP/dj = 0$. Demuestre que cuando esto ocurre,

$$(1 + j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}$$

Como un comentario al margen, Smith señala que "a velocidad máxima, j es 0 para un elefante, 0.3 para un caballo y 1 para un galgo de carreras, aproximadamente".

40. Flujo de vehículos En un modelo de flujo de vehículos sobre un carril de una autopista, el número de automóviles que pueden circular por el carril por unidad de tiempo está dado mediante[15]

$$N = \frac{-2a}{-2at_r + v - \dfrac{2al}{v}}$$

donde a es la aceleración de un automóvil al detenerse ($a < 0$), t_r es el tiempo de reacción para comenzar a frenar, v es la velocidad promedio de los automóviles y l es la longitud de un automóvil. Suponga que a, t_r y l son constantes. Para encontrar el mayor número de automóviles que pueden circular por un carril, es necesario calcular la velocidad v que maximiza a N. Para maximizar N, es suficiente con minimizar el denominador

$$-2at_r + v - \frac{2al}{v}$$

---

[14] J. M. Smith, *Mathematical Ideas in Biology* (Londres: Cambridge University Press, 1968).

[15] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1975).

(a) Encuentre el valor de v que minimiza al denominador.
(b) Evalúe su respuesta en (a) cuando $a = -19.6$ (pies/s^2), $l =$ 20 (pies) y $t_r = 0.5$ (s). Dé su respuesta en pies por segundo.
(c) Encuentre el valor correspondiente de N con un decimal. Su respuesta estará en automóviles por segundo; conviértala a automóviles por hora.
(d) Encuentre el cambio relativo N que resulta cuando l se reduce de 20 pies a 15 pies para el valor de v que maximiza.

41. Costo promedio Durante la temporada navideña, una empresa promocional compra calcetines baratos de fieltro rojo, les pega imitación de piel blanca y lentejuelas y los empaca para su distribución. El costo total de producir q cajas de estos calcetines está dado por

$$c = 3q^2 + 50q - 18q \ln q + 120$$

Encuentre el número de cajas que deben prepararse para minimizar el costo promedio por caja. Determine (con dos decimales) este costo promedio mínimo.

42. Utilidad La ecuación de demanda de un monopolista está dada por

$$p = q^2 - 20q + 160$$

donde p es el precio de venta (en miles) por tonelada cuando se venden q toneladas del producto. Suponga que el costo fijo es de \$50 000 y que producir cada tonelada cuesta \$30 000. Si la maquinaria actual tiene una capacidad máxima de producción de 12 toneladas, use la gráfica de la función de utilidad para determinar a qué nivel de producción se tiene la utilidad máxima. Encuentre la utilidad máxima correspondiente y el precio de venta por tonelada.

Repaso del capítulo 9

Términos y símbolos importantes

Sección 9.1	**Extremos relativos** función creciente función decreciente máximo relativo mínimo relativo extremos relativos extremos absolutos valor crítico punto crítico prueba de la primera derivada
Sección 9.2	**Extremos absolutos en un intervalo cerrado** teorema del valor extremo
Sección 9.3	**Concavidad** cóncava hacia arriba cóncava hacia abajo punto de inflexión
Sección 9.4	**Prueba de la segunda derivada** prueba de la segunda derivada
Sección 9.5	**Asíntotas** asíntota vertical asíntota horizontal asíntota oblicua
Sección 9.6	**Aplicaciones de máximos y mínimos** tamaño económico del lote

Resumen

El cálculo es de gran ayuda para bosquejar la gráfica de una función. La primera derivada se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y para localizar los máximos y mínimos relativos. Si $f'(x)$ es positiva en todo un intervalo, entonces en ese intervalo f es creciente y su gráfica asciende (de izquierda a derecha). Si $f'(x)$ es negativa en todo un intervalo, entonces f es decreciente y su gráfica desciende.

Un punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica en el que $f'(x)$ es 0 o no está definida es un candidato a representar un extremo relativo y a se llama valor crítico. Para que se presente en a un extremo relativo, la primera derivada debe cambiar de signo alrededor de a. El procedimiento siguiente es la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para extremos relativos

Paso 1. Encuentre $f'(x)$.

Paso 2. Determine todos los valores de a en que $f'(a) = 0$ o $f'(a)$ no está definida.

Paso 3. En los intervalos definidos por los valores del paso 2, determine si f es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente ($f'(x) < 0$).

Paso 4. Para cada valor crítico a en que f es continua, determine si $f'(x)$ cambia de signo al aumentar x y pasar por a. Se tiene un máximo relativo en a si $f'(x)$ cambia de + a — y un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de — a +. Si $f'(x)$ no cambia de signo, entonces no se tiene un extremo relativo en a.

Bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que una función tiene extremos absolutos. El teorema del valor extremo establece que si f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Para localizar los extremos absolutos, puede emplearse el siguiente procedimiento:

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$

Paso 1. Encuentre los valores críticos de f.

Paso 2. Evalúe $f(x)$ en los puntos extremos a y b y en los valores críticos que se encuentran en (a, b).

Paso 3. El valor máximo de f es el más grande de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

La segunda derivada se usa para determinar la concavidad y los puntos de inflexión. Si $f'(x) > 0$ en todo un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se flexiona hacia arriba. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo y su gráfica se flexiona hacia abajo. El punto de una gráfica donde f es continua y su concavidad cambia es un punto de inflexión. El punto $(a, f(a))$ de una gráfica es un posible punto de inflexión si $f''(a)$ es 0 o no está definida y f es continua en a.

La segunda derivada proporciona también un medio para probar si ciertos valores críticos son extremos relativos:

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que $f'(a) = 0$. Entonces

Si $f''(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Si $f''(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

Las asíntotas también son útiles para el trazado de curvas. Las gráficas "explotan" cerca de las asíntotas verticales y "se asientan" cerca de las asíntotas horizontales y las asíntotas oblicuas. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si $\lim f(x) = \infty$ o $-\infty$ cuando x tiende a a por la derecha ($x \to a^+$) o por la izquierda ($x \to a^-$). En el caso de una función racional, $f(x) = P(x)/Q(x)$ en términos mínimos, es posible encontrar las asíntotas verticales sin evaluar los límites. Si $Q(a) = 0$ pero $P(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de una función no lineal f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua para la gráfica de una función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-(mx+b)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)-(mx+b)) = 0$$

En particular, una función polinomial de grado mayor que 1 no tiene asíntotas. Además, una función racional cuyo numerador tiene un grado mayor que el del denominador no tiene una asíntota horizontal y una función racional cuyo numerador tenga un grado mayor por más de uno que el del denominador no tiene una asíntota oblicua.

Aplicaciones de máximos y mínimos

Desde un punto de vista práctico, la fuerza del cálculo reside en que permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, en el área de la economía se puede maximizar la utilidad o minimizar el costo. Algunas relaciones importantes que se usan en problemas económicos son las siguientes:

$$\bar{c} = \frac{c}{q} \qquad \text{costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$$

$$r = pq \qquad \text{ingreso} = \text{(precio)(cantidad)}$$

$$P = r - c \qquad \text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 4, encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

1. $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 16}$

2. $y = \dfrac{x + 3}{9x - 3x^2}$

3. $y = \dfrac{5x^2 - 3}{(3x + 2)^2}$

4. $y = \dfrac{4x + 1}{3x - 5} - \dfrac{3x + 1}{2x - 11}$

En los problemas del 5 al 8, encuentre los valores críticos.

5. $f(x) = \dfrac{3x^2}{9 - x^2}$

6. $f(x) = 8(x - 1)^2(x + 6)^4$

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{3 - 4x}$

8. $f(x) = \dfrac{13xe^{-5x/6}}{6x + 5}$

En los problemas del 9 al 12, encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

9. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 15x^2 + 35x + 10$

10. $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x + 2)^2}$

11. $f(x) = \dfrac{6x^4}{x^2 - 3}$

12. $f(x) = 4\sqrt[3]{5x^3 - 7x}$

En los problemas del 13 al 18, encuentre los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = x^4 - x^3 - 14$

14. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3x + 2}$

16. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

17. $f(x) = (2x + 1)^3(3x + 2)$

18. $f(x) = (x^2 - x - 1)^2$

En los problemas del 19 al 24, pruebe para los extremos relativos.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$

20. $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2}$ para $a > 0$ y $b > 0$

21. $f(x) = \dfrac{x^{10}}{10} + \dfrac{x^5}{5}$

22. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

23. $f(x) = x^{2/3}(x + 1)$

24. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

En los problemas del 25 al 30, encuentre los valores de x en los que se presentan puntos de inflexión.

25. $y = 3x^5 + 20x^4 - 30x^3 - 540x^2 + 2x + 3$

26. $y = \dfrac{x^2 + 2}{5x}$

27. $y = 4(3x - 5)(x^4 + 2)$

28. $y = x^2 + 2\ln(-x)$

29. $y = \dfrac{x^3}{e^x}$

30. $y = (x^2 - 5)^3$

En los problemas del 31 al 34, efectúe la prueba para los extremos absolutos en el intervalo indicado.

31. $f(x) = 3x^4 - 4x^3, [0, 2]$

32. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, [0, 3]$

33. $f(x) = \dfrac{x}{(5x - 6)^2}, [-2, 0]$

34. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^{2/3}, [2, 3]$

35. Sea $f(x) = x \ln x$.
(a) Determine los valores de x en los que se presentan los máximos y mínimos relativos, en caso de que existan.
(b) Determine el o los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión, si es que existen.

36. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
(a) Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.
(b) Encuentre el o los intervalos donde f es creciente.
(c) Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de f.
(d) Determine $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(e) Bosqueje la gráfica de f.
(f) Establezca los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ (en caso de que existan).

En los problemas del 37 al 48 indique los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo; indique los puntos máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, las asíntotas verticales, la simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Después bosqueje la gráfica.

37. $y = x^2 - 2x - 24$

38. $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x$

39. $y = x^3 - 12x + 20$

40. $y = e^{1/x}$

41. $y = x^3 - x$

42. $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

43. $f(x) = \dfrac{100(x + 5)}{x^2}$

44. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

45. $y = \dfrac{x}{(x - 1)^3}$

46. $y = 6x^{1/3}(2x - 1)$

47. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

48. $f(x) = 1 - \ln(x^3)$

49. ¿Son ciertos o falsos los siguientes enunciados?
(a) Si $f'(x_0) = 0$, entonces f debe tener un extremo relativo en x_0.
(b) Como la función $f(x) = 1/x$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, es imposible encontrar x_1 y x_2 en el dominio de f de manera que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$.
(c) En el intervalo $(-1, 1]$, la función $f(x) = x^4$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.
(d) Si $f''(x_0) = 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ debe ser un punto de inflexión.
(e) Una función f definida en el intervalo $(-2, 2)$ con exactamente un máximo relativo debe tener un máximo absoluto.

50. Una función importante en la teoría de la probabilidad es la función de densidad normal estándar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/}$$

(a) Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.
(b) Encuentre los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente.
(c) Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de f.
(d) Encuentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(e) Encuentre los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.
(f) Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.
(g) Bosqueje la gráfica de f.
(h) Encuentre todos los extremos absolutos.

51. Costo marginal Si $c = q^3 - 6q^2 + 12q + 18$ es una función de costo total, ¿para qué valores de q es creciente el costo marginal?

52. Ingreso marginal Si $r = 320q^{3/2} - 2q^2$ es la función de ingreso para el producto de un fabricante, determine los intervalos en los que la función de ingreso marginal es creciente.

53. Función de ingreso La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 200 - \frac{\sqrt{q}}{5} \quad \text{donde} \quad q > 0$$

Demuestre que la gráfica de la función de ingreso es cóncava hacia abajo dondequiera que esté definida.

54. Anticoncepción En un modelo sobre el efecto de los anticonceptivos en la tasa de nacimientos,[16] la ecuación

$$R = f(x) = \frac{x}{4.4 - 3.4x} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

evalúa la reducción proporcional R en la tasa de nacimientos como función de la eficiencia x de un método anticonceptivo. Una eficiencia de 0.2 (o 20%) significa que la probabilidad de resultar embarazada es 80% de la probabilidad de resultar embarazada sin el anticonceptivo. Encuentre la reducción (en porcentaje) cuando la eficiencia es (a) 0, (b) 0.5 y (c) 1. Encuentre dR/dx y d^2R/dx^2, luego dibuje la gráfica de la ecuación.

55. Aprendizaje y memoria Si usted fuese a citar los miembros de una categoría, por ejemplo la de los animales cuadrúpedos, las palabras que citaría se presentarían probablemente en "grupos" con distintas pausas entre tales grupos. Por ejemplo, usted podría citar las siguientes palabras para la categoría de los cuadrúpedos:

perro, gato, ratón, rata,
(pausa)
caballo, burro, mula,
(pausa)
vaca, cerdo, cabra, cordero,
etcétera.

Las pausas pueden presentarse porque las personas tienen que buscar mentalmente las subcategorías (animales domésticos, bestias de carga, animales de granja, etcétera).

---

[16] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

El tiempo transcurrido entre los conjuntos de palabras sucesivas se llama *tiempo entre respuestas*. Se ha usado una función para analizar la duración de las pausas y el tamaño de los grupos (número de palabras incluidas en un grupo).[17] Esta función f es tal que

$$f(t) = \begin{cases} \text{el número promedio de palabras} \\ \text{que se presentan en sucesión con} \\ \text{tiempo entre respuestas menor que } t \end{cases}$$

La gráfica de f tiene una forma similar a la mostrada en la figura 9.72 y se ajusta bastante bien por medio de un polinomio de tercer grado, tal como

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$

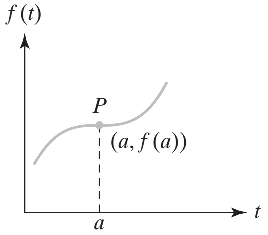


FIGURA 9.72

El punto P tiene un significado especial. Es tal que el valor a separa los tiempos entre respuestas ocurridos *dentro* de los grupos de aquellos tiempos que se registran *entre* dos grupos. Matemáticamente, P es un punto crítico que también es un punto de inflexión. Suponga estas dos condiciones y demuestre que (a) $a =$ —$B/(3A)$ y (b) $B^2 = 3AC$.

56. Penetración de mercado En un modelo implementado para introducir un producto nuevo a un mercado, las ventas S del producto en el tiempo t están dadas por[18]

$$S = g(t) = \frac{m(p+q)^2}{p}\left[\frac{e^{-(p+q)t}}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^2}\right]$$

donde p, q y m son constantes diferentes de 0.

(a) Demuestre que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{m}{p}(p+q)^3e^{-(p+q)t}\left[\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}-1\right]}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^3}$$

(b) Determine el valor de t para el cual se tiene la venta máxima. Puede suponer que S alcanza un máximo cuando $dS/dt = 0$.

En los problemas del 57 al 60, redondee sus respuestas a dos decimales cuando sea apropiado.

57. En la gráfica de $y = 4x^3 + 5.3x^2 - 7x + 3$, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos.

58. En la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$, determine los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1, 1]$.

59. La gráfica de una función f tiene exactamente un punto de inflexión. Si

$$f''(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{5x^2 - 2x + 4}$$

use la gráfica de f'' para determinar el valor x del punto de inflexión de f.

60. Grafique $y = \dfrac{5x^2 + 2x}{x^3 + 2x + 1}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales o verticales.

61. Maximización de la producción Un fabricante determina que m empleados en cierta línea de producción producen q unidades por mes, donde

$$q = 80m^2 - 0.1m^4$$

Para obtener una producción mensual máxima, ¿cuántos empleados deben asignarse a la línea de producción?

62. Ingreso La función de demanda para el producto de un fabricante está dada por $p = 100e^{-0.1q}$. ¿Para qué valor de q maximiza el fabricante su ingreso total?

63. Ingreso La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \sqrt{500 - q}$$

Si el monopolista quiere producir por lo menos 100 unidades, pero no más de 200, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

64. Costo promedio Si $c = 0.01q^2 + 5q + 100$ es una función de costo, encuentre la función de costo promedio. ¿A qué nivel de producción q se presenta un costo promedio mínimo?

65. Utilidad La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 700 - 2q$$

y el costo promedio por unidad para producir q unidades es

$$\bar{c} = q + 100 + \frac{1000}{q}$$

donde p y $\bar{c}$ representan el costo por unidad. Encuentre la utilidad máxima que el monopolista puede lograr.

66. Diseño de un recipiente Una caja rectangular va a fabricarse recortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina de cartón de 10 por 16 pulgadas y doblando luego los lados hacia arriba. ¿Cuál debe ser la longitud por lado del cuadrado a recortar para que el volumen de la caja sea máximo?

67. Cercado Un terreno rectangular va a cercarse y dividirse en tres partes iguales por dos cercas paralelas a un par de los lados. Si se van a usar un total de 800 pies de cerca, encuentre las dimensiones que maximizarán el área cercada.

68. Diseño de un cartel Un cartel rectangular con área de 500 pulg^2 debe tener un margen de 4 pulgadas a cada lado y en la parte

---

[17] A. Graesser y G. Mandler, "Limited Processing Capacity Constrains the Storage of Unrelated Sets of Words and Retrieval from Natural Categories", *Human Learning and Memory*, 4, núm. 1 (1978), pp. 86-100.

[18] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein *et al.*, "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 11 (1978), pp. 197-221.

inferior y un margen de 6 pulgadas en la parte superior. El resto del cartel es para el material impreso. Encuentre las dimensiones del cartel de modo que el área de la zona impresa sea máxima.

69. Costo Una empresa fabrica estantes para computadoras personales. Para cierto modelo, el costo total (en miles) cuando se producen q *cientos* de estantes está dado por

$$c = 2q^3 - 9q^2 + 12q + 20$$

(a) La empresa tiene actualmente capacidad para producir entre 75 y 600 estantes (inclusive) por semana. Determine el número de estantes que debe producir por semana para minimizar el costo total y encuentre el correspondiente costo promedio por estante.

(b) Suponga que deben producirse entre 300 y 600 estantes. ¿Cuántos deberían producirse ahora para minimizar el costo total?

70. Bacterias En un laboratorio se aplica un agente antibacterial experimental a una población de 100 bacterias. Los datos indican que el número de bacterias presentes en t horas después de introducir el agente está dado por

$$N = \frac{12\,100 + 110t + 100t^2}{121 + t^2}$$

¿Para qué valor de t se presenta el número máximo de bacterias en la población? ¿Cuál es este número máximo?

EXPLORE Y AMPLÍE Cambio de la población a lo largo del tiempo

Ahora que sabemos cómo encontrar la derivada de una función, podríamos preguntarnos si existe una forma de realizar el proceso en forma inversa: encontrar una función, dada su derivada. Finalmente, esto es de lo que trata la integración (capítulos 14 y 15). Sin embargo, por lo pronto, puede usarse la derivada de una función para encontrar la función de manera *aproximada* aún sin saber cómo se realiza la integración.

A manera de ilustración, suponga que se desea describir cómo varía en número la población a través del tiempo para un pequeño pueblo situado en un área fronteriza. Imagine que las cosas que se saben acerca del pueblo son todos los hechos de cómo su población, P, cambia a través del tiempo, t, donde la población se mide en número de personas y el tiempo en años.

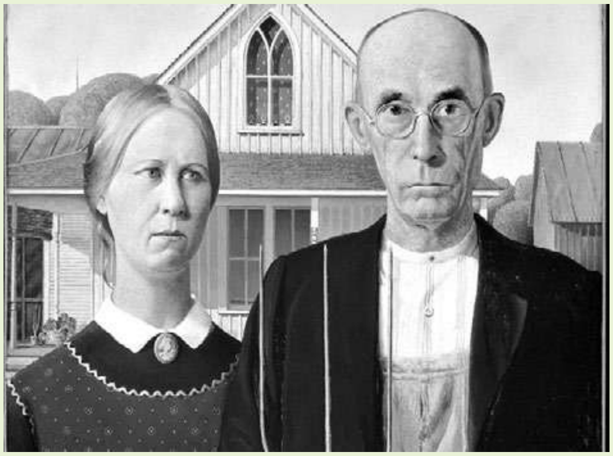
1. Los nacimientos superan a las muertes, de manera que en el curso de un año existe un incremento del 25% antes de que se tomen en cuenta otros factores. Así, el cambio anual debido a la diferencia nacimientos/muertes es $0.25P$.
2. Cada año, de los viajeros que pasan por ahí, 10 deciden detenerse y establecerse. Esto contribuye con una constante de 10 al cambio anual.
3. La soledad ocasiona que algunas personas se vayan cuando el pueblo resulta demasiado pequeño para ellas. En el extremo, 99% de las personas se irían en el curso de un año si estuviera solas (población = 1). Cuando la población es de 100, 10% de los residentes se van cada año debido a la soledad.

Si se supone una relación exponencial, es posible escribir la probabilidad de que una persona dada se vaya en un año debido a la soledad como Ae^{-kP}, donde A y k son constantes positivas. Los números indican que $Ae^{-k\cdot 1} = 0.99$ y $Ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Al despejar A y k de este par de ecuaciones se obtiene

$$k = \frac{\ln 9.9}{99} \approx 0.02316$$

y

$$A = 0.99e^{(\ln 9.9)/99} \approx 1.01319$$



Y si Ae^{-kP} es la probabilidad de que una sola persona se vaya, el cambio de población por año debido a la soledad es $-P$ veces esa ecuación, a saber $-1.01319Pe^{-0.02316P}$. (El signo negativo se debe al hecho de que el cambio es hacia abajo).

4. La aglomeración ocasiona que algunas personas se vayan cuando el pueblo es demasiado grande para ellas. Nadie tiene un problema de aglomeración cuando está solo (población = 1), pero cuando la población es de 100, 10% de los residentes se van cada año debido a la aglomeración.

De nuevo, suponiendo una relación exponencial, se escribe la probabilidad de que una persona dada se vaya en el transcurso de un año debido a la aglomeración como $1 - Ae^{-kP}$. Esta vez, los números indican que $1 - Ae^{-k\cdot 1} = 0$ y $1 - Ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Al despejar A y k de este par de ecuaciones se tiene

$$k = -\frac{\ln 0.9}{99} \approx 0.001064$$

y

$$A = e^{-(\ln 0.9)/99} \approx 1.001065$$

Si $1 - Ae^{-kP}$ es la probabilidad de que una sola persona se vaya, la población cambia cada año debido a que la aglomeración es $-P$ veces esa ecuación, a saber $-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P})$.

Ahora, la razón global de cambio en la población es el efecto neto de todos esos factores juntos. En forma de ecuación,

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P + 10 - 1.01319Pe^{-0.02316P}$$
$$-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P})$$

Antes de tratar de reconstruir la función $P(t)$, se graficará la derivada. En una calculadora gráfica, se ve como en la figura 9.73. Observe que $\frac{dP}{dt}$ se presenta como una función de P. Ésta es una gráfica diferente de la que se obtendría si se conociera a P como una función de t, se obtuviera su derivada y se graficara en la forma estándar, a saber, como una función de t. Sin embargo, esta gráfica revela algunos hechos significativos. Primero, la derivada es positiva desde $P = 0$ hasta $P = 311$; esto significa que la población tendrá un crecimiento positivo en todo ese intervalo y se puede esperar que aumente de la nada hasta ser una comunidad importante.

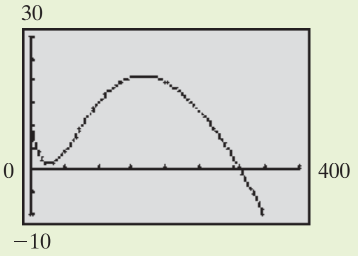


FIGURA 9.73 $\frac{dP}{dt}$ como una función de P.

El crecimiento cae a cerca de cero alrededor de $P = 30$. Aparentemente, las partidas debido a la soledad casi llevan a detener el crecimiento cuando la población aún es pequeña. Pero una vez que el pueblo supera esa fase, su tamaño aumenta de manera estable, sumando en un punto (alrededor de $P = 170$) 21 personas por año.

En algún momento, las salidas debido a la aglomeración comienzan a influir. Arriba de 312 la derivada es negativa. Lo cual significa que si la población siempre fluctúa por encima de 312, las pérdidas de población la reducirán de nuevo a ese nivel. En resumen, la población de este pueblo se estabiliza en 311 o 312 —no es exactamente una ciudad pero, después de todo, este es un entorno fronterizo.

Si ahora se desea graficar la población del pueblo como una función del tiempo, a continuación se presenta la forma de hacerlo: se aproxima la gráfica mediante una serie de segmentos de recta, cada uno de los cuales tiene una pendiente dada por la expresión que se obtuvo para dP/dt. Se comienza con un tiempo conocido y una población conocida y se calcula la pendiente inicial. Se considerará que el pueblo comienza a crecer de la nada, haciendo $t = 0$ y $P = 0$. Entonces $\frac{dP}{dt} = 10$. Ahora se avanza en el tiempo durante un intervalo conveniente —por ejemplo un año— y como la pendiente en (0, 0) es igual a 10, la población se incrementa de 0 a 10. Los nuevos valores para t y P son 1 y 10, respectivamente, entonces se dibuja un segmento de recta de (0, 0) a (1, 10). Ahora, con $t = 1$ y $P = 10$, de nuevo se calcula la pendiente y de nuevo se realizan los mismos pasos, este proceso se repite hasta haber dibujado la porción de la curva que se desee ver.

Desde luego, esto resultaría extremadamente tedioso de hacerse a mano. Sin embargo, en una calculadora gráfica se pueden usar las funciones de programación y trazado de líneas. En una TI-83 Plus, el siguiente programa hace el trabajo muy bien después de introducir la expresión para $\frac{dP}{dt}$ como Y_1 (manteniendo a P como la variable):

```
PROGRAM:POPLTN
:Input “P?”,P
:Input “T?”, T
:ClrDraw
:T → S
:For(I, S + 1, S + 55)
:Line(T,P,I,P + Y1)
:I → T
:(P + Y1) → P
:End
```

Quite la selección de la función Y_1. Configure la ventana gráfica para representar el plano coordenado desde 0 hasta 55 de manera horizontal y de 0 a 350 en forma vertical. Después ejecute el programa y, en el apuntador, dé valores iniciales para P y t. El programa dibujará 55 segmentos de línea, suficientes para llevar a la población a su tamaño final, a partir de $P = 0$, $t = 0$. El resultado se muestra en la figura 9.74.

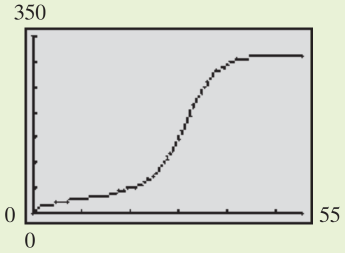


FIGURA 9.74 P como una función de t.

Problemas

1. ¿Qué información aporta la figura 9.74 que no es evidente en la figura 9.73?

2. ¿Qué pasa cuando se selecciona un valor inicial de 450 para P? (La pantalla debe ajustarse para ir desde 0 hasta 500 de manera vertical). ¿Es esto correcto?

3. ¿Por qué este procedimiento para obtener una gráfica de $P(t)$ solo es aproximado? ¿Cómo se puede mejorar la aproximación?

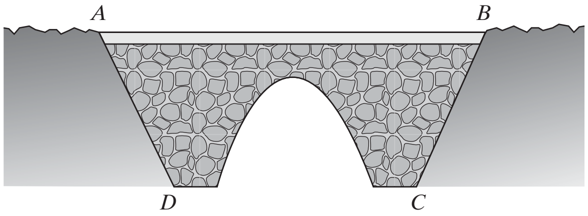
INTEGRACIÓN

10

Cualquier persona que haya tenido un negocio conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general, es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada. Por lo general, esto solo requiere de aritmética simple —las paredes y los techos son rectangulares, por lo que el área total es una suma de productos de base por altura.

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra a continuación debe pulirse con chorro de arena para retirar el hollín acumulado. ¿Cómo calcularía el contratista el número de pies cuadrados del área de la cara vertical de cada lado del puente?



Quizá el área podría estimarse como tres cuartos del área del trapezoide formado por los puntos A, B, C y D. Pero un cálculo más preciso —que podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (situados a lo largo de una vía de tren)— requeriría un enfoque más refinado.

Si la forma del arco del puente puede describirse matemáticamente por medio de una función, el contratista podría utilizar el método introducido en este capítulo: integración. La integración tiene muchas aplicaciones, de las cuales la más simple es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras aplicaciones incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a un esfuerzo de flexión, el cálculo de la distancia recorrida bajo el mar por un submarino y el cálculo del pago de electricidad por una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso de un mes. Los capítulos del 11 al 13 trataron el cálculo diferencial. Se diferenció una función y se obtuvo otra función que es su derivada. El *cálculo integral* se ocupa del proceso inverso: dada la derivada de una función, se debe encontrar la función original. La necesidad de hacer esto surge de manera natural. Por ejemplo, es posible tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto que permite determinar el límite de un tipo especial de suma cuando el número de términos presentes en la suma tiende a infinito. Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral. Con esta noción, es posible calcular el área de una región que no puede encontrarse mediante ningún otro método conveniente.

Objetivo

Definir la diferencial, interpretarla de manera geométrica y usarla en aproximaciones. Asimismo, establecer de nuevo las relaciones de reciprocidad entre dx/dy y dy/dx.

10.1 Diferenciales

Pronto se dará una razón para usar el símbolo dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x. Para hacerlo, se introducirá la noción de la *diferencial* de una función.

Definición

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x y sea Δx un cambio en x, donde Δx puede ser cualquier número real. Entonces la ***diferencial*** de y, que se denota como dy o $d(f(x))$, está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

PARA REPASAR las funciones de varias variables, consulte la sección 2.8.

Observe que dy depende de dos variables, a saber, x y Δx. De hecho, dy es una función de dos variables.

EJEMPLO 1 Cálculo de una diferencial

Encuentre la diferencial de $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ y evalúela cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$.

Solución: La diferencial es

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\,\Delta x \\ &= (3x^2 - 4x + 3)\,\Delta x \end{aligned}$$

Cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$,

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Si $y = x$, entonces $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$. Por lo tanto, la diferencial de x es Δx. Se abrevia $d(x)$ con dx. Así, $dx = \Delta x$. De ahora en adelante, en este texto siempre se escribirá dx en vez de Δx cuando se busque una diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)\,dx = 2x\,dx$$

En resumen, se dice que si $y = f(x)$ define una función diferenciable de x, entonces

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

donde dx es cualquier número real. Siempre y cuando $dx \neq 0$, es posible dividir ambos lados de la ecuación entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esto es, dy/dx puede interpretarse como el cociente de dos diferenciales, a saber, dy dividido entre dx, o como un símbolo para la derivada de f en x. Es por esto que se introdujo el símbolo dy/dx para denotar la derivada.

EJEMPLO 2 Determinación de una diferencial en términos de dx

a. Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

b. Si $u = (x^2 + 3)^5$, entonces $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)dx = 10x(x^2 + 3)^4dx$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

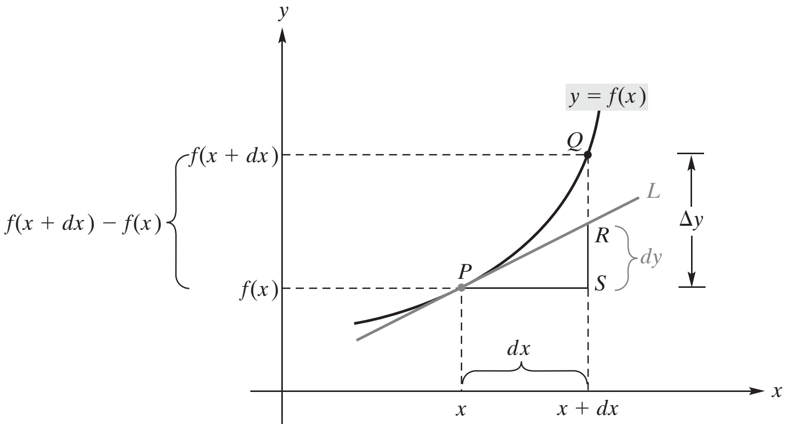


FIGURA 10.1 Interpretación geométrica de dy y Δx.

La diferencial puede interpretarse de manera geométrica. En la figura 10.1, el punto $P(x, f(x))$ está sobre la curva $y = f(x)$. Suponga que x cambia en dx, un número real, al nuevo valor $x + dx$. Entonces, el valor de la nueva función es $f(x + dx)$ y el punto correspondiente sobre la curva es $Q(x + dx, f(x + dx))$. Por P y Q pasan rectas horizontales y verticales, respectivamente, que se intersecan en S. Una recta L tangente a la curva de P interseca el segmento QS en R, formando el triángulo rectángulo PRS. Observe que la gráfica de f cerca de P es aproximada mediante la recta tangente en P. La pendiente de L es $f'(x)$, pero también está dada por $\overline{SR}/\overline{PS}$, de manera que

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}$$

Como $dy = f'(x)dx$ y $dx = \overline{PS}$,

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}$$

Por ende, si dx es un cambio de x en P, entonces dy es el cambio vertical correspondiente a lo largo de la **recta tangente** en P. Observe que para la misma dx, el cambio vertical a lo largo de la **curva** es $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$. No confunda Δy con dy. Sin embargo, a partir de la figura 10.1, es claro que:

Cuando dx es cercana a 0, dy es una aproximación a Δy. Por lo tanto,

$$\Delta y \approx dy$$

Este hecho es útil al estimar Δy, un cambio en y, como se verá en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial para estimar un cambio en una cantidad

Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total P que es dada de alta al final de t días está dada por

$$P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3$$

Use diferenciales para estimar el cambio en la proporción dada de alta si t cambia de 300 a 305.

Solución: El cambio en t de 300 a 305 es $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$. El cambio en P es $\Delta P = P(305) - P(300)$. Se aproxima ΔP mediante dP:

$$\Delta P \approx dP = P'(t)\,dt = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left(-\frac{300}{(300 + t)^2}\right)dt = 3\frac{300^3}{(300 + t)^4}\,dt$$

Cuando $t = 300$ y $dt = 5$,

$$dP = 3\frac{300^3}{600^4}5 = \frac{15}{2^3 600} = \frac{1}{2^3 40} = \frac{1}{320} \approx 0.0031$$

Como comparación, el valor verdadero de ΔP es

$$P(305) - P(300) = 0.87807 - 0.87500 = 0.00307$$

(con cinco decimales).

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Se dijo que si $y = f(x)$, entonces $\Delta y \approx dy$ si dx es cercana a 0. Así,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

La fórmula (1) se usa para aproximar el valor de una función, mientras que la fórmula $\Delta y \approx dy$ se usa para aproximar un cambio en los valores de la función.

de manera que

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy \tag{1}$$

Esta fórmula proporciona una forma de estimar el valor de una función $f(x + dx)$. Por ejemplo, suponga que se quiere estimar ln(1.06). Si $y = f(x) = \ln x$, es necesario estimar $f(1.06)$. Como $d(\ln x) = (1/x)dx$, a partir de la fórmula (1) se tiene,

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy$$

$$\ln(x + dx) \approx \ln x + \frac{1}{x}dx$$

Se conoce el valor exacto de ln 1, por lo que se hará $x = 1$ y $dx = 0.06$. Entonces, $x + dx = 1.06$ y dx es cercana a 0. Por lo tanto,

$$\ln(1 + 0.06) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06)$$

$$\ln(1.06) \approx 0 + 0.06 = 0.06$$

El valor verdadero de ln(1.06) con cinco decimales es 0.05827.

EJEMPLO 4 Uso de la diferencial para estimar el valor de una función

La función de demanda para un producto está dada por

$$p = f(q) = 20 - \sqrt{q}$$

donde p es el precio por unidad para q unidades. Por medio de diferenciales, estime el precio cuando se demandan 99 unidades.

Solución: Se desea estimar $f(99)$. Por medio de la fórmula (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp$$

donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}}dq \qquad \frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2}q^{-1/2}$$

Elegimos $q = 100$ y $dq = -1$ porque $q + dq = 99$, dq es pequeña y es fácil calcular $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$. Así, se tiene

$$f(99) = f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1)$$

$$f(99) \approx 10 + 0.05 = 10.05$$

Por consiguiente, el precio aproximado por unidad cuando se demandan 99 unidades es de \$10.05.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

La ecuación $y = x^3 + 4x + 5$ define a y como una función de x. Es posible escribir $f(x) = x^3 + 4x + 5$. Sin embargo, la ecuación también define a x implícitamente como una función de y. De hecho, si se restringe el dominio de f a algún conjunto de números reales x de manera que $y = f(x)$ sea una función uno a uno, entonces en principio es posible despejar x en términos de y y obtener $x = f^{-1}(y)$. [En realidad, aquí no es necesario imponer ninguna restricción al dominio. Como $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$, para toda x, se observa que f es estrictamente creciente sobre $(-\infty, \infty)$ y, por lo tanto, es uno a uno sobre $(-\infty, \infty)$]. Tal como se hizo en la sección 8.2, es posible considerar la derivada de x con respecto a y, dx/dy, y ya se ha visto que está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{siempre que } dy/dx \neq 0$$

Como dx/dy puede considerarse un cociente de diferenciales, ahora se ve que es el recíproco del cociente de diferenciales dy/dx. Así

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$$

Es importante entender que no es necesario tener la capacidad de despejar x de $y = x^3 + 4x + 5$ en términos de y y que la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$ es válida para toda x.

EJEMPLO 5 Determinación de dp/dq a partir de dq/dp

Encuentre $\frac{dp}{dq}$ si $q = \sqrt{2500 - p^2}$.

Solución:

Estrategia Hay varias maneras de encontrar dp/dq. Una es despejar p de la ecuación dada en términos de q y luego diferenciar en forma directa. Otro método para encontrar dp/dq es usar la diferenciación implícita. Sin embargo, ya que q está dada explícitamente como función de p, se puede encontrar fácilmente dq/dp y luego usar la relación recíproca anterior para encontrar dp/dq. Se usará este último procedimiento.

Se tiene

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

PROBLEMAS 10.1

En los problemas del 1 al 10, encuentre la diferencial de la función en términos de x y dx.

1. $y = ax + b$
2. $y = 2$
3. $f(x) = \sqrt{x^4 - 9}$
4. $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$
5. $u = \frac{1}{x^2}$
6. $u = \sqrt{x}$
7. $p = \ln(x^2 + 7)$
8. $p = e^{x^3+2x-5}$
9. $y = (9x + 3)e^{2x^2+3}$
10. $y = \ln\sqrt{x^2 + 12}$

En los problemas del 11 al 16, encuentre Δy y dy para los valores dados de x y dx.

11. $y = ax + b$; para cualesquiera x y dy.
12. $y = 5x^2$; $x = -1$, $dx = -0.02$
13. $y = 2x^2 + 5x - 7$; $x = -2$, $dx = 0.1$
14. $y = (3x + 2)^2$; $x = -1$, $dx = -0.03$
15. $y = \sqrt{32 - x^2}$; $x = 4$, $dx = -0.05$ Redondee su respuesta a tres decimales.
16. $y = \ln x$; $x = 1$, $dx = 0.01$
17. Sea $f(x) = \frac{x + 5}{x + 1}$.

(a) Evalúe $f'(1)$.
(b) Use diferenciales para estimar el valor de $f(1.1)$.

18. Sea $f(x) = x^{3x}$.

(a) Evalúe $f'(1)$.
(b) Use diferenciales para estimar el valor de $f(0.98)$.

En los problemas del 19 al 26, aproxime cada expresión por medio de diferenciales.

19. $\sqrt{288}$ (*Sugerencia:* $17^2 = 289$).

20. $\sqrt{122}$

21. $\sqrt[3]{9}$

22. $\sqrt[4]{16.3}$

23. ln 0.97

24. ln 1.01

25. $e^{0.001}$

26. $e^{-0.002}$

En los problemas del 27 al 32, encuentre dx/dy o dp/dq.

27. $y = 2x - 1$

28. $y = 5x^2 + 3x + 2$

29. $q = (p^2 + 5)^3$

30. $q = \sqrt{p + 5}$

31. $q = \dfrac{1}{p^2}$

32. $q = e^{4-2p}$

33. Si $y = 7x^2 - 6x + 3$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 3$.

34. Si $y = \ln x^2$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 3$.

En los problemas 35 y 36, encuentre la razón de cambio de q con respecto a p para el valor indicado de q.

35. $p = \dfrac{500}{q + 2}; q = 18$

36. $p = 60 - \sqrt{2q}; q = 50$

37. Utilidad Suponga que la utilidad obtenida al producir q unidades de cierto artículo es

$$P = 397q - 2.3q^2 - 400$$

Por medio de diferenciales, encuentre el cambio aproximado en la utilidad si el nivel de producción cambia de $q = 90$ a $q = 91$. Encuentre el cambio verdadero.

38. Ingreso Dada la función de ingreso

$$r = 250q + 45q^2 - q^3$$

use diferenciales para encontrar el cambio aproximado en el ingreso si el número de unidades se incrementa de $q = 40$ a $q = 41$. Encuentre el cambio verdadero.

39. Demanda La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

Por medio de diferenciales, estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

40. Demanda Dada la función de demanda

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 8}}$$

use diferenciales para estimar el precio por unidad cuando se demandan 40 unidades.

41. Si $y = f(x)$, entonces el *cambio proporcional en y* se define como $\Delta y/y$, que puede aproximarse con diferenciales por medio de dy/y. Use esta última forma para estimar el cambio proporcional en la función de costo

$$c = f(q) = \frac{q^2}{2} + 5q + 300$$

cuando $q = 10$ y $dq = 2$. Redondee su respuesta a un decimal.

42. Estatus e ingreso Suponga que S es un valor numérico de la condición social basada en el ingreso anual, I (en miles), de una persona. Para cierta población, suponga que $S = 20\sqrt{I}$. Use diferenciales para aproximar el cambio en S cuando el ingreso anual disminuye de \$45 000 a \$44 500.

43. Biología El volumen de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Estime el cambio en el volumen cuando el radio cambia de 6.5×10^{-4} cm a 6.6×10^{-4} cm.

44. Contracción muscular La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[1] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras del músculo y a, b y k son constantes positivas. Encuentre P en términos de v y luego use diferenciales para estimar el cambio en P debido a un pequeño cambio en v.

45. Demanda La demanda, q, para el producto de un monopolista está relacionada con el precio por unidad, p, según la ecuación

$$2 + \frac{q^2}{200} = \frac{4000}{p^2}$$

(a) Verifique si se demandarán 40 unidades cuando el precio por unidad sea de \$20.

(b) Demuestre que $\dfrac{dq}{dp} = -2.5$ cuando el precio por unidad es de \$20.

(c) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (b) para estimar el número de unidades que se demandarán si el precio por unidad se reduce a \$19.20.

46. Utilidad La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \frac{1}{2}q^2 - 66q + 7000$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 500 - q + \frac{80\,000}{2q}$$

(a) Encuentre la utilidad cuando se demandan 100 unidades.

(b) Use diferenciales y el resultado del inciso (a) para estimar la utilidad cuando se demandan 101 unidades.

10.2 Integral indefinida

Objetivo

Definir la antiderivada y la integral indefinida y aplicar las fórmulas básicas de integración.

Dada una función f, si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

entonces F se llama *antiderivada* de f. Así,

Una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

---

[1] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por la diferencial dx, resulta $F'(x)dx = f(x)dx$. Sin embargo, como $F'(x)dx$ es la diferencial de F, se tiene que $dF = f(x)dx$. De modo que se puede considerar a una antiderivada de f como una función cuya diferencial es $f(x)dx$.

Definición

Una ***antiderivada*** de una función f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x)$$

De manera equivalente, en notación diferencial

$$dF = f(x)dx$$

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es $2x$, x^2 es una antiderivada de $2x$. Sin embargo, no es la única antiderivada de $2x$: puesto que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x$$

tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ también son antiderivadas de $2x$. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es 0, $x^2 + C$ es también una antiderivada de $2x$ para *cualquier* constante C. Así, $2x$ tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante es que *todas* las antiderivadas de $2x$ deben ser funciones de la forma $x^2 + C$, debido al siguiente hecho:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren solo en una constante.

Como $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de $2x$, se puede hacer referencia a esta función como la *antiderivada más general* de $2x$, denotada por $\int 2x\,dx$, la cual se lee como “la *integral indefinida* de $2x$ con respecto a x”. Así, se escribe

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

El símbolo $\int$ se llama **signo de integración**, $2x$ es el **integrando** y C es la **constante de integración**. La dx forma parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la **variable de integración**.

De manera más general, la **integral indefinida** de cualquier función f con respecto a x se escribe como $\int f(x)dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren solo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{donde } C \text{ es una constante}$$

Integrar f significa encontrar $\int f(x)dx$. En resumen,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{si y sólo si} \qquad F'(x) = f(x)$$

Así, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \int \frac{d}{dx}(F(x))\,dx = F(x) + C$$

con lo que se muestra la extensión hasta la cual la diferenciación y la integración indefinida constituyen procedimientos inversos.

APLÍQUELO ▶

1. Si el costo marginal para una compañía es $f(q) = 28.3$, encuentre $\int 28.3\, dq$ que proporciona la forma de la función de costo.

EJEMPLO 1 Determinación de una integral indefinida

Encuentre $\int 5\, dx$.

Solución:

Estrategia Primero se debe encontrar (tal vez una palabra más apropiada sería *inferir*) una función cuya derivada sea 5. Luego se añadirá la constante de integración.

Como se sabe que la derivada de $5x$ es 5, $5x$ es una antiderivada de 5. Por lo tanto,

$$\int 5\, dx = 5x + C$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

¡ADVERTENCIA!

Un error común consiste en omitir C, la constante de integración.

Tabla 10.1 Fórmulas básicas de integración

1.	$\int k\, dx = kx + C$	k es una constante
2.	$\int x^a\, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$a \neq -1$
3.	$\int x^{-1}\, dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$	para $x > 0$
4.	$\int e^x\, dx = e^x + C$	
5.	$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$	k es una constante
6.	$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	

Mediante el uso de las fórmulas de diferenciación analizadas en los capítulos 11 y 12, en la tabla 10.1 se recopila una lista de fórmulas básicas de integración. Estas fórmulas son fáciles de verificar. Por ejemplo, la fórmula (2) es cierta porque la derivada de $x^{a+1}/(a+1)$ es x^a para $a \neq -1$. (Se debe tener $a \neq -1$ porque el denominador es 0 cuando $a = -1$). La fórmula (2) establece que la integral indefinida de una potencia de x, excepto x^{-1}, se obtiene al incrementar el exponente de x en 1, al dividir esto entre el nuevo exponente y al sumarle la constante de integración. La integral indefinida de x^{-1} se analizará en la sección 10.4.

Para verificar la fórmula (5), se debe comprobar que la derivada de $k \int f(\mathrm{x})\, dx$ es $kf(x)$. Como la derivada de $k \int f(x) dx$ es simplemente k veces la derivada de $\int f(x) dx$, y ésta es $f(x)$, la fórmula (5) queda verificada. El lector debe verificar las otras fórmulas. La fórmula (6) puede ampliarse a cualquier número de términos.

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas de una constante y de una potencia de x

a. Encuentre $\int 1\, dx$.

Solución: Por la fórmula (1) con $k = 1$

$$\int 1\, dx = 1x + C = x + C$$

Por lo general, se escribe $\int 1\, dx$ como $\int dx$. Así, $\int dx = x + C$.

b. Encuentre $\int x^5\,dx$.

Solución: Por la fórmula (2) con $n = 5$,

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

APLÍQUELO ▶

2. Si la razón de cambio de los ingresos de una compañía puede modelarse mediante $\frac{dR}{dt} = 0.12t^2$, entonces encuentre $\int 0.12t^2\,dt$, que proporciona la función de ingresos de la compañía.

EJEMPLO 3 Integral indefinida de una constante por una función

Encuentre $\int 7x\,dx$.

Solución: Por la fórmula (5), con $k = 7$ y $f(x) = x$,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx$$

Como x es x^1, por la fórmula (2) se tiene

$$\int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$$

donde C_1 es la constante de integración. Por lo tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1$$

Como $7C_1$ solo es una constante arbitraria, por simplicidad se reemplazará por C. Así,

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + C$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. De manera más sencilla, se escribe

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

¡ADVERTENCIA!

Solo un factor *constante* del integrando puede "sacarse" del signo de integral.

EJEMPLO 4 Integral indefinida de una constante por una función

Encuentre $\int -\frac{3}{5}e^x\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}\int -\frac{3}{5}e^x\,dx &= -\frac{3}{5}\int e^x\,dx && \text{Fórmula (5)}\\ &= -\frac{3}{5}e^x + C && \text{Fórmula (4)}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

APLÍQUELO ▶

3. Debido a un competidor nuevo, el número de suscriptores a cierta revista está disminuyendo a una tasa de $\frac{dS}{dt} = -\frac{480}{t^3}$ suscripciones por mes, donde t es el número de meses desde que el competidor entró al mercado. Encuentre la forma de la ecuación apropiada para representar el número de suscriptores a la revista.

EJEMPLO 5 Determinación de integrales indefinidas

a. Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$.

Solución: Aquí, t es la variable de integración. Se escribe de nuevo el integrando de manera que se pueda usar una fórmula básica. Como $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula (2) se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

b. Encuentre $\int \frac{1}{6x^3}\,dx$.

Solución:

$$\int \frac{1}{6x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$
$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C$$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

APLÍQUELO ▶

4. La tasa de crecimiento de la población de una nueva ciudad se estima utilizando $\frac{dN}{dt} = 500 + 300\sqrt{t}$, donde t está en años. Encuentre

$$\int (500 + 300\sqrt{t})\,dt$$

EJEMPLO 6 Integral indefinida de una suma

Encuentre $\int (x^2 + 2x)\,dx$.

Solución: Por la fórmula (6),

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx$$

Ahora,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1$$

y

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2$$

Así,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2$$

Cuando la integración de una expresión incluye más de un término, solo se necesita una constante de integración.

Por conveniencia, se reemplazará la constante $C_1 + C_2$ por C. Entonces se tiene

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Omitiendo los pasos intermedios, simplemente se integra término por término y se escribe

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

APLÍQUELO ▶

5. Suponga que la tasa de ahorro en Estados Unidos está dada por $\frac{dS}{dt} = 2.1t^2 - 65.4t + 491.6$, donde t es el tiempo en años y S es la cantidad de dinero ahorrado en miles de millones. Encuentre la forma de la ecuación que representa la cantidad de dinero ahorrado.

EJEMPLO 7 Integral indefinida de una suma y una diferencia

Encuentre $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$.

Solución:

$$\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$$
$$= 2\int x^{4/5}\,dx - 7\int x^3\,dx + 10\int e^x\,dx - \int 1\,dx \qquad \text{Fórmulas (5) y (6)}$$
$$= (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7)\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C \qquad \text{Fórmulas (1), (2) y (4)}$$
$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

A veces, para aplicar las fórmulas básicas de integración, es necesario realizar primero operaciones algebraicas en el integrando como se muestra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

Encuentre $\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy$.

¡ADVERTENCIA!

En el ejemplo 8, primero se multiplican los factores del integrando. La respuesta no hubiera podido encontrarse simplemente en términos de $\int y^2\,dy$ y $\int (y+\frac{2}{3})\,dy$. No existe una fórmula para calcular la integral de un producto general de funciones.

Solución: El integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, al multiplicar los factores del integrando se obtiene

$$\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy = \int\left(y^3+\frac{2}{3}y^2\right)dy$$
$$= \frac{y^4}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3}+C = \frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{9}+C$$

Ahora resuelva el problema 41 ◁

EJEMPLO 9 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

a. Encuentre $\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\,dx$.

Solución: Al factorizar la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicar los binomios, se obtiene

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int (2x^2+5x-3)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\left((2)\frac{x^3}{3}+(5)\frac{x^2}{2}-3x\right)+C$$
$$= \frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{2}+C$$

Otro enfoque algebraico para el inciso (*b*) es

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int (x^3-1)x^{-2}\,dx$$
$$= \int (x-x^{-2})\,dx$$

y así sucesivamente.

b. Encuentre $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$.

Solución: Es posible descomponer el integrando en fracciones al dividir cada término del numerador entre el denominador:

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int (x-x^{-2})\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}-\frac{x^{-1}}{-1}+C = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$$

Ahora resuelva el problema 49 ◁

PROBLEMAS 10.2

En los problemas del 1 al 52, encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int 7\,dx$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx$
3. $\int x^8\,dx$
4. $\int 5x^{24}\,dx$
5. $\int 5x^{-7}\,dx$
6. $\int \frac{z^{-3}}{3}\,dz$
7. $\int \frac{5}{x^7}\,dx$
8. $\int \frac{7}{x^4\,dx}$
9. $\int \frac{1}{t^{7/4}}\,dt$
10. $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\,dx$
11. $\int (4+t)\,dt$
12. $\int (7r^5+4r^2+1)\,dr$
13. $\int (y^5-5y)\,dy$
14. $\int (5-2w-6w^2)\,dw$
15. $\int (3t^2-4t+5)\,dt$
16. $\int (1+t^2+t^4+t^6)\,dt$

17. $\int (\sqrt{2}+e)\,dx$

18. $\int (5-2^{-1})\,dx$

19. $\int \left(\frac{x}{7}-\frac{3}{4}x^4\right) dx$

20. $\int \left(\frac{2x^2}{7}-\frac{8}{3}x^4\right) dx$

21. $\int \pi e^x\,dx$

22. $\int (e^x+3x^2+2x)\,dx$

23. $\int (x^{8.3}-9x^6+3x^{-4}+x^{-3})\,dx$

24. $\int (0.7y^3+10+2y^{-3})\,dy$

25. $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx$

26. $\int dz$

27. $\int \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

28. $\int \frac{-4}{(3x)^3}\,dx$

29. $\int \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x^3}\right) dx$

30. $\int \left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x^4}\right) dx$

31. $\int \left(\frac{3w^2}{2}-\frac{2}{3w^2}\right) dw$

32. $\int 7e^{-s}\,ds$

33. $\int \frac{3u-4}{5}\,du$

34. $\int \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^x\right) dx$

35. $\int (u^e+e^u)\,du$

36. $\int \left(3y^3-2y^2+\frac{e^y}{6}\right) dy$

37. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-12\sqrt[3]{x}\right) dx$

38. $\int 0\,dt$

39. $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5}-\frac{7}{2\sqrt{x}}+6x\right) dx$

40. $\int \left(\sqrt[3]{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right) du$

41. $\int (x^2+5)(x-3)\,dx$

42. $\int x^3(x^2+5x+2)\,dx$

43. $\int \sqrt{x}(x+3)\,dx$

44. $\int (z+2)^2\,dz$

45. $\int (3u+2)^3\,du$

46. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x}}-1\right)^2 dx$

47. $\int x^{-2}(3x^4+4x^2-5)\,dx$

48. $\int (6e^u-u^3(\sqrt{u}+1))\,du$

49. $\int \frac{z^4+10z^3}{2z^2}\,dz$

50. $\int \frac{x^4-5x^2+2x}{5x^2}\,dx$

51. $\int \frac{e^x+e^{2x}}{e^x}\,dx$

52. $\int \frac{(x^2+1)^3}{x}\,dx$

53. Si $F(x)$ y $G(x)$ son tales que $F'(x)=G'(x)$, ¿es cierto que $F(x)-G(x)$ debe ser 0?

54. **(a)** Encuentre una función F tal que $\int F(x)dx = xe^x + C$.
(b) ¿Hay solo una función F que satisface la ecuación dada en el inciso (a) o existen muchas funciones con esta característica?

55. Encuentre $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$.

Objetivo

Encontrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de constantes de integración.

10.3 Integración con condiciones iniciales

Si se conoce la razón de cambio, f', de la función f, entonces la propia función f es una antiderivada de f' (puesto que la derivada de f es f'). Por supuesto, hay muchas antiderivadas de f' y la más general se denota mediante la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x$$

entonces

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C \tag{1}$$

Esto es, *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ tiene su derivada igual a $2x$. Note que debido a la constante de integración, no se conoce $f(x)$ específicamente. Sin embargo, si f debe asumir cierto valor funcional para un valor particular de x, entonces es posible determinar el valor de C y así determinar específicamente $f(x)$. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, con base en la ecuación (1),

$$f(1) = 1^2 + C$$
$$4 = 1 + C$$
$$C = 3$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3$$

Es decir, ahora ya se conoce la función particular $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. La condición $f(1) = 4$, que da un valor de f para un valor específico de x, se llama *condición inicial*.

APLÍQUELO ▶

6. La tasa de crecimiento de una especie de bacterias se estima por medio de $\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$, donde N es el número de bacterias (en miles) después de t horas. Si $N(5) = 40\,000$, encuentre $N(t)$.

EJEMPLO 1 Problema con condición inicial

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encuentre y. [*Nota:* $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$]. Encuentre también $y(4)$.

Solución: Aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\,dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C \qquad (2)$$

Es posible determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Debido a que $y = 5$ cuando $x = 2$, a partir de la ecuación (2), se tiene

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C$$
$$5 = 16 - 8 + C$$
$$C = -3$$

Al reemplazar C por -3 en la ecuación (2) se obtiene la función deseada:

$$y = 4x^2 - 4x - 3 \qquad (3)$$

Para encontrar $y(4)$, se hace $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

7. La aceleración de un objeto después de t segundos está dada por $y'' = 84t + 24$, la velocidad a los 8 segundos está dada por $y'(8) = 2891$ pies/s y la posición a los dos segundos está dada por $y(2) = 185$ pies. Encuentre $y(t)$.

EJEMPLO 2 Problema con condición inicial que implica a y''

Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$ y $y(1) = -1$, encuentre y.

Solución:

Estrategia Para pasar de y'' a y, son necesarias dos integraciones: la primera lleva de y'' a y' y la segunda de y' a y. Por lo tanto, se tendrán dos constantes de integración que se denotarán como C_1 y C_2.

Como $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, y' es una antiderivada de $x^2 - 6$. Así que,

$$y' = \int (x^2 - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1 \qquad (4)$$

Ahora, $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = 0$; por lo tanto, a partir de la ecuación (4), se tiene

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1$$

Así, $C_1 = 2$, de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2$$

Por integración, es posible encontrar y:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2 \qquad (5)$$

Ahora, como $y = -1$ cuando $x = 1$, a partir de la ecuación (5), se tiene

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2$$

Así, $C_2 = -\frac{1}{12}$, por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos, tal como ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Ingreso y educación

Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2} \quad 4 \leq x \leq 16$$

donde $y = 28\,720$ cuando $x = 9$. Encuentre y.

Solución: Aquí y es una antiderivada de $100x^{3/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} y &= \int 100x^{3/2}\,dx = 100 \int x^{3/2}\,dx \\ &= (100)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ y &= 40x^{5/2} + C \end{aligned} \tag{6}$$

La condición inicial es que $y = 28\,720$ cuando $x = 9$. Al sustituir estos valores en la ecuación (6), es posible determinar el valor de C:

$$\begin{aligned} 28\,720 &= 40(9)^{5/2} + C \\ &= 40(243) + C \\ 28\,720 &= 9720 + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C = 19\,000$ y

$$y = 40x^{5/2} + 19\,000$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2$$

encuentre la función de demanda.

Solución:

Estrategia Al integrar dr/dq y usar una condición inicial, se puede encontrar la función de ingreso r. Pero el ingreso está dado también por la relación general $r = pq$, donde p es el precio por unidad. Así, $p = r/q$. Al reemplazar a r en esta ecuación por la función de ingreso se obtiene la función de demanda.

Como dr/dq es la derivada del ingreso total r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\, dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C$$

de manera que

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C \qquad (7)$$

El ingreso es 0 cuando q es 0.

Se supone que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, no hay ingreso**; es decir, $r = 0$ cuando $q = 0$. Ésta es la condición inicial. Al sustituir estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C$$

Aunque $q = 0$ da $C = 0$, por lo general esto no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en $q = 0$ puede producir un valor distinto de 0 para C.

Por lo tanto, $C = 0$, y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3$$

Para encontrar la función de demanda, se usa el hecho de que $p = r/q$ y se sustituye el valor de r:

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}$$

$$p = 2000 - 10q - q^2$$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. (Los costos fijos son costos como la renta y los seguros y permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado). Si la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2$$

donde c es el costo total de producir q libras de producto por semana, encuentre el costo de producir 10 000 lb en una semana.

Solución: Como dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c(q) = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\, dq$$

$$= 0.000001 \int (0.002q^2 - 25q)\, dq + \int 0.2\, dq$$

$$c(q) = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C$$

Cuando q es 0, el costo total es igual al costo fijo.

Los costos fijos son constantes sin importar el nivel de producción. Por lo tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, lo cual representa la condición inicial. Al sustituir $c(0) = 4000$ en la última ecuación, se encuentra que $C = 4000$, por lo que

Aunque $q = 0$ le da a C un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en $q = 0$ puede producir un valor para C que es diferente al costo fijo.

$$c(q) = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000 \qquad (8)$$

A partir de la ecuación (8), se tiene $c(10\,000) = 5416\frac{2}{3}$. Así, el costo total de producir 10 000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

PROBLEMAS 10.3

En los problemas 1 y 2, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

1. $dy/dx = 3x - 4; \quad y(-1) = \frac{13}{2}$

2. $dy/dx = x^2 - x; \quad y(3) = \frac{19}{2}$

En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.

3. $y' = \dfrac{9}{8\sqrt{x}}, \ y(16) = 10; \quad x = 9$

4. $y' = -x^2 + 2x, \ y(2) = 1; \quad x = 1$

En los problemas del 5 al 8, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

5. $y'' = -3x^2 + 4x; \quad y'(1) = 2, \ y(1) = 3$

6. $y'' = x + 1; \quad y'(0) = 0, \ y(0) = 5$

7. $y''' = 2x; \quad y''(-1) = 3, \ y'(3) = 10, \ y(0) = 13$

8. $y''' = 2e^{-x} + 3; \quad y''(0) = 7, \ y'(0) = 5, \ y(0) = 1$

En los problemas del 9 al 12, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

9. $dr/dq = 0.7$

10. $dr/dq = 10 - \dfrac{1}{16}q$

11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$

12. $dr/dq = 5\,000 - 3(2q + 2q^3)$

En los problemas del 13 al 16, dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. Para los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16, encuentre el costo total para el valor indicado de q.

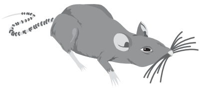
13. $dc/dq = 2.47; \quad \{159\}$

14. $dc/dq = 2q + 75; \quad \{2000\}$

15. $dc/dq = 0.08q^2 - 1.6q + 6.5; \quad \{8000\}; \quad q = 25$

16. $dc/dq = 0.000204q^2 - 0.046q + 6; \quad \{15\,000\}; \quad q = 200$

17. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.[2] La proteína consistió en levadura y harina de maíz.



En cierto periodo, el grupo encontró que la razón de cambio (aproximada) del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata con respecto al porcentaje P de levadura contenida en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2 \qquad 0 \le P \le 100$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre G.

18. Polilla de invierno Se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno en Nueva Escocia.[3] Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huésped. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad y (el número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies) desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x \qquad 1 \le x \le 9$$

Si $y = 59.6$ cuando $x = 1$, encuentre y.

19. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante R, como la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[4]

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta}\,dr$$

donde P_1 y P_2 son las presiones registradas en los extremos del tubo, η (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r = R$, demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}$$

20. Elasticidad de la demanda El único productor de un artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2$$

Determine la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando $q = 5$. (*Sugerencia*: Encuentre primero la función de demanda).

21. Costo promedio Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40$$

donde q es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de \$5000, ¿cuál es el costo *promedio* de producir 100 unidades?

22. Si $f''(x) = 30x^4 + 12x$ y $f'(1) = 10$, evalúe

$$f(965.335245) - f(-965.335245)$$

Objetivo

Aprender y aplicar las fórmulas para $\int u^a\,du$, $\int e^u\,du$ y $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du$.

10.4 Más fórmulas de integración

Regla de la potencia para la integración

La fórmula

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{n+1} + C \qquad \text{si } a \neq -1$$

---

[2] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*; R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum, eds. (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1968).

[3] Adaptado de D. G. Embree. "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

[4] R. W. Stacy *et al*., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

que se aplica a una potencia de x, puede generalizarse para manejar una potencia de una *función* de x. Sea u una función diferenciable de x. Por la regla de la potencia para la diferenciación, si $a \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(u(x))^{a+1}}{a+1}\right) = \frac{(a+1)(u(x))^a \cdot u'(x)}{a+1} = (u(x))^a \cdot u'(x)$$

Así,

$$\int (u(x))^a \cdot u'(x)\,dx = \frac{(u(x))^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

A esta expresión se le llama *regla de la potencia para la integración*. Observe que $u'(x)dx$ es la diferencial de u, es decir du. Mediante un atajo matemático, es posible reemplazar $u(x)$ por u y $u'(x)dx$ por du:

Regla de la potencia para la integración

Si u es diferenciable, entonces

$$\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \qquad \text{si } a \neq -1 \tag{1}$$

Es importante darse cuenta de la diferencia entre la regla de la potencia para la integración y la fórmula para $\int x^a\,dx$. En la regla de la potencia, u representa una función, mientras que en $\int x^a\,dx$, x es una variable.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

a. Encuentre $\displaystyle\int (x+1)^{20}\,dx$.

Solución: Como el integrando es una potencia de la función $x + 1$, se hará $u = x + 1$. Entonces $du = dx$ y $\int (x+1)^{20}\,dx$ tiene la forma $\int u^{20}\,du$. Por la regla de la potencia para la integración,

$$\int (x+1)^{20}\,dx = \int u^{20}\,du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x+1)^{21}}{21} + C$$

Observe que no se da la respuesta en términos de u, sino explícitamente en términos de x.

b. Determine $\displaystyle\int 3x^2(x^3+7)^3\,dx$.

Solución: Se observa que el integrando contiene una potencia de la función $x^3 + 7$. Sea $u = x^3 + 7$. Entonces $du = 3x^2\,dx$. Por fortuna, $3x^2$ aparece como un factor en el integrando y se tiene

$$\int 3x^2(x^3+7)^3\,dx = \int (x^3+7)^3[3x^2\,dx] = \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3+7)^4}{4} + C$$

Después de la integración, usted podría desear saber lo que sucedió con $3x^2$. Observe de nuevo que $du = 3x^2\,dx$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Con el propósito de aplicar la regla de la potencia para la integración, algunas veces resulta necesario hacer un ajuste con el fin de obtener du en el integrando, como lo ilustra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Ajuste para *du*

Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$.

Solución: Esto se puede escribir como $\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx$. Observe que el integrando contiene una potencia de la función $x^2 + 5$. Si $u = x^2 + 5$, entonces $du = 2x\,dx$. Como el factor *constante* 2 en du *no* aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma $\int u^n\,du$. Sin embargo, a partir de $du = 2x\,dx$ es posible escribir $x\,dx = \dfrac{du}{2}$ de manera que la integral se convierta en

$$\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx = \int (x^2+5)^{1/2}[x\,dx] = \int u^{1/2}\frac{du}{2}$$

Moviendo el factor *constante* $\frac{1}{2}$ al frente del signo de integral, se tiene

$$\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

que en términos de x (como se requiere) da

$$\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{(x^2+5)^{3/2}}{3} + C$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

¡ADVERTENCIA!
La respuesta a un problema de integración debe expresarse en términos de la variable original.

En el ejemplo 2, el integrando $x\sqrt{x^2+5}$ no tenía la forma $(u(x))^{1/2}u'(x)$ por el *factor constante* de 2. En general, si se tiene $\displaystyle\int (u(x))^a \frac{u'(x)}{k}dx$, donde k es una constante diferente de 0, se puede escribir

$$\int (u(x))^a \frac{u'(x)}{k}\,dx = \int u^a \frac{du}{k} = \frac{1}{k}\int u^a\,du$$

para simplificar la integral, pero tales *ajustes* del integrando *no son posibles para factores variables*.

¡ADVERTENCIA!
Es posible ajustar los factores constantes, pero no los variables.

Cuando se use la forma $\int u^a\,du$, no se debe descuidar a du. Por ejemplo,

$$\int (4x+1)^2\,dx \neq \frac{(4x+1)^3}{3} + C$$

La forma correcta de resolver este problema es la siguiente. Sea $u = 4x + 1$, a partir de lo cual se deduce que $du = 4\,dx$. Así, $dx = \dfrac{du}{4}$ y

$$\int (4x+1)^2\,dx = \int u^2\left[\frac{du}{4}\right] = \frac{1}{4}\int u^2\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x+1)^3}{12} + C$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

a. Encuentre $\displaystyle\int \sqrt[3]{6y}\,dy$.

Solución: El integrando es $(6y)^{1/3}$, una potencia de una función. Sin embargo, en este caso la sustitución obvia $u = 6y$ puede evitarse. De manera más simple, se tiene

$$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int 6^{1/3}y^{1/3}\,dy = \sqrt[3]{6}\int y^{1/3}\,dy = \sqrt[3]{6}\frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{6}}{4}y^{4/3} + C$$

b. Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}\,dx$.

Solución: Esto se puede escribir como $\int (x^4+3x^2+7)^{-4}(2x^3+3x)\,dx$. Se tratará de utilizar la regla de la potencia para integración. Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces la cantidad $(2x^3 + 3x)\,dx$ en la integral. Así, $(2x^3 + 3x)\,dx = \dfrac{du}{2}$ y de nuevo se ilustra la técnica de *ajuste*:

$$\int (x^4+3x^2+7)^{-4}[(2x^3+3x)\,dx] = \int u^{-4}\left[\frac{du}{2}\right] = \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C = -\frac{1}{6(x^4+3x^2+7)^3} + C$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Al utilizar la regla de la potencia para integración, tenga cuidado cuando haga su elección de u. En el ejemplo 3(b), no puede adelantar mucho si elige $u = 2x^3 + 3x$. En ocasiones puede ser necesario que elija muchas opciones diferentes. A veces una elección equivocada puede dar una sugerencia de algo que puede funcionar. **El dominio de la integración solo se alcanza después de muchas horas de práctica y estudio concienzudo**.

EJEMPLO 4 Una integral a la que no se le aplica la regla de la potencia

Encuentre $\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx$.

Solución: Si se establece $u = x^4 + 1$, entonces $du = 4x^3\,dx$. Para obtener du en la integral, se necesita un factor adicional de la *variable* x. Sin embargo, solo se pueden ajustar factores **constantes**. Así, no es posible utilizar la regla de la potencia. En lugar de eso, para encontrar la integral, primero se debe desarrollar $(x^4 + 1)^2$:

$$\begin{aligned}\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx &= 4\int x^2(x^8 + 2x^4 + 1)\,dx\\ &= 4\int (x^{10} + 2x^6 + x^2)\,dx\\ &= 4\left(\frac{x^{11}}{11} + \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3}\right) + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 67 ◁

Integración de funciones exponenciales naturales

Ahora se prestará atención a la integración de funciones exponenciales. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

¡ADVERTENCIA!

No aplique la fórmula de la regla de la potencia para $\int u^a\,du$ a $\int e^u\,du$.

La fórmula de integración correspondiente a esta fórmula de diferenciación es

$$\int e^u\frac{du}{dx}\,dx = e^u + C$$

Pero $\frac{du}{dx}\,dx$ es la diferencial de u, es decir, du. Así,

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C} \qquad (2)$$

APLÍQUELO ▶

8. Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, su temperatura T cambia a una razón dada por $\frac{dT}{dt} = kCe^{kt}$, donde t es el tiempo (en horas) después de haber cambiado de entorno, C es la diferencia de temperaturas (original menos nueva) entre los entornos y k es una constante. Si el entorno original tiene una temperatura de 70°, el nuevo una de 60° y $k = -0.5$, encuentre la forma general de $T(t)$.

EJEMPLO 5 Integrales que incluyen funciones exponenciales

a. Encuentre $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

Solución: Sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$ y, por la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2}\,dx &= \int e^{x^2}[2x\,dx] = \int e^u\,du\\ &= e^u + C = e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b. Encuentre $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\,dx$.

Solución: Si $u = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2+3)dx = 3(x^2+1)\,dx$. Si el integrando tuviese un factor de 3, la integral tendría la forma $\int e^u\,du$. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\,dx &= \int e^{x^3+3x}[(x^2+1)\,dx]\\ &= \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C\\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C\end{aligned}$$

donde se reemplazó $(x^2+1)\,dx$ en el segundo paso por $\frac{1}{3}du$ pero se escribió $\frac{1}{3}$ fuera de la integral.

Ahora resuelva el problema 41 ◁

Integrales que incluyen funciones logarítmicas

Como usted sabe, la fórmula de la potencia $\int u^a\,du = u^{a+1}/(a+1) + C$ no se aplica cuando $a = -1$. Para manejar esa situación, a saber, $\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du$, primero se debe recordar de la sección 8.1 que

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0$$

que proporciona la fórmula de integración

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \quad \text{para } u \neq 0 \tag{3}$$

En particular, si $u = x$, entonces $du = dx$, y

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{para } x \neq 0 \tag{4}$$

APLÍQUELO ▶

9. Si la tasa de memorización de vocabulario de una lengua extranjera para un estudiante promedio está dada por $\frac{dv}{dt} = \frac{35}{t+1}$, donde v es el número de palabras del vocabulario memorizadas en t horas de estudio, determine la forma general de $v(t)$.

EJEMPLO 6 Integrales que incluyen a $\frac{1}{u}\,du$

a. Encuentre $\int \frac{7}{x}\,dx$.

Solución: De la ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln|x| + C$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir esta respuesta en otra forma:

$$\int \frac{7}{x}\,dx = \ln|x^7| + C$$

b. Encuentre $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$.

Solución: Sea $u = x^2 + 5$. Entonces $du = 2x\,dx$. De la ecuación (3),

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+5}[2x\,dx] = \int \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u| + C = \ln|x^2+5| + C\end{aligned}$$

Como $x^2 + 5$ siempre es positiva, es posible omitir las barras de valor absoluto:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C$$

Ahora resuelva el problema 31 ◁

EJEMPLO 7 Una integral que incluye $\frac{1}{u}\,du$

Encuentre $\displaystyle\int \frac{(2x^3 + 3x)\,dx}{x^4 + 3x^2 + 7}$.

Solución: Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces el numerador, de modo que $(2x^3 + 3x)dx = \frac{du}{2}$. Para aplicar la ecuación (3), se escribe

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + 3x^2 + 7}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^4 + 3x^2 + 7| + C \qquad \text{Reescriba } u \text{ en términos de } x. \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^4 + 3x^2 + 7) + C \qquad x^4 + 3x^2 + 7 > 0 \quad \text{para toda } x
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 51 ◁

EJEMPLO 8 Una integral que incluye dos formas

Encuentre $\displaystyle\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw &= \int (1-w)^{-2}dw + \int \frac{1}{w-1}dw \\
&= -1\int (1-w)^{-2}[-dw] + \int \frac{1}{w-1}dw
\end{aligned}$$

La primera integral tiene la forma $\int u^{-2}\,du$ y la segunda tiene la forma $\displaystyle\int \frac{1}{v}\,dv$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw &= -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + \ln|w-1| + C \\
&= \frac{1}{1-w} + \ln|w-1| + C
\end{aligned}$$

◁

PROBLEMAS 10.4

En los problemas del 1 al 80, encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int (x+5)^7\,dx$

2. $\int 15(x+2)^4\,dx$

3. $\int 2x(x^2+3)^5\,dx$

4. $\int (4x+3)(2x^2+3x+1)\,dx$

5. $\int (3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3}\,dy$

6. $\int (15t^2-6t+1)(5t^3-3t^2+t)^{17}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{5}{(3x-1)^3}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{4x}{(2x^2-7)^{10}}\,dx$

9. $\int \sqrt{7x+3}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,dx$

11. $\int (7x-6)^4\,dx$

12. $\int x^2(3x^3+7)^3\,dx$

13. $\int u(5u^2-9)^{14}\,du$

14. $\int x\sqrt{3+5x^2}\,dx$

15. $\int 4x^4(27+x^5)^{1/3}\,dx$

16. $\int (4-5x)^9\,dx$

17. $\int 3e^{3x}\,dx$

18. $\int 5e^{3t+7}\,dt$

19. $\int (3t+1)e^{3t^2+2t+1}\,dt$

20. $\int -3w^2e^{-w^3}\,dw$

21. $\int xe^{7x^2}\,dx$

22. $\int x^3e^{4x^4}\,dx$

23. $\int 4e^{-3x}\,dx$

24. $\int 24x^5e^{-2x^6+7}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{12x^2+4x+2}{x+x^2+2x^3}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x^3}{x^3+x^4}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{6x^2-6x}{1-3x^2+2x^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{8z}{(z^2-5)^7}\,dz$

30. $\displaystyle\int \frac{3}{(5v-1)^4}\,dv$

31. $\int \frac{4}{x}\,dx$

32. $\int \frac{3}{1+2y}\,dy$

33. $\int \frac{s^2}{s^3+5}\,ds$

34. $\int \frac{32x^3}{4x^4+9}\,dx$

35. $\int \frac{5}{4-2x}\,dx$

36. $\int \frac{7t}{5t^2-6}\,dt$

37. $\int \sqrt{5x}\,dx$

38. $\int \frac{1}{(3x)^6}\,dx$

39. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx$

40. $\int \frac{9}{1-3x}\,dx$

41. $\int 2y^3e^{y^4+1}\,dy$

42. $\int 2\sqrt{2x-1}\,dx$

43. $\int v^2e^{-2v^3+1}\,dv$

44. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+3x}}\,dx$

45. $\int (e^{-5x}+2e^x)\,dx$

46. $\int 4\sqrt[3]{y+1}\,dy$

47. $\int (8x+10)(7-2x^2-5x)^3\,dx$

48. $\int 2ye^{3y^2}\,dy$

49. $\int \frac{6x^2+8}{x^3+4x}\,dx$

50. $\int (e^x+2e^{-3x}-e^{5x})\,dx$

51. $\int \frac{16s-4}{3-2s+4s^2}\,ds$

52. $\int (6t^2+4t)(t^3+t^2+1)^6\,dt$

53. $\int x(2x^2+1)^{-1}\,dx$

54. $\int (45w^4+18w^2+12)(3w^5+2w^3+4)^{-4}\,dw$

55. $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\,dx$

56. $\int \frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2}\,dv$

57. $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)\,dx$

58. $\int (e^{3.1})^2\,dx$

59. $\int \frac{9+18x}{(5-x-x^2)^4}\,dx$

60. $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx$

61. $\int x(2x+1)e^{4x^3+3x^2-4}\,dx$

62. $\int (u^3-ue^{6-3u^2})\,du$

63. $\int x\sqrt{(8-5x^2)^3}\,dx$

64. $\int e^{ax}\,dx$

65. $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$

66. $\int 3\frac{x^4}{e^{x^5}}\,dx$

67. $\int (x^2+1)^2\,dx$

68. $\int \left[x(x^2-16)^2-\frac{1}{2x+5}\right]dx$

69. $\int \left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$

70. $\int \left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

71. $\int \left[\frac{2}{4x+1}-(4x^2-8x^5)(x^3-x^6)^{-8}\right]dx$

72. $\int (r^3+5)^2\,dr$

73. $\int \left[\sqrt{3x+1}-\frac{x}{x^2+3}\right]dx$

74. $\int \left(\frac{x}{7x^2+2}-\frac{x^2}{(x^3+2)^4}\right)dx$

75. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

76. $\int (e^5-3^e)\,dx$

77. $\int \frac{1+e^{2x}}{4e^x}\,dx$

78. $\int \frac{2}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t}+9}\,dt$

79. $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x}\ln(2x^2+3x)dx$

80. $\int \sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{8x^4}}\,dx$

En los problemas del 81 al 84, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

81. $y'=(3-2x)^2;\quad y(0)=1$

82. $y'=\frac{x}{x^2+6};\quad y(1)=0$

83. $y''=\frac{1}{x^2};\quad y'(-2)=3, y(1)=2$

84. $y''=(x+1)^{1/2};\quad y'(8)=19, y(24)=\frac{2572}{3}$

85. Bienes raíces La tasa de cambio del valor de una casa cuya construcción costó \$350 000 puede modelarse mediante $\frac{dV}{dt}=8e^{0.05t}$, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles) de la casa. Encuentre $V(t)$.

86. Esperanza de vida Si la tasa de cambio de la esperanza de vida l al nacer para las personas que nacen en Estados Unidos puede modelarse mediante $\frac{dl}{dt}=\frac{12}{2t+50}$, donde t es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida era de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

87. Oxígeno en los vasos capilares En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares,[5] se usan cilindros concéntricos de radio r como modelos de un vaso capilar. La concentración C de oxígeno en el capilar está dada por

$$C=\int\left(\frac{Rr}{2K}+\frac{B_1}{r}\right)dr$$

donde R es la razón constante con la que el oxígeno se difunde en el vaso capilar y K y B_1 son constantes. Encuentre C. (Escriba la constante de integración como B_2).

88. Encuentre $f(2)$ si $f\left(\frac{1}{3}\right)=2$ y $f'(x)=e^{3x+2}-3x$.

Objetivo

Analizar técnicas para el manejo de problemas de integración más complejos, a saber, por manipulación algebraica y por ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a e y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

10.5 Técnicas de integración

Ahora se considerará la resolución de problemas de integración más difíciles.

Cuando se deben integrar fracciones, a veces es necesario realizar una división preliminar para obtener formas de integración familiares, como lo muestra el ejemplo siguiente.

---

[5] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press. Inc., 1972).

EJEMPLO 1 División preliminar antes de la integración

a. Encuentre $\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx$.

Solución: En este caso, no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, es posible descomponer el integrando en dos fracciones al dividir cada término del numerador entre el denominador. Entonces se tiene

Aquí, el integrando se divide.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}\right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

b. Encuentre $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx$.

Solución: Aquí el integrando es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador. En tal caso, primero se usa la división larga. Recuerde que si f y g son polinomios, con el grado de f mayor o igual al grado de g, entonces la división larga permite encontrar (solamente) los polinomios q y r, donde r es el polinomio cero o bien el grado de r es estrictamente menor que el grado de g, lo que satisface

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Al utilizar una notación abreviada obvia, se ve que

$$\int \frac{f}{g} = \int \left(q + \frac{r}{g}\right) = \int q + \int \frac{r}{g}$$

Como la integración de un polinomio es fácil, se observa que la integración de funciones racionales se reduce a la tarea de integrar *funciones racionales propias* —aquellas para las que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador—. En este caso se obtiene

Aquí se usó la división larga para reescribir el integrando.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x + 1}\, d(2x + 1)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

a. Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)^3}\, dx$.

Solución: Esta integral puede escribirse como $\int \frac{(\sqrt{x} - 2)^{-3}}{\sqrt{x}}\, dx$. Considere la regla de la potencia para la integración con $u = \sqrt{x} - 2$. Entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, de manera que $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, du$ y

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que pueda aplicarse la regla de la potencia para la integración.

$$\int \frac{(\sqrt{x} - 2)^{-3}}{\sqrt{x}}\, dx = \int (\sqrt{x} - 2)^{-3}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= 2\int u^{-3}\, du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{(\sqrt{x} - 2)^2} + C$$

b. Encuentre $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$.

Solución: Si $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$, y

Aquí la integral se ajusta a la forma conocida $\int \frac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

c. Encuentre $\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw$.

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que se pueda aplicar la regla de la potencia para la integración.

Solución: Si $u = \ln w$, entonces $du = \frac{1}{w}dw$. Al aplicar la regla de la potencia para la integración, se tiene

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left[\frac{1}{w}dw\right]$$
$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5 \cdot \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C$$

Ahora resuelva el problema 23 ◁

Integración de b^u

En la sección 10.4, se integró una función exponencial con base e:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Ahora se considerará la integral de una función exponencial con una base arbitraria b:

$$\int b^u\,du$$

Para encontrar esta integral, primero se convierte a la base e usando

$$b^u = e^{(\ln b)u} \qquad \textbf{(1)}$$

(tal como ya se hizo en muchos ejemplos de diferenciación). El ejemplo 3 ilustrará este procedimiento.

EJEMPLO 3 Una integral que incluye b^u

Encuentre $\int 2^{3-x}\,dx$.

Solución:

Estrategia Se desea integrar una función exponencial con base 2. Para hacerlo, primero se convierte de base 2 a base e usando la ecuación (1).

$$\int 2^{3-x}\,dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx$$

El integrando de la segunda integral tiene la forma e^u, donde $u = (\ln 2)(3 - x)$. Como $du = -\ln 2\,dx$, se puede despejar dx y escribir

$$\int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}\int e^u\,du$$
$$= -\frac{1}{\ln 2}e^u + C = -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C$$

Así,

$$\int 2^{3-x}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C$$

Note que la respuesta se expresó en términos de una función exponencial con base 2, que es la base del integrando original.

Ahora resuelva el problema 27 ◁

Generalizando el procedimiento descrito en el ejemplo 3, es posible obtener una fórmula para integrar b^u:

$$\begin{aligned}\int b^u du &= \int e^{(\ln b)u} du \\ &= \frac{1}{\ln b}\int e^{(\ln b)u}\, d((\ln b)u) \qquad \text{ln } b \text{ es una constante} \\ &= \frac{1}{\ln b}e^{(\ln b)u} + C \\ &= \frac{1}{\ln b}b^u + C\end{aligned}$$

De aquí, se tiene

$$\boxed{\int b^u du = \frac{1}{\ln b}b^u + C}$$

Al aplicar esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\begin{aligned}&\int 2^{3-x}\,dx \qquad && b = 2, u = 3 - x \\ &= -\int 2^{3-x}\,d(3-x) && -d(3-x) = dx \\ &= -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C\end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Aplicación de la integración

Ahora se considerará una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo

Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$$

donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en grandes denominaciones de dinero. Determine la función de consumo para el país si es sabido que el consumo es de 10 ($C = 10$) cuando $I = 12$.

Solución: Como la propensión marginal al consumo es la derivada de C, se tiene

$$C = C(I) = \int\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right)dI = \int\frac{3}{4}dI - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI$$

Si hacemos $u = 3I$, entonces $du = 3dI = d(3I)$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2}\, d(3I)$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + K$$

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + K$$

Este es un ejemplo de un problema con valor inicial.

Cuando $I = 12$, $C = 10$, por lo que

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + K$$

$$10 = 9 - 2 + K$$

Así, $K = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3$$

Ahora resuelva el problema 61 ◁

PROBLEMAS 10.5

En los problemas del 1 al 56, determine las integrales indefinidas.

1. $\int \frac{2x^6 + 8x^4 - 4x}{2x^2}\, dx$

2. $\int \frac{9x^2 + 5}{3x}\, dx$

3. $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\, dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}\, dx$

5. $\int \frac{3}{\sqrt{4 - 5x}}\, dx$

6. $\int \frac{2xe^{x^2}\, dx}{e^{x^2} - 2}$

7. $\int 4^{7x}\, dx$

8. $\int 5^t\, dt$

9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\, dx$

10. $\int \frac{e^x + 1}{e^x}\, dx$

11. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\, dx$

12. $\int \frac{(3x + 2)(x - 4)}{x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{5e^{2x}}{7e^{2x} + 4}\, dx$

14. $\int 6(e^{4-3x})^2\, dx$

15. $\int \frac{5e^{13/x}}{x^2}\, dx$

16. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\, dx$

17. $\int \frac{5x^3}{x^2 + 9}\, dx$

18. $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x}\, dx$

19. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\, dx$

20. $\int \frac{5e^s}{1 + 3e^s}\, ds$

21. $\int \frac{5(x^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

22. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

23. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

24. $\int \sqrt{t}(3 - t\sqrt{t})^{0.6}\, dt$

25. $\int \frac{r\sqrt{\ln(r^2 + 1)}}{r^2 + 1}\, dr$

26. $\int \frac{9x^5 - 6x^4 - ex^3}{7x^2}\, dx$

27. $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\, dx$

28. $\int \frac{4}{x\ln(2x^2)}\, dx$

29. $\int x^2\sqrt{e^{x^3+1}}\, dx$

30. $\int \frac{ax + b}{cx + d}\, dx \quad c \neq 0$

31. $\int \frac{8}{(x + 3)\ln(x + 3)}\, dx$

32. $\int (e^{e^2} + x^e - 2x)\, dx$

33. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 - 3}\, dx$

34. $\int \frac{4x\ln\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}\, dx$

35. $\int \frac{12x^3\sqrt{\ln(x^4 + 1)^3}}{x^4 + 1}\, dx$

36. $\int 3(x^2 + 2)^{-1/2}xe^{\sqrt{x^2+2}}\, dx$

37. $\int \left(\frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^4 - 4x}} - \ln 7\right) dx$

38. $\int \frac{x - x^{-2}}{x^2 + 2x^{-1}}\, dx$

39. $\int \frac{2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4}{x^3}\, dx$

40. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

41. $\int \frac{x}{x + 1}\, dx$

42. $\int \frac{2x}{(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)}\, dx$

43. $\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 2}}\, dx$

44. $\int \frac{5}{(3x + 1)[1 + \ln(3x + 1)]^2}\, dx$

45. $\int \frac{(e^{-x} + 5)^3}{e^x}\, dx$

46. $\int \left[\frac{1}{8x + 1} - \frac{1}{e^x(8 + e^{-x})^2}\right] dx$

47. $\int (x^3 + ex)\sqrt{x^2 + e}\, dx$

48. $\int 3^{x\ln x}(1 + \ln x)\, dx \quad$ [*Sugerencia:* $\frac{d}{dx}(x\ln x) = 1 + \ln x$]

49. $\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2} + 3}\, dx$

50. $\int \frac{7}{x(\ln x)^\pi}\, dx$

51. $\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\, ds$

52. $\int \frac{\ln^3 x}{3x}\, dx$

53. $\int e^{\ln(x^2+1)}\, dx$

54. $\int dx$

55. $\displaystyle\int \frac{\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)}{x}\,dx$

56. $\displaystyle\int e^{f(x)+\ln(f'(x))}\,dx$ se supone que $f' > 0$

En los problemas 57 y 58, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

57. $\dfrac{dr}{dq} = \dfrac{200}{(q+2)^2}$

58. $\dfrac{dr}{dq} = \dfrac{900}{(2q+3)^3}$

En los problemas 59 y 60, dc/dq es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total si en cada caso los costos fijos son de 2000.

59. $\dfrac{dc}{dq} = \dfrac{20}{q+5}$

60. $\dfrac{dc}{dq} = 4e^{0.005q}$

En los problemas del 61 al 63, dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.

61. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{1}{\sqrt{I}}$; $\quad C(9) = 8$

62. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2I}}$; $\quad C(2) = \dfrac{3}{4}$

63. $\dfrac{dC}{dI} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{6\sqrt{I}}$; $\quad C(25) = 23$

64. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10}$$

donde c es el costo total cuando se producen q unidades. Si se producen 100 unidades, el costo promedio es de \$50 por unidad. Al entero más cercano, determine el costo fijo del fabricante.

65. Función de costo Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 3998q + 60}{q^2 - 40q + 1}$$

donde c es el costo total cuando se producen q unidades.

(a) Determine el costo marginal cuando se producen 40 unidades.
(b) Si los costos fijos son de \$10 000, encuentre el costo total de producir 40 unidades.
(c) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (b) para aproximar el costo total de producir 42 unidades.

66. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4} + 4}$$

donde c es el costo total cuando se producen q unidades. Los costos fijos son de \$360.

(a) Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.
(b) Encuentre el costo total de producir 25 unidades.
(c) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (b) para estimar el costo total de producir 23 unidades.

67. Valor de la tierra Se estima que en t años, contados a partir de ahora, el valor V de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, estará creciendo a una tasa de $\dfrac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$ dólares por año. Si el valor actual de la tierra es de \$500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al entero más cercano.

68. Función de ingreso La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante tiene la forma

$$\frac{dr}{dq} = \frac{a}{e^q + b}$$

para las constantes a y b, donde r es el ingreso total recibido cuando se producen y venden q unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma $p = f(q)$. (*Sugerencia*: Reescriba dr/dq al multiplicar tanto el numerador como el denominador por e^{-q}).

69. Ahorro La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I+2)^2}$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y se miden en miles de millones. Si el consumo total nacional es de \$7.5 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$8 mil millones, ¿para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a 0?

70. Función de consumo La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{2}{5} - \frac{1.6}{\sqrt[3]{2I^2}}$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y se miden en miles de millones.

(a) Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de \$16 mil millones.
(b) Determine la función de consumo si el ahorro es de \$10 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$54 mil millones.
(c) Use el resultado del inciso (b) para mostrar que el consumo es de $\$\frac{82}{5} = 16.4$ mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$16 mil millones (una situación de déficit).
(d) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (c) para aproximar el consumo cuando el ingreso total nacional es de \$18 mil millones.

10.6 Integral definida

Objetivo

Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas mediante el proceso de límite.

En la figura 10.2 se muestra la región R limitada por las líneas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = 1$. La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si b y h son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, a partir de la geometría, el área del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidad cuadrada. (De aquí en adelante, se tratarán las áreas como números puros y se escribirá *unidades cuadradas* solo cuando sea necesario para hacer énfasis en ello). Ahora se encontrará esta área mediante otro método, el cual, como se verá más adelante, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

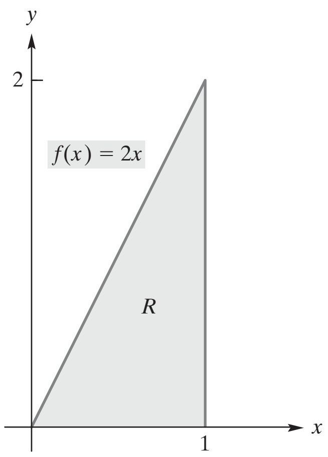


FIGURA 10.2 Región acotada por $f(x) = 2x$, $y = 0$ y $x = 1$.

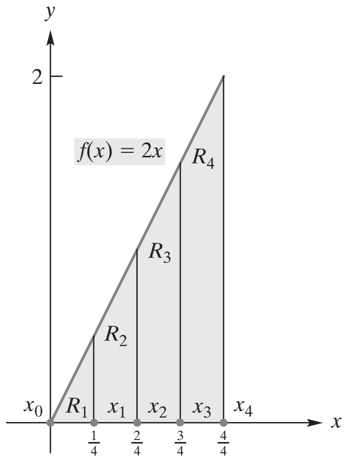


FIGURA 10.3 Cuatro subregiones de R.

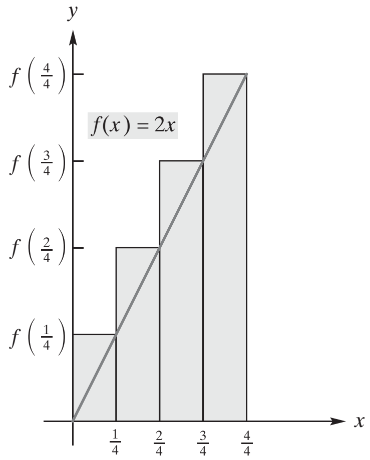


FIGURA 10.4 Cuatro rectángulos circunscritos.

Se dividirá el intervalo [0, 1] localizado sobre el eje x en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$. (Vea la figura 10.3). Cada subintervalo tiene longitud de $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de R: R_1, R_2, R_3 y R_4, como se indica.

Con cada subregión se puede asociar un rectángulo *circunscrito* (figura 10.4) —esto es, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en cada subintervalo—. Como f es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el extremo derecho del subintervalo. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$ (se lee como "S barra superior sub 4" o "la cuarta suma superior"), aproxima el área A del triángulo. Se tiene

$$\begin{aligned}\overline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{3}{4}\right) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{4}{4}\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(2\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2\left(\tfrac{2}{4}\right) + 2\left(\tfrac{3}{4}\right) + 2\left(\tfrac{4}{4}\right)\right) = \tfrac{5}{4}\end{aligned}$$

Usted puede verificar que $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ sea mayor que el área real del triángulo era de esperarse, puesto que $\overline{S}_4$ incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo. (Vea la figura 10.4).

Por otra parte, con cada subregión también se puede asociar un rectángulo *inscrito* (figura 10.5) —esto es, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo—. Como f es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurrirá cuando x sea el extremo izquierdo del subintervalo. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, denotada por $\underline{S}_4$ (se lee "S barra inferior sub 4" o "la cuarta suma inferior"), también es una aproximación al área A del triángulo. Se tiene

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4}f\left(\tfrac{3}{4}\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(2(0) + 2\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2\left(\tfrac{2}{4}\right) + 2\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) = \tfrac{3}{4}\end{aligned}$$

Usando la notación sigma, se puede escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Observe que $\underline{S}_4$ es menor que el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 10.5.

Como

$$\frac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \frac{5}{4}$$

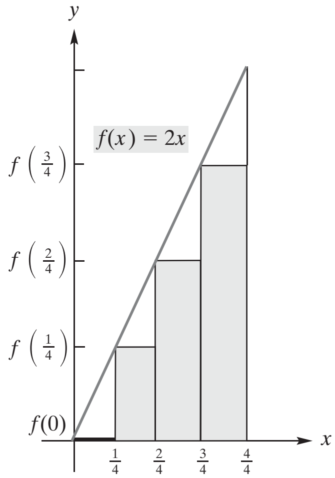


FIGURA 10.5 Cuatro rectángulos inscritos.

se dice que $\underline{S}_4$ es una aproximación a A desde *abajo* y $\overline{S}_4$ es una aproximación a A desde *arriba*.

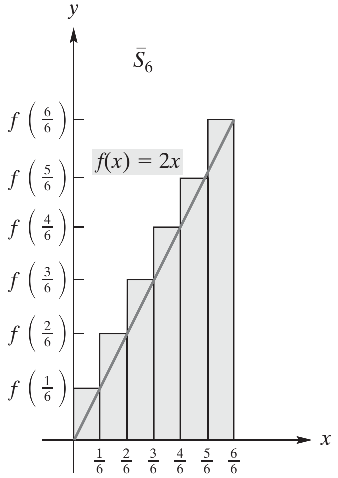


FIGURA 10.6 Seis rectángulos circunscritos.

Si [0, 1] se divide en más subintervalos, se espera que ocurran mejores aproximaciones a A. Para probar esto, se usarán seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. Entonces $\overline{S}_6$, el área total de seis rectángulos circunscritos (vea la figura 10.6), y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos inscritos (vea la figura 10.7), son

$$\begin{aligned}\overline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{3}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{4}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{5}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{6}{6}\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\left(2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{2}{6}\right) + 2\left(\tfrac{3}{6}\right) + 2\left(\tfrac{4}{6}\right) + 2\left(\tfrac{5}{6}\right) + 2\left(\tfrac{6}{6}\right)\right) = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\underline{S}_6 &= \tfrac{1}{6}f(0) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{3}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{4}{6}\right) + \tfrac{1}{6}f\left(\tfrac{5}{6}\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\left(2(0) + 2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{2}{6}\right) + 2\left(\tfrac{3}{6}\right) + 2\left(\tfrac{4}{6}\right) + 2\left(\tfrac{5}{6}\right)\right) = \tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

Observe que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$, y, con la notación apropiada, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serán de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Es claro que usando seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

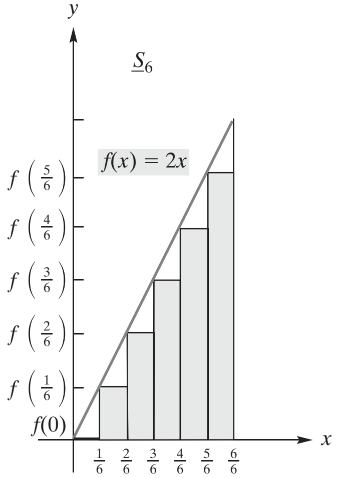


FIGURA 10.7 Seis rectángulos inscritos.

De manera más general, al dividir [0, 1] en n subintervalos de igual longitud Δx, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos extremos de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n$ y $n/n = 1$. (Vea la figura 10.8). Los extremos del k-ésimo subintervalo para $k = 1, \ldots, n$, son $(k-1)/n$ y k/n y el valor máximo de f ocurre en el extremo derecho k/n. De aquí se deduce que el área del k-ésimo rectángulo circunscrito es $1/n \cdot f(k/n) = 1/n \cdot 2(k/n) = 2k/n^2$, para $k = 1, \ldots, n$. El área total de n rectángulos *circunscritos* es

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} && \textbf{(1)}\\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k && \text{al factorizar } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término}\\ &= \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} && \text{de la sección 1.5}\\ &= \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

PARA REPASAR la notación sigma consulte la sección 1.5

(Se debe recordar que $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n$ es la suma de los n primeros enteros positivos y la fórmula que se acaba de usar se obtuvo en la sección 1.5 anticipando su aplicación aquí).

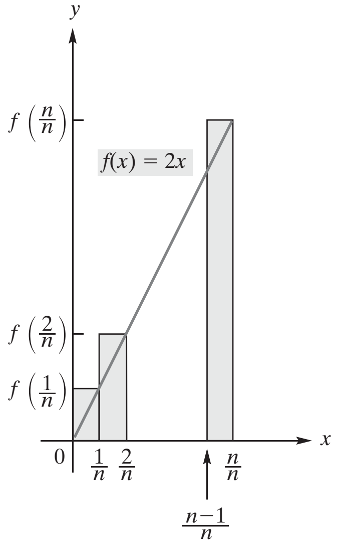


FIGURA 10.8 n rectángulos circunscritos.

Para rectángulos *inscritos*, se observa que el valor mínimo de f ocurre en el extremo izquierdo, $(k-1)/n$, de $[(k-1)/n, k/n]$, de manera que el área del k-ésimo rectángulo inscrito es $1/n \cdot f(k - 1/n) = 1/n \cdot 2((k-1)/n) = 2(k-1)/n^2$, para $k = 1, \ldots, n$. El área total determinada por *todos los n* rectángulos *inscritos* (vea la figura 10.9) es

$$\begin{aligned}\underline{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} f((k-1)/n)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(k-1)}{n^2} && \textbf{(2)}\\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k-1 && \text{factorizando } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término}\\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k && \text{ajustando la notación sigma}\\ &= \frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} && \text{adaptado de la sección 1.5}\\ &= \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

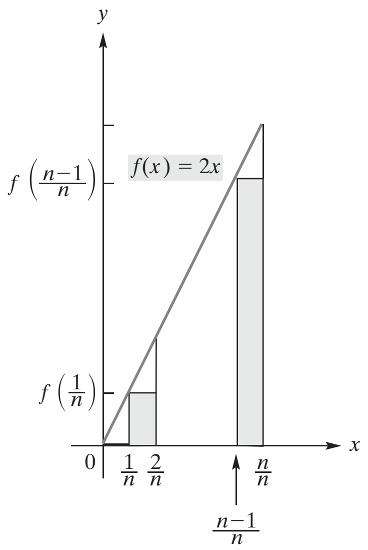


FIGURA 10.9 n rectángulos inscritos.

A partir de las ecuaciones (1) y (2), se observa nuevamente que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son sumas de la forma $\sum f(x)\Delta x$, a saber, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, parece razonable —y de hecho es cierto— que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n$$

Conforme n aumenta, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ resultan ser mejores aproximaciones para A. De hecho, se tomarán los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$, cuando n tienda a ∞ a través de valores enteros positivos:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Como $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, a saber,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1 \tag{3}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n$$

se deberá considerar este límite como el área del triángulo. Así, $A = 1$, lo cual concuerda con el valor obtenido anteriormente. Es importante entender que aquí se desarrolló una *definición de la noción de área* que es aplicable a muchas regiones diferentes.

Al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, es decir a 1, se le llama *integral definida* de $f(x) = 2x$ en el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$, y esta cantidad se denota al escribir

$$\int_0^1 2x\,dx = 1 \tag{4}$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4) será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo de integral $\int$ en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función f definida en el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$, donde $a < b$, se pueden formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo, respectivamente, localizados en cada uno de n subintervalos de igual longitud Δx.[6] Ahora se puede establecer lo siguiente:

Al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si existe, se le llama **integral definida** de f sobre $[a, b]$ y se escribe como

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Los números a y b se llaman **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo x se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando**.

En términos de un proceso de límites, se tiene

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Es necesario aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. De hecho, se puede pensar en el signo de integral como una "*S*" alargada, que es la primera letra de "suma". Segundo, para una función f arbitraria definida en un intervalo, se pueden calcular las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ y deter-

La integral definida es el límite de las sumas que tienen la forma $\sum f(x)\Delta x$. Esta definición será útil en secciones posteriores.

---

[6] Aquí se supone que los valores máximo y mínimo existen.

minar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos si $f(x)$ es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, **la integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área**.

Como se vio en la ecuación (3) $\text{lím}_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\text{lím}_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que se considerarán, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para ahorrar tiempo, se usará solo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones vistas en esta sección, esta suma se denotará como S_n.

APLÍQUELO ▶

10. Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal esta dada por $R'(x) = 600 - 0.5x$, donde R es el ingreso recibido cuando se venden x unidades. Encuentre el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades determinando el área acotada en el primer cuadrante por $y = R'(x) = 600 - 0.5x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 10$.

En general, en $[a, b]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de un área usando extremos derechos

Encuentre el área de la región ubicada en el primer cuadrante que está limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Solución: En la figura 10.10 se presenta el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía x es $[0, 2]$, el cual se subdividió en n subintervalos de igual longitud Δx. Como la longitud de $[0, 2]$ es 2, se toma $\Delta x = 2/n$. Los extremos de los subintervalos son $x = 0, 2/n, 2(2/n), \ldots, (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$, los que se muestran en la figura 10.11. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos usando el extremo derecho de cada subintervalo. El área del k-ésimo rectángulo para $k = 1, \ldots, n$, es el producto de su ancho, $(2/n)$, y su altura, $f(k(2/n)) = 4 - (2k/n)^2$, que es el valor de la función en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, se obtiene

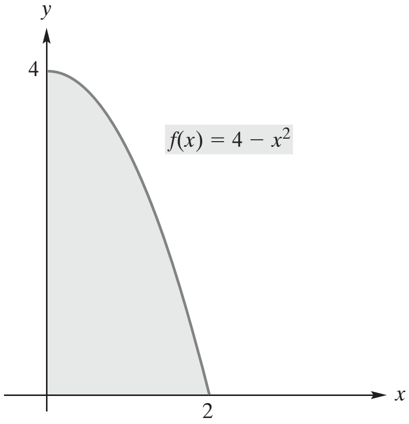


FIGURA 10.10 Región del ejemplo 1.

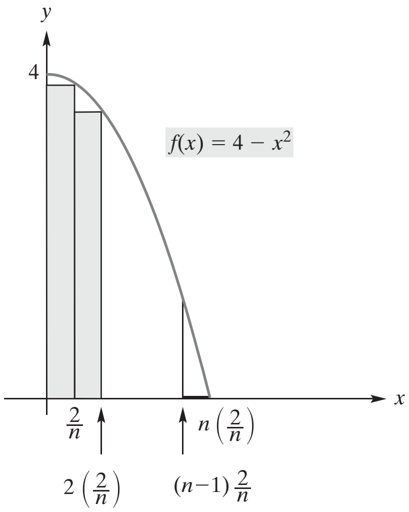


FIGURA 10.11 n subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \left(\frac{2}{n}\right)\right) \Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(4 - \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right) \frac{2}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8}{n} - \frac{8k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{8k^2}{n^3} = \frac{8}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{8}{n} n - \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

En la segunda línea de los cálculos anteriores se usan manipulaciones básicas de la notación sigma tal como se analizaron en la sección 1.5. En la tercera línea se utilizan dos fórmulas específicas de notación sigma, también de la sección 1.5: la suma de n copias de 1 es n y la suma de los primeros n cuadrados es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Por último, se considera el límite de S_n cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)\right) \\
&= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right) \\
&= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región es $\frac{16}{3}$.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida

Evalúe $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$.

Solución: Se desea encontrar la integral definida de $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo [0, 2]. Así, se debe calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pero este límite es precisamente el límite $\frac{16}{3}$ encontrado en el ejemplo 1, por lo tanto se concluye que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$$

No se anexan unidades a la respuesta porque una integral definida es simplemente un número.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

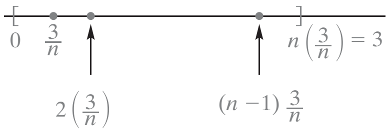


FIGURA 10.12 División de [0, 3] en n subintervalos.

EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo

Integre $f(x) = x - 5$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$; es decir, evalúe $\int_0^3 (x - 5)\, dx$.

Solución: Primero se divide [0, 3] en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $0, 3/n, 2(3/n), \ldots, (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$. (Vea la figura 10.12). Usando los extremos derechos se forma la suma y se simplifica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(k\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(k\frac{3}{n} - 5\right)\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{n^2}k - \frac{15}{n}\right) = \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{15}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{9}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{15}{n}(n)$$

$$= \frac{9}{2}\frac{n+1}{n} - 15 = \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 15$$

Al tomar el límite, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 15\right) = \frac{9}{2} - 15 = -\frac{21}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx = -\frac{21}{2}$$

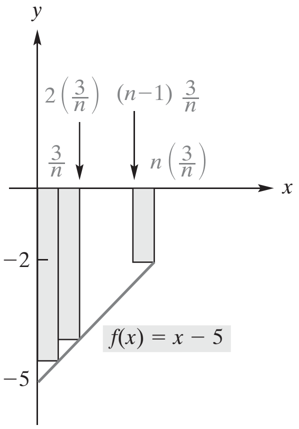


FIGURA 10.13 $f(x)$ es negativa en cada extremo derecho.

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara a partir de la gráfica de $f(x) = x - 5$ en el intervalo [0, 3]. (Vea la figura 10.13). Como el valor de $f(x)$ es negativo en cada extremo derecho, cada término incluido en S_n también debe ser negativo. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$, que es la integral definida, tiene valor negativo.

Geométricamente, cada término en S_n es el valor negativo del área de un rectángulo. (Vea de nuevo la figura 10.13). Aunque la integral definida es solo un número, aquí se puede interpretar como la representación del valor negativo del área de la región limitada por $f(x) = x - 5$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x $(y = 0)$.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

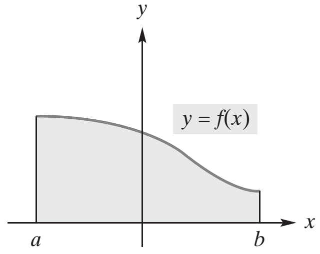


FIGURA 10.14 Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área bajo la curva.

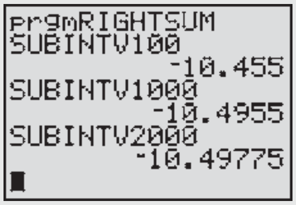
En el ejemplo 3, se demostró que la *integral definida no tiene que representar un área*. De hecho, ahí la integral definida fue negativa. Sin embargo, si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para todos los valores de n. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$, así que $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Además, esta integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. (Vea la figura 10.14).

Aunque el procedimiento que se usó para analizar la integral definida es suficiente para los fines de este libro, no es riguroso. **Solo es importante recordar que la integral definida es el límite de una suma especial**.

TECNOLOGÍA

Aquí se presenta un programa para la calculadora gráfica TI-83 Plus que estimará el límite de S_n cuando $n \to \infty$ para una función f definida en $[a, b]$.

```
PROGRAM:RIGHTSUM
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B – A)/N → H
0 → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y1 + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H*S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```



```
prgmRIGHTSUM
SUBINTV100
              -10.455
SUBINTV1000
             -10.4955
SUBINTV2000
            -10.49775
█
```

FIGURA 10.15 Valores de S_n para $f(x) = x - 5$ en [0, 3].

RIGHTSUM calculará S_n para un número dado n de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene $f(x)$, a y b como Y_1, A y B, respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá indicar el número de subintervalos. Después, el programa procederá a mostrar el valor de S_n. Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de S_n para diferentes números de subintervalos. En la figura 10.15 se muestran valores de $S_n (n = 100, 1000$ y $2000)$ para la función $f(x) = x - 5$ en el intervalo [0, 3]. Cuando $n \to \infty$, parece que $S_n \to -10.5$. Así, se estima que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \approx -10.5$$

De manera equivalente,

$$\int_0^3 (x-5)\,dx \approx -10.5$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 3.

Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora más antigua para calcular S_{200} en la figura 10.15 fue mayor de 1.5 minutos. El tiempo necesario para la TI-84 Plus es de menos de 1 minuto.

PROBLEMAS 10.6

En los problemas del 1 al 4, bosqueje la región del primer cuadrante que está limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

1. $f(x) = x + 1, y = 0, x = 0, x = 1; \quad S_4$

2. $f(x) = 3x, y = 0, x = 1; \quad S_5$

3. $f(x) = x^2, y = 0, x = 1; \quad S_4$

4. $f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1; \quad S_2$

En los problemas 5 y 6, divida el intervalo indicado en n subintervalos de igual longitud y encuentre S_n para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el $\lim_{n\to\infty} S_n$.

5. $f(x) = 4x; \quad [0, 1]$

6. $f(x) = 2x + 1; \quad [0, 2]$

En los problemas 7 y 8, (a) simplifique S_n y (b) encuentre $\lim_{n\to\infty} S_n$.

7. $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}+1\right)+\left(\frac{2}{n}+1\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n}+1\right)\right]$

8. $S_n = \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(n\cdot\frac{2}{n}\right)^2\right]$

En los problemas del 9 al 14, bosqueje la región del primer cuadrante que está limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de S_n cuando $n \to \infty$. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

9. Región descrita en el problema 1.

10. Región descrita en el problema 2.

11. Región descrita en el problema 3.

12. $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$

13. $f(x) = 3x^2, y = 0, x = 1$

14. $f(x) = 9 - x^2, y = 0, x = 0$

En los problemas del 15 al 20, evalúe la integral definida dada tomando el límite de S_n. Use el extremo derecho de cada subintervalo. Bosqueje la gráfica de la función que debe integrarse en el intervalo dado.

15. $\int_1^3 5x\,dx$

16. $\int_0^a b\,dx$

17. $\int_0^3 -4x\,dx$

18. $\int_1^4 (2x+1)\,dx$

19. $\int_0^1 (x^2+x)\,dx$

20. $\int_1^2 (x+2)\,dx$

21. Encuentre $\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\right)$ sin usar límites.

22. Encuentre $\int_0^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 5x - 10 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

23. Encuentre $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -1 + \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

*En los problemas del 24 al 26, use un programa como el **RIGHTSUM** para estimar el área de la región del primer cuadrante que está limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.*

24. $f(x) = x^3 + 1, y = 0, x = 2, x = 3.7$

25. $f(x) = 4 - \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 9$

26. $f(x) = \ln x, y = 0, x = 1, x = 2$

*En los problemas del 27 al 30, use un programa como el **RIGHTSUM** para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.*

27. $\int_{2}^{5} \frac{x+1}{x+2}\,dx$

28. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$

29. $\int_{-1}^{2} (4x^2 + x - 13)\,dx$

30. $\int_{1}^{2} \ln x\,dx$

10.7 Teorema fundamental del cálculo integral

Objetivo

Desarrollar informalmente el teorema fundamental del cálculo integral y utilizarlo para obtener integrales definidas.

Teorema fundamental

Hasta aquí, se han considerado por separado los procesos de límite de la derivada y de la integral definida. Ahora se reunirán esas ideas fundamentales para desarrollar la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, las integrales definidas se podrán evaluar en forma un tanto más eficiente.

En la figura 10.16 se muestra la gráfica de una función f. Suponga que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no cae debajo del eje x. Esto es, $f(x) \geq 0$. De la sección anterior, tenemos que el área de la región situada debajo de la gráfica y arriba del eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. A continuación se considerará otra manera de determinar esta área.

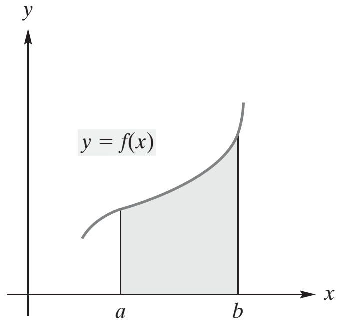


FIGURA 10.16 En $[a, b]$, f es continua y $f(x) \geq 0$.

Suponga que existe una función $A = A(x)$, a la cual se hará referencia como una función de área, que proporciona el área de la región ubicada debajo de la gráfica de f y arriba del eje x, desde a hasta x, donde $a \leq x \leq b$. Esta región aparece sombreada en la figura 10.17. No confunda $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en x.

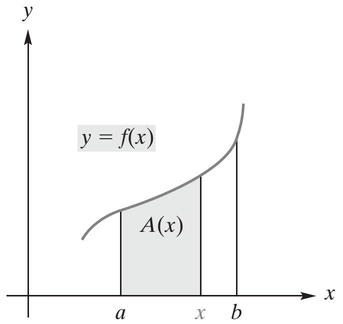


FIGURA 10.17 $A(x)$ es una función de área.

Con base en su definición, se pueden establecer inmediatamente dos propiedades de A:

1. $A(a) = 0$, puesto que no hay "área" desde a hasta a
2. $A(b)$ es el área desde a hasta b; esto es,

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si x se incrementa en h unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada en la figura 10.18. Por lo tanto, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas mostradas en las figuras 10.18 y 10.17, a saber, el área de la región sombreada en la figura 10.19. Para una h lo suficientemente cercana a 0, el área de la región es la misma que la de un rectángulo (figura 10.20) cuya base sea h y su altura algún valor $\bar{y}$ entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí $\bar{y}$ es una función de h. Así, por una parte, el área del rectángulo es $A(x + h) - A(x)$ y, por otra, es $h\bar{y}$, por lo que

$$A(x + h) - A(x) = h\bar{y}$$

De manera equivalente,

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \bar{y} \qquad \text{al dividir entre } h$$

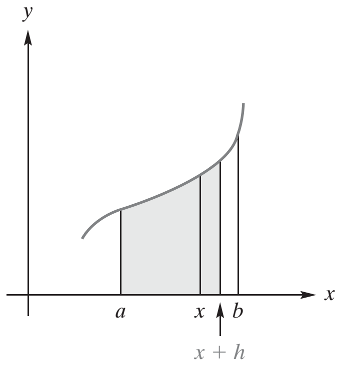


FIGURA 10.18 $A(x + h)$ proporciona el área de la región sombreada.

Como $\bar{y}$ está entre $f(x)$ y $f(x + h)$, se deduce que como $h \to 0$, $\bar{y}$ se aproxima al número $f(x)$, por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x) \qquad (1)$$

Pero el lado izquierdo es simplemente la derivada de A. Así, la ecuación (1) se convierte en

$$A'(x) = f(x)$$

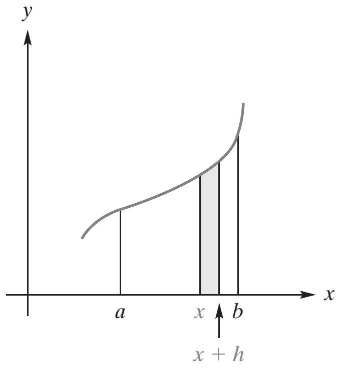


FIGURA 10.19 El área de la región sombreada es $A(x + h) - A(x)$.

Se concluye que la función de área A tiene la propiedad adicional de que su derivada A' es f. Esto es, A es una antiderivada de f. Ahora, suponga que F es *cualquier* antiderivada de f. Entonces, como A y F son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante C

$$A(x) = F(x) + C \tag{2}$$

Recuerde que $A(a) = 0$. Así, al evaluar ambos lados de la ecuación (2) para $x = a$ resulta

$$0 = F(a) + C$$

de manera que

$$C = -F(a)$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a) \tag{3}$$

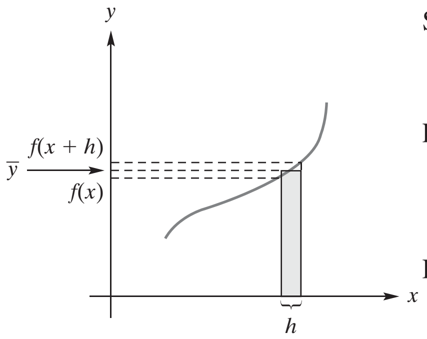


FIGURA 10.20 El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 10.19.

Si $x = b$, entonces, a partir de la ecuación (3),

$$A(b) = F(b) - F(a) \tag{4}$$

Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5), se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Una relación entre una integral definida y la antidiferenciación ahora se vuelve clara. Para encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$, basta encontrar una antiderivada de f, por ejemplo F, y restar el valor de F en el límite inferior a de su valor en el límite superior b. Aquí se supuso que f era continua y $f(x) \geq 0$ para poder usar el concepto de un área. Sin embargo, el resultado es cierto para cualquier función continua[7] y se conoce como *teorema fundamental del cálculo integral*.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La integral definida es un número y una integral indefinida es una función.

Es importante que se entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número** definido como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (la antiderivada más general de f), la cual es una **función** de x y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar este límite.

Suponga que se aplica el teorema fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí, $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Como una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, resulta que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}$$

---

[7] Si f es continua en $[a, b]$, puede demostrarse que $\int_a^b f(x)\,dx$ en efecto existe.

Esto confirma el resultado del ejemplo 2 de la sección 10.6. De haber seleccionado a $F(x)$ como $4x - (x^3/3) + C$, entonces se tendría

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3}$$

igual que antes. Como el valor seleccionado para C es irrelevante, por conveniencia, siempre se hará igual a 0, tal como se hizo originalmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Como en el teorema fundamental del cálculo F es *cualquier* antiderivada de f y $\int f(x)\,dx$ es la antiderivada más general de f, surge la notación para escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Bigg|_a^b$$

Usando la notación $\Big|_a^b$, se tiene

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

APLÍQUELO ▶

11. El ingreso de una cadena de comida rápida está aumentando a una tasa de $f(t) = 10\,000e^{0.02t}$, donde t está en años. Encuentre $\int_3^6 10\,000e^{0.02t}\,dt$, la cual proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

Encuentre $\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6)\,dx$.

Solución: Una antiderivada de $3x^2 - x + 6$ es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} &(3x^2 - x + 6)\,dx\\ &= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3}\\ &= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right]\\ &= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Propiedades de la integral definida

Para $\int_a^b f(x)\,dx$, se ha supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en que $a > b$ o $a = b$. Primero,

$$\text{Si } a > b, \quad \text{entonces} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\,dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

Si los límites de integración son iguales, se tiene

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Algunas propiedades de la integral definida ameritan ser mencionadas. La primera propiedad replantea más formalmente el comentario realizado en la sección anterior en relación con el área.

Propiedades de la integral definida

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, donde k es una constante

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas establecidas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse mediante el teorema fundamental en términos de una antiderivada. A continuación se incluyen dos propiedades más de las integrales definidas.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

La variable de integración es una "variable ficticia" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado; esto es, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt$$

5. Si f es continua en un intervalo I y a, b y c están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así,

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx$$

Ahora se verán ejemplos de integración definida y en la sección 10.9 se calcularán algunas áreas.

EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

Encuentre $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx$.

Solución: Para encontrar una antiderivada del integrando, aplicaremos la regla de la potencia para la integración:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx = \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}\,d(1 + x^4) = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1$$

¡ADVERTENCIA!

En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior 0 es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** suponga que una evaluación en el límite cero dará como resultado un 0.

$$= \frac{1}{2}(1+x^4)^{1/2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left((2)^{1/2}-(1)^{1/2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$$

Ahora resuelva el problema 13 ◁

EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

a. Encuentre $\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2+1)^3]\,dt$.

Solución:

$$\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2+1)^3]\,dt = 4\int_1^2 t^{1/3}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2+1)^3\,d(t^2+1)$$
$$= (4)\,\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2+1)^4}{4}\bigg|_1^2$$
$$= 3(2^{4/3}-1) + \frac{1}{8}(5^4-2^4)$$
$$= 3\cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8}$$
$$= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}$$

b. Encuentre $\int_0^1 e^{3t}\,dt$.

Solución:

$$\int_0^1 e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}\,d(3t)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3-e^0) = \frac{1}{3}(e^3-1)$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

Evalúe $\int_{-2}^1 x^3\,dx$.

Solución:

$$\int_{-2}^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

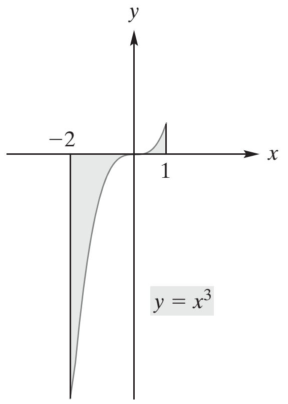


FIGURA 10.21 Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$.

La razón por la que el resultado es negativo es clara en la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. (Vea la figura 10.21). Para $-2 \le x < 0$, $f(x)$ es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, se deduce que $\int_{-2}^0 x^3\,dx$ no es solo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\,dx$ es el área de la región sombreada en el primer cuadrante, dado que $f(x) \ge 0$ en $[0, 1]$. La integral definida en todo el intervalo $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, ya que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^1 x^3\,dx = \int_{-2}^0 x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx$$

Así, $\int_{-2}^1 x^3\,dx$ no representa el área situada entre la curva y el eje x. Sin embargo, cuando se desea conocer el área, ésta puede darse como

$$\left|\int_{-2}^0 x^3\,dx\right| + \int_0^1 x^3\,dx$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

¡ADVERTENCIA!

Recuerde que $\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de una suma. En algunos casos este límite representa un área y en otros no. Cuando $f(x) \ge 0$ en $[a, b]$, la integral representa el área situada entre la gráfica de f y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$.

La integral definida de una derivada

Como una función f es una antiderivada de f', por el teorema fundamental se tiene

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{6}$$

Pero $f'(x)$ es la razón de cambio de f con respecto a x. De modo que si se conoce la razón de cambio de f y es necesario encontrar la diferencia entre los valores funcionales $f(b) - f(a)$, es suficiente para evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

APLÍQUELO ▶

12. Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (por año) para un complejo privado de departamentos está dada por $M'(x) = 90x^2 + 5000$, donde x es la edad del complejo de departamentos en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) del mantenimiento en x años. Encuentre el costo para los primeros cinco años.

EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores funcionales por medio de la integración definida

La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2$$

Si la producción actual es $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

Solución: La función de costo total es $c = c(q)$ y se desea encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$. La razón de cambio de c es dc/dq, entonces, por la ecuación (6),

$$\begin{aligned} c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)dq \\ &= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100} \\ &= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\ &= 3200 - 2080 = 1120 \end{aligned}$$

Si c es el valor monetario, entonces el costo por incrementar la producción de 80 a 100 unidades es de \$1120.

Ahora resuelva el problema 59 ◁

TECNOLOGÍA

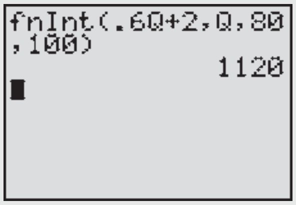
Muchas calculadoras gráficas tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83 Plus, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$$

se usa el comando "fnInt(", como se indica en la figura 10.22. Los cuatro parámetros que deben introducirse con este comando son:

función que será integrada	variable de integración	límite inferior	límite superior

Se observa que el valor de esta integral definida es aproximadamente de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.



```
fnInt(.6Q+2,Q,80
,100)
                1120
▮
```

FIGURA 10.22 Estimación de $\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx$$

se introduce

$$\text{fnInt}(X^3, X, -2, 1)$$

o, en forma alterna, si primero se almacena x^3 como Y_1, se puede introducir

$$\text{fnInt}(Y_1, X, -2, 1)$$

En cada caso se obtiene -3.75, lo cual concuerda con el resultado del ejemplo 4.

PROBLEMAS 10.7

En los problemas del 1 al 43, evalúe la integral definida.

1. $\int_0^3 5\,dx$

2. $\int_1^5 (e+3e)\,dx$

3. $\int_1^2 5x\,dx$

4. $\int_2^8 -5x\,dx$

5. $\int_{-3}^1 (2x-3)\,dx$

6. $\int_{-1}^1 (4-9y)\,dy$

7. $\int_1^4 (y^2+4y+4)\,dy$

8. $\int_4^1 (2t-3t^2)\,dt$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2-w-1)\,dw$

10. $\int_8^9 dt$

11. $\int_1^3 3t^{-3}\,dt$

12. $\int_2^3 \frac{3}{x^2}\,dx$

13. $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x^4}\,dx$

14. $\int_{1/2}^{3/2} (x^2+x+1)\,dx$

15. $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

16. $\int_9^{36} (\sqrt{x}-2)\,dx$

17. $\int_{-2}^2 (z+1)^4\,dz$

18. $\int_1^8 (x^{1/3}-x^{-1/3})\,dx$

19. $\int_0^1 2x^2(x^3-1)^3\,dx$

20. $\int_2^3 (x+2)^3\,dx$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy$

22. $\int_{-e^{\pi}}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$

23. $\int_0^1 e^5\,dx$

24. $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\,dx$

25. $\int_0^1 5x^2e^{x^3}\,dx$

26. $\int_0^1 (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^4\,dx$

27. $\int_3^4 \frac{3}{(x+3)^2}\,dx$

28. $\int_{-1/3}^{20/3} \sqrt{3x+5}\,dx$

29. $\int_{1/3}^2 \sqrt{10-3p}\,dp$

30. $\int_{-1}^1 q\sqrt{q^2+3}\,dq$

31. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3+1}\,dx$

32. $\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x-\frac{x}{(x^2+1)^{2/3}}\right) dx$

33. $\int_0^1 \frac{2x^3+x}{x^2+x^4+1}\,dx$

34. $\int_a^b (m+ny)\,dy$

35. $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx$

36. $\int_{-2}^1 8|x|\,dx$

37. $\int_e^{\sqrt{2}} 3(x^{-2}+x^{-3}-x^{-4})\,dx$

38. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx$

39. $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

40. $\int_1^{95} \frac{x}{\ln e^x}\,dx$

41. $\int_0^2 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx$

42. $\int_1^2 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ (*Sugerencia*: Multiplique el integrando por $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$).

43. $\int_0^2 f(x)\,dx$ donde $f(x)=\begin{cases} 4x^2 & \text{si } 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2}\le x\le 2 \end{cases}$

44. Evalúe $\left(\int_1^3 x\,dx\right)^3-\int_1^3 x^3\,dx.$

45. Suponga que $f(x)=\int_1^x 3\frac{1}{t^2}\,dt$. Evalúe $\int_e^1 f(x)\,dx.$

46. Evalúe $\int_7^7 e^{x^2}\,dx+\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3\sqrt{2}}\,dx.$

47. Si $\int_1^2 f(x)\,dx=5$ y $\int_3^1 f(x)\,dx=2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx.$

48. Si $\int_1^4 f(x)\,dx=6$, $\int_2^4 f(x)\,dx=5$ y $\int_1^3 f(x)\,dx=2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx.$

49. Evalúe $\int_2^3 \left(\frac{d}{dx}\int_2^3 e^{x^3}\,dx\right) dx.$

(*Sugerencia*: No es necesario determinar $\int_2^3 e^{x^3}\,dx$).

50. Suponga que $f(x)=\int_e^x \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,dt$, donde $x>e$. Encuentre $f'(x)$.

51. Índice de severidad En un análisis de la seguridad en el tráfico, Shonle[8] considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que presente lesiones serias. El *índice de severidad* se define como

$$\text{I.S.}=\int_0^T \alpha^{5/2}\,dt$$

donde α (letra griega “alfa”) se considera como una constante implicada en una aceleración media ponderada y T es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.

52. Estadística En estadística, la media μ (letra griega “mu”) de la función f de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo $[a, b]$, está dada por

$$\mu=\int_a^b xf(x)\,dx$$

y la varianza σ^2 (letra griega “sigma”) está dada por

$$\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2f(x)\,dx$$

Calcule μ y después σ^2 si $a=0$, $b=1$ y $f(x)=6(x-x^2)$.

53. Distribución de ingresos El economista Pareto[9] ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores que proporciona el número N de personas que reciben x o más dinero. Si

$$\frac{dN}{dx}=-Ax^{-B}$$

---

[8] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

[9] G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), p. 16.

donde A y B son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos de entre a y b, donde $a < b$.

54. Biología En un estudio sobre mutación genética[10] aparece la integral siguiente:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\,dx$$

Evalúe esta integral.

55. Flujo continuo de ingreso El valor presente de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\,dt$$

Evalúe el valor presente al entero más cercano.

56. Biología En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo hacia los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión entre dos compartimentos:[11]

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})d\tau$$

aquí, τ (se lee "tau") es una letra griega; a y b representan constantes.

57. Demografía Para cierta población pequeña, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral

$$\int_a^b l(t)\,dt$$

proporciona el número esperado de personas incluidas en la población que tiene exactamente entre a y b años, inclusive. Si

$$l(x) = 1000\sqrt{110 - x} \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 110$$

determine el número de personas que tienen exactamente entre 10 y 29 años, inclusive. Redondee su respuesta al entero más cercano, ya que una respuesta fraccionaria no tendría sentido. ¿Cuál es el tamaño de la población?

58. Consumo de mineral Si C es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces, bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo $[0, t]$ es

$$\int_0^t Ce^{k\tau}\,d\tau$$

donde k es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras, se ha determinado que $C = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral para estos datos.

59. Costo marginal La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8$$

Si c es el valor monetario, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

60. Costo marginal Repita el problema 59 si

$$\frac{dc}{dq} = 0.004q^2 - 0.5q + 50$$

y la producción aumenta de 90 a 180 unidades.

61. Ingreso marginal La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{2000}{\sqrt{300q}}$$

Si r es el valor monetario, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 500 a 800 unidades.

62. Ingreso marginal Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 100 + 50q - 3q^2$$

y la producción aumenta de 5 a 10 unidades.

63. Tasa delictiva Una socióloga está estudiando la tasa de delitos cometidos en cierta ciudad. Estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de delitos cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ delitos por mes. Determine el número total de delitos que puede esperarse para el próximo año. ¿Cuántos delitos puede esperarse que se cometan durante los últimos seis meses de ese año?

64. Altas de hospital Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4}$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta por día al final de t días. ¿Qué proporción habrá sido dada de alta al final de 700 días?

65. Producción Imagine un país unidimensional de longitud $2R$. (Vea la figura 10.23).[12] Suponga que en este país la producción de bienes está distribuida en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Evalúe G si $f(x) = i$, donde i es una constante.

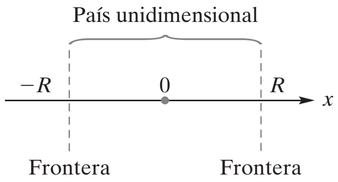


FIGURA 10.23

66. Exportaciones Para el país unidimensional del problema 65, bajo ciertas condiciones, la cantidad de exportaciones está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}]\,dx$$

donde i y k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E.

---

[10] W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

[11] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

[12] R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), pp. 385-404.

67. Precio promedio de entrega En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio[13] afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\displaystyle\int_0^R (m+x)[1-(m+x)]\,dx}{\displaystyle\int_0^R [1-(m+x)]\,dx}$$

donde m es el precio en la fábrica y x la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \dfrac{R}{2} - m^2 - mR - \dfrac{R^2}{3}}{1 - m - \dfrac{R}{2}}$$

Verifíquelo.

En los problemas del 68 al 70, use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.

68. $\displaystyle\int_{2.5}^{3.5} (1 + 2x + 3x^2)\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(4x+4)^2}\,dx$

70. $\displaystyle\int^1 e^{3t}\,dt$. Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas del 71 al 74, estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.

71. $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{x^2+1}{x^2+4}\,dx$

72. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x\ln x}\,dx$

73. $\displaystyle\int_0^3 2\sqrt{t^2+3}\,dt$

74. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{6\sqrt{q+1}}{q+3}\,dq$

Objetivo

Estimar el valor de una integral definida usando la regla del trapecio o la regla de Simpson.

10.8 Integración aproximada

Regla del trapecio

Cualquier función f construida con polinomios, exponenciales y logaritmos puede diferenciarse mediante el uso de operaciones y composiciones algebraicas y la función resultante f' de nuevo es del mismo tipo —una función que puede construirse a partir de polinomios, exponenciales y logaritmos usando operaciones y composiciones algebraicas—. Tales funciones pueden llamarse *elementales* (aunque el término tiene usualmente un significado un poco diferente). En esta terminología, la derivada de una función elemental también es elemental. La integración es más complicada. Si una función elemental f tiene a F como una antiderivada, F puede no ser elemental. Dicho de otra manera, incluso para una función f que luce muy simple, algunas veces resulta imposible encontrar $\int f(x)\,dx$ en términos de las funciones consideradas en este libro. Por ejemplo, no existe una función elemental cuya derivada sea e^{x^2}, de manera que no se puede esperar "hacer" la integral $\int e^{x^2}\,dx$.

Por otra parte, considere una función f que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es simplemente el *número* que proporciona el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Resulta insatisfactorio, y quizá impráctico, no decir nada acerca del número $\int_a^b f(x)\,dx$ por la incapacidad de "hacer" la integral $\int f(x)\,dx$. Esto se aplica también cuando la integral $\int f(x)\,dx$ es demasiado difícil para la persona que desea encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$.

Debido a que $\int_a^b f(x)\,dx$ se define como un límite de sumas de la forma $\sum f(x)\ \Delta x$, cualquier suma particular bien constituida en la forma $\sum f(x)\ \Delta x$ puede verse como una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$. Al menos para una f no negativa, tal suma puede verse como la suma de áreas de rectángulos delgados. Por ejemplo, considere la figura 10.11 de la sección 10.6, en la que se muestran dos rectángulos de manera explícita. Resulta claro que el error que surge de dichos rectángulos se asocia con el pequeño lado superior. El error podría reducirse al reemplazar los rectángulos con formas que tuvieran un lado superior más parecido a la forma de la curva. Se considerarán dos posibilidades: el uso de trapecios delgados en lugar de rectángulos, *regla del trapecio*, y el uso de regiones con lado superior en forma de arcos parabólicos, *regla de Simpson*. En cada caso, únicamente debe conocerse una cantidad finita de valores numéricos de $f(x)$ y los cálculos involucrados son especialmente adecuados para computadoras o calculadoras. En ambos casos se supondrá que f es continua sobre $[a, b]$.

Al desarrollar la regla del trapecio, por conveniencia se supondrá también que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, para poder pensar en términos de áreas. Básicamente, esta regla implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos de recta.

---

[13] S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equationilibria: A Reevaluation", *The Quartely Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), pp. 329-349.

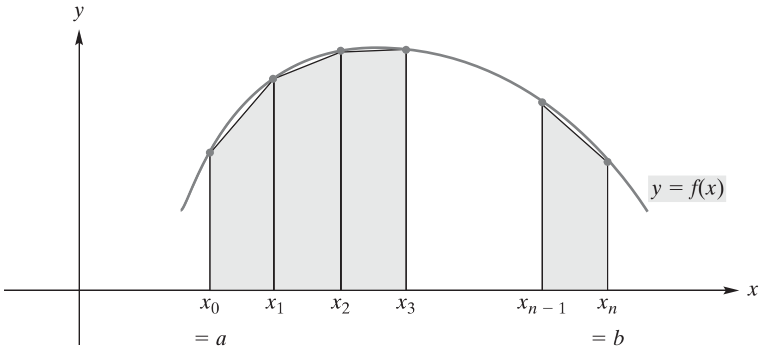


FIGURA 10.24 Aproximación de un área por medio de trapecios.

En la figura 10.24, el intervalo $[a, b]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ y $x_n = b$. Como la longitud de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $(b - a)/n$, a la cual se llamará h.

Es claro que,

$$x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + nh = b$$

Es posible asociar un trapecio (una figura de cuatro lados que tiene dos lados paralelos) con cada subintervalo. El área A de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ constituyen $\int_a^b f(x)\,dx$, la cual puede aproximarse mediante la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

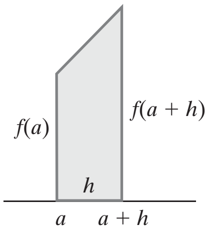


FIGURA 10.25 Primer trapecio.

Consideremos el primer trapecio, que se dibujó de nuevo en la figura 10.25. Como el área de un trapecio es igual a la mitad de su base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de

$$\tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)]$$

En forma similar, el segundo trapecio tiene área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)]$$

El área A bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de n trapecios:

$$\begin{aligned} A \approx\ & \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)] + \tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)] \\ & + \tfrac{1}{2}h[f(a + 2h) + f(a + 3h)] + \cdots + \tfrac{1}{2}h[f(a + (n - 1)h) + f(b)] \end{aligned}$$

Como $A = \int_a^b f(x)\,dx$, al simplificar la fórmula anterior se obtiene la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) + \cdots + 2f(a + (n - 1)h) + f(b)]$$

donde $h = (b - a)/n$.

El patrón de los coeficientes que están dentro de las llaves es 1, 2, 2, …, 2, 1. Por lo general, entre más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación. En este desarrollo, se supuso por conveniencia que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Sin embargo, la regla del trapecio es válida sin esta restricción.

EJEMPLO 1 Regla del trapecio

Use la regla del trapecio para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

APLÍQUELO ▶

13. Un tanque derrama aceite a una velocidad de $R'(t) = \dfrac{60}{\sqrt{t^2+9}}$, donde t es el tiempo en minutos y $R(t)$ es el radio de la mancha de aceite en pies. Use la regla del trapecio con $n = 5$ para aproximar $\displaystyle\int_0^5 \frac{60}{\sqrt{t^2+9}}\,dt$, el tamaño del radio después de cinco segundos.

para $n = 5$. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales.

Solución: Aquí $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $n = 5$, $a = 0$ y $b = 1$. Entonces,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Los términos a sumar son

$$\begin{array}{rcrcl} f(a) & = & f(0) & = & 1.0000 \\ 2f(a+h) & = & 2f(0.2) & = & 1.9231 \\ 2f(a+2h) & = & 2f(0.4) & = & 1.7241 \\ 2f(a+3h) & = & 2f(0.6) & = & 1.4706 \\ 2f(a+4h) & = & 2f(0.8) & = & 1.2195 \\ f(b) & = & f(1) & = & \underline{0.5000} \qquad a + nh = b \\ & & & & 7.8373 = \text{suma} \end{array}$$

Por lo tanto, la estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.785.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Regla de Simpson

Otro método para estimar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dado por la regla de Simpson, la cual implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos parabólicos. Se omitirá su deducción.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

donde $h = (b-a)/n$ y n es un número par.

El patrón de coeficientes incluidos dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2, …, 2, 4, 1, lo cual requiere que n **sea par**. Se usará esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

APLÍQUELO ▶

14. Un cultivo de levadura está creciendo a la velocidad de $A'(t) = 0.3e^{0.2t^2}$, donde t es el tiempo en horas y $A(t)$ es la cantidad en gramos. Use la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar $\int_0^4 0.3e^{0.2t^2}\,dt$, la cantidad que creció el cultivo durante las primeras cuatro horas.

EJEMPLO 2 Regla de Simpson

Use la regla de Simpson para estimar el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ para $n = 4$. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee la respuesta a tres decimales.

Solución: Aquí $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$. Así, $h = (b - a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos por sumar son:

$$\begin{array}{rcrcl} f(a) & = & f(0) & = & 1.0000 \\ 4f(a+h) & = & 4f(0.25) & = & 3.7647 \\ 2f(a+2h) & = & 2f(0.5) & = & 1.6000 \\ 4f(a+3h) & = & 4f(0.75) & = & 2.5600 \\ f(b) & = & f(1) & = & \underline{0.5000} \\ & & & & 9.4247 = \text{suma} \end{array}$$

Por lo tanto, mediante la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785$$

Esta es una mejor aproximación que la obtenida en el ejemplo 1 usando la regla del trapecio.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio pueden usarse si solo se conoce $f(a)$, $f(a + h)$, etc.; no es necesario conocer $f(x)$ para toda x presente en $[a, b]$. En el ejemplo 3 se ilustrará lo anterior.

EJEMPLO 3 Demografía

En el ejemplo 3 se estima una integral definida a partir de puntos de datos; la función no es conocida.

Una función usada a menudo en demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etc., en una comunidad) es la **función de la tabla de vida**, denotada por l. En una población con 100 000 nacimientos en cualquier año, $l(x)$ representa el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Por ejemplo, si $l(20) = 98\ 857$, entonces el número de personas que llegan a los 20 años en cualquier año es 98 857. Suponga que la función l se aplica a todas las personas nacidas en un largo intervalo de tiempo. Puede demostrarse que en cualquier tiempo, el número esperado de personas presentes en la población que tienen exactamente entre x y $x + m$ años, inclusive, está dado por

$$\int_x^{x+m} l(t)\,dt$$

La tabla siguiente proporciona valores de $l(x)$ para hombres y mujeres de Estados Unidos.[14] Aproxime el número de mujeres ubicadas en el grupo de 20 a 35 años de edad usando la regla del trapecio con $n = 3$.

Tabla de vida

	$l(x)$			$l(x)$	
Edad $= x$	Hombres	Mujeres	Edad $= x$	Hombres	Mujeres
0	100 000	100 000	45	93 717	96 582
5	99 066	99 220	50	91 616	95 392
10	98 967	99 144	55	88 646	93 562
15	98 834	99 059	60	84 188	90 700
20	98 346	98 857	65	77 547	86 288
25	97 648	98 627	70	68 375	79 926
30	96 970	98 350	75	56 288	70 761
35	96 184	97 964	80	42 127	58 573
40	95 163	97 398			

Solución: Se desea estimar

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt$$

Se tiene $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{35-20}{3} = 5$. Los términos que deben sumarse de acuerdo con la regla del trapecio son

$$\begin{aligned} l(20) &= \phantom{2(98\ 627) = {}} 98\ 857 \\ 2l(25) &= 2(98\ 627) = 197\ 254 \\ 2l(30) &= 2(98\ 350) = 196\ 700 \\ l(35) &= \phantom{2(98\ 350) = {}} \underline{97\ 964} \\ & \phantom{= 2(98\ 350) = {}} 590\ 775 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por la regla del trapecio,

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt \approx \frac{5}{2}(590\ 775) = 1\ 476\ 937.5$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Existen fórmulas que se usan para determinar la exactitud de las respuestas obtenidas al emplear la regla del trapecio o la regla de Simpson, las cuales pueden encontrarse en textos comunes sobre análisis numérico.

---

[14] *National Vital Statistics Report*, vol. 48, núm. 18, 7 de febrero de 2001.

PROBLEMAS 10.8

En los ejercicios 1 y 2, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n para estimar la integral.

1. $\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla del trapecio, $n = 6$.

2. $\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla de Simpson, $n = 6$.

En los problemas del 3 al 8, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales. En los problemas del 3 al 6, evalúe también la integral por antidiferenciación (el teorema fundamental del cálculo integral).

3. $\int_{0}^{1} x^3\,dx$; regla del trapecio, $n = 5$.

4. $\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$.

5. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$.

6. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla del trapecio, $n = 6$.

7. $\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x+1}$; regla del trapecio, $n = 4$.

8. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla de Simpson, $n = 6$.

En los problemas 9 y 10, use la tabla de vida del ejemplo 3 para estimar las integrales dadas por medio de la regla del trapecio.

9. $\int_{45}^{70} l(t)\,dt$, hombres, $n = 5$. **10.** $\int_{35}^{55} l(t)\,dt$, mujeres, $n = 4$.

En los problemas 11 y 12, suponga que la gráfica de una función continua f, donde $f(x) \geq 0$, contiene los puntos dados. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado. Redondee su respuesta a un decimal.

11. $(1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5)$; $[1,5]$

12. $(2, 0), (2.5, 6), (3, 10), (3.5, 11), (4, 14), (4.5, 15), (5, 16)$; $[2,5]$

13. Usando toda la información dada en la figura 10.26, estime $\int_1^3 f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Escriba su respuesta en forma fraccionaria.

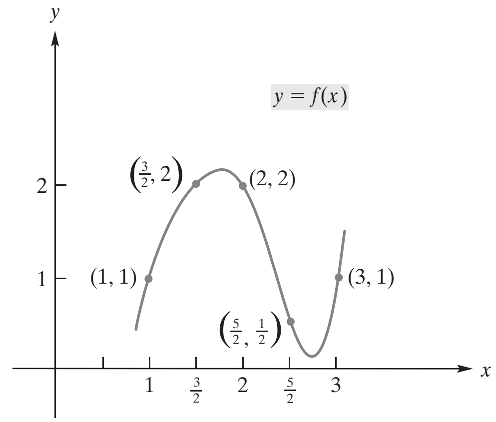


FIGURA 10.26

En los problemas 14 y 15, use la regla de Simpson y el valor dado de n para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee sus respuestas a tres decimales.

14. $\int_{1}^{3} \frac{2}{\sqrt{1+x}}\,dx$; $n = 4$. Evalúe también la integral por medio del teorema fundamental del cálculo integral.

15. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$; $n = 4$

16. Ingreso Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto si los valores de la función de ingreso marginal dr/dq son los siguientes:

q (unidades)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{dr}{dq}$ (\$ por unidad)	10	9	8.5	8	8.5	7.5	7	6.5	7

17. Área de piscina Lesley Griffith, quien ha tomado una clase de matemáticas aplicadas al comercio, quiere determinar el área de la superficie de su piscina que tiene forma irregular y curva. Hay una valla recta que rodea la piscina. Lesley marca los puntos a y b en la valla, tal como se muestra en la figura 10.27. Observa que la distancia de a a b mide 8 m y subdivide el intervalo en ocho subintervalos iguales, señalando los puntos resultantes de la cerca como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ y x_7. Lesley (L) se sitúa en el punto x_1, sostiene una cinta métrica y le pide a su amigo Chester (C) que tome el otro extremo de la cinta y lo lleve al punto P_1 situado en el lado más alejado de la piscina. Luego, Lesley pide a su amiga Willamina (W) que se sitúe en el punto Q_1 en el lado cercano de la piscina y anote la distancia que marca la cinta métrica. Vea la figura 10.27.

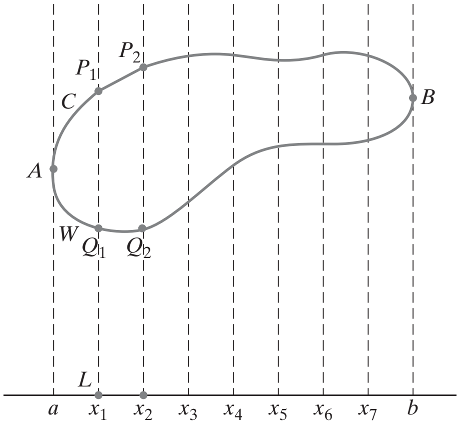


FIGURA 10.27

Después, Lesley se traslada al punto x_2 y los tres amigos repiten el procedimiento. Hacen esto para cada uno de los puntos restantes del x_3 al x_7. Lesley tabula sus mediciones en la tabla siguiente:

Distancia a lo largo de la valla (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia a través de la piscina (m)	0	3	4	3	3	2	2	2	0

Lesley dice que ahora la regla de Simpson le permitirá aproximar el área de la piscina como

$$\frac{1}{3}(4(3) + 2(4) + 4(3) + 2(3) + 4(2) + 2(2) + 4(2)) = \frac{58}{3}$$

metros cuadrados. Chester dice que no es así como recuerda la regla de Simpson. Willamina piensa que faltan algunos términos, pero Chester se aburre y se va a nadar. ¿Es correcto el cálculo de Lesley? Explique su respuesta.

18. Manufactura Un fabricante estimó el costo marginal (CM) y el ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción (q). Dichas estimaciones se muestran en la tabla siguiente:

q (unidades)	0	20	40	60	80	100
CM ($ por unidad)	260	250	240	200	240	250
IM ($ por unidad)	410	350	300	250	270	250

(a) Usando la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 100 unidades.

(b) Usando la regla del trapecio, estime el ingreso total por la venta de 100 unidades.

(c) Suponiendo que la utilidad máxima ocurre cuando IM = CM (esto es, cuando $q = 100$), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de $2000.

10.9 Área entre curvas

Objetivo

Encontrar el área de una región limitada por curvas mediante el uso de la integración sobre franjas tanto horizontales como verticales.

En las secciones 10.6 y 10.7 se vio que el área de una región limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y la curva $y = f(x)$ con $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$ se puede encontrar mediante la evaluación de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. De igual modo, para una función $f(x) \leq 0$ en un intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y $y = f(x)$ está dada por $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -f(x)\,dx$. La mayor parte de las funciones f que se han encontrado, y se encontrarán, son continuas y tienen un número finito de raíces de $f(x) = 0$. Para tales funciones, las raíces de $f(x) = 0$ parten el dominio de f en un número finito de intervalos sobre cada uno de los cuales se tiene $f(x) \geq 0$ o bien $f(x) \leq 0$. Para una función de este tipo se puede determinar el área limitada por $y = f(x)$, $y = 0$ y *cualquier* par de rectas verticales $x = a$ y $x = b$, con a y b en el dominio de f. Solo se deben encontrar todas las raíces $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ con $a < c_1$ y $c_k < b$; calcular las integrales, $\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \cdots, \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx$; anexar a cada integral el signo correcto que corresponda a un área y, por último, sumar los resultados. El ejemplo 1 proporcionará un modesto ejemplo de esta idea.

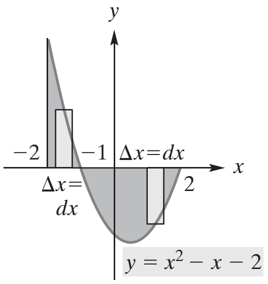


FIGURA 10.28 Diagrama para el ejemplo 1.

Para la determinación de un área de este tipo, un bosquejo simple de la región involucrada es extremadamente valioso. Para establecer las integrales necesarias, debe incluirse un rectángulo de muestra en el bosquejo para cada integral en particular, tal como se muestra en la figura 10.28. El área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Un bosquejo ayuda a entender el proceso de integración y es indispensable durante la creación de las integrales para encontrar áreas de regiones complicadas. Un rectángulo de este tipo (vea la figura 10.28) se llama **franja vertical**. En el diagrama, la anchura de la franja vertical es Δx. Sabemos, a partir del trabajo realizado con diferenciales en la sección 10.1, que es posible escribir consistentemente $\Delta x = dx$ para la variable independiente x. La altura de la franja vertical es el valor y de la curva. Por lo tanto, el rectángulo tiene un área de $y\,\Delta x = f(x)\,dx$. El área de toda la región se determina al sumar las áreas de todas las franjas verticales que estén entre $x = a$ y $x = b$ para después encontrar el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, se tiene

$$\Sigma y \Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Para $f(x) \geq 0$, resulta útil pensar en dx como un diferencial de longitud y en $f(x)\,dx$ como un diferencial de área dA. Entonces, como se vio en la sección 10.7, se tiene $\frac{dA}{dx} = f(x)$ para alguna función de área A y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dA = A(b) - A(a)$$

[Si la función de área mide el área a partir de la recta $x = a$, como lo hizo en la sección 10.7, entonces $A(a) = 0$ y el área bajo f (y sobre 0) desde a hasta b es justamente $A(b)$].

Aquí, es importante entender que se necesita $f(x) \geq 0$ con el fin de pensar en $f(x)$ como una longitud y, por lo tanto, en $f(x)dx$ como un área diferencial. Pero si $f(x) \leq 0$, entonces $-f(x) \geq 0$, de manera que $-f(x)$ se convierte en una longitud y $-f(x)dx$ se convierte en un área diferencial.

¡ADVERTENCIA!

Es erróneo apresurarse y escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$, por la siguiente razón. Para el rectángulo izquierdo la altura es y. Sin embargo, para el rectángulo de la derecha la y es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Esto señala la importancia de bosquejar la región.

EJEMPLO 1 Un área que requiere dos integrales definidas

Encuentre el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

y la recta $y = 0$ (el eje x) a partir de $x = -2$ hasta $x = 2$.

Solución: En la figura 10.28 se muestra un bosquejo de la región. Note que las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área de la franja vertical es

$$ydx = (x^2 - x - 2)dx$$

En el intervalo $[-1, 2]$, el área de la franja vertical es

$$(-y)dx = -(x^2 - x - 2)dx$$

Así,

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right] \\
&= \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 22 ◁

Antes de abarcar problemas de área más complicados, se estudiará el área considerando su uso como una probabilidad en estadística.

EJEMPLO 2 Aplicación a la estadística

En estadística, una **función de densidad** (de probabilidad) f de una variable x, donde x adopta todos los valores incluidos en el intervalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:

(i) $f(x) \geq 0$
(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

La probabilidad de que x adopte un valor entre c y d, lo cual se escribe como $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq d \leq b$, se representa mediante el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = c$ y $x = d$. Por lo tanto (vea la figura 10.29),

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

[En la terminología de los capítulos 8 y 9, la condición $c \leq x \leq d$ define un *evento* y $P(c \leq x \leq d)$ es consistente con la notación de los capítulos anteriores. Observe también que la hipótesis (**ii**) señalada líneas arriba, asegura que $a \leq x \leq b$ es el *evento cierto*].

Para la función de densidad $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \leq x \leq 1$, encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

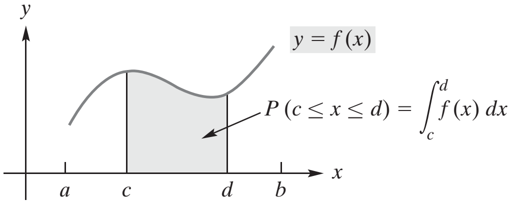


FIGURA 10.29 Probabilidad como un área.

a. $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$

Solución: Aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, c es 0 y d es $\frac{1}{4}$. Se tiene

$$P\left(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^{1/4}$$

$$= \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) - 0 = \frac{5}{32}$$

b. $P(x \geq \frac{1}{2})$

Solución: Como el dominio de f es $0 \leq x \leq 1$, decir que $x \geq \frac{1}{2}$ significa que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Así,

$$P\left(x \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

Franjas verticales

Ahora se encontrará el área de una región encerrada por varias curvas. Como antes, el procedimiento consistirá en dibujar una franja muestra del área y usar la integral definida para "sumar" las áreas de todas las franjas.

Por ejemplo, considere el área de la región mostrada en la figura 10.30 que está limitada arriba y abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y lateralmente por las rectas $x = a$ y $x = b$. El ancho de la franja vertical indicada mediante flechas es dx y la altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior, lo que se escribirá como $y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}$. Entonces, el área de la franja es

$$(y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx$$

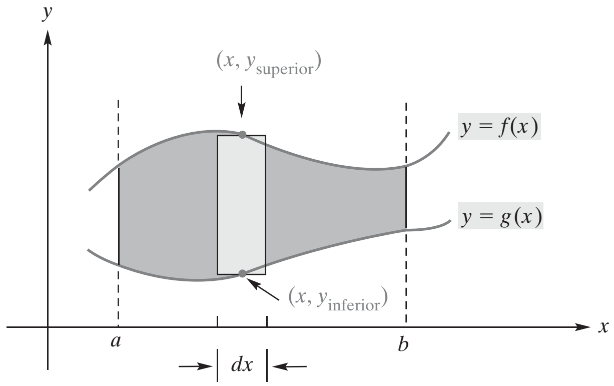


FIGURA 10.30 Región entre curvas.

que es

$$(f(x) - g(x))\,dx$$

Al sumar las áreas de todas las franjas comprendidas entre $x = a$ y $x = b$ por medio de la integral definida, se obtiene el área de la región:

$$\sum (f(x) - g(x))\,dx \to \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \text{área}$$

Es necesario comentar que existe otra forma de ver este problema de área. En la figura 10.30, tanto f como g están por encima de $y = 0$ y queda claro que el área buscada también es el área sobre f menos el área debajo de g. La aproximación indica que el área requerida es

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Sin embargo, la primera aproximación no requiere que f o g estén por encima de 0. El uso de y_{superior} y y_{inferior} en realidad es solo una forma de decir que $f \geq g$ en $[a, b]$. Esto es equivalente a decir que $f - g \geq 0$ en $[a, b]$ de manera que cada diferencial $(f(x) - g(x))dx$ es significativa como un área.

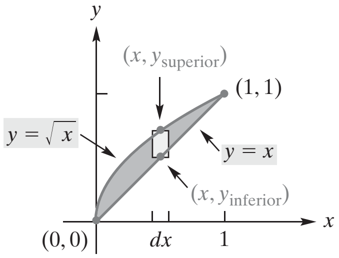


FIGURA 10.31 Diagrama para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinación de un área entre dos curvas

Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

Solución: En la figura 10.31 aparece un bosquejo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Al eliminar y por sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x \\ x &= x^2 && \text{elevando al cuadrado ambos lados} \\ 0 &= x^2 - x = x(x - 1) \\ x &= 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Debe resultar obvio que el conocimiento de los puntos de intersección es importante para determinar los límites de integración.

Como se elevaron ambos lados al cuadrado, se deben verificar las soluciones encontradas con respecto a la ecuación *original*. Se puede determinar con facilidad que tanto $x = 0$ como $x = 1$ son soluciones de $\sqrt{x} = x$. Si $x = 0$, entonces $y = 0$; si $x = 1$, entonces $y = 1$. Así, las curvas se intersecan en (0, 0) y (1, 1). El ancho de la franja de área indicada es dx. La altura es el valor de y sobre la curva superior menos el valor de y sobre la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = \sqrt{x} - x$$

El área de la franja es entonces $(\sqrt{x} - x)\,dx$. Al sumar las áreas de todos estos elementos desde $x = 0$ y $x = 1$ por medio de la integral definida, se obtiene el área de toda la región:

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 47 ◁

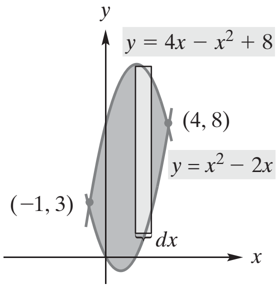


FIGURA 10.32 Diagrama para el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determinación de un área entre dos curvas

Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

Solución: En la figura 10.32 aparece un bosquejo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 + 8 &= x^2 - 2x, \\ -2x^2 + 6x + 8 &= 0, \\ x^2 - 3x - 4 &= 0, \\ (x+1)(x-4) &= 0 \qquad \text{factorizando} \\ x = -1 \quad \text{o} \quad x &= 4 \end{aligned}$$

Cuando $x = -1$, entonces $y = 3$; cuando $x = 4$, entonces $y = 8$. Así, las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. El ancho de la franja indicada es dx. La altura es el valor de y sobre la curva superior menos el valor de y sobre la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)$$

Por lo tanto, el área de la franja es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,dx = (-2x^2 + 6x + 8)\,dx$$

Al sumar todas estas áreas desde $x = -1$ hasta $x = 4$, se tiene

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3}$$

Ahora resuelva el problema 51 ◁

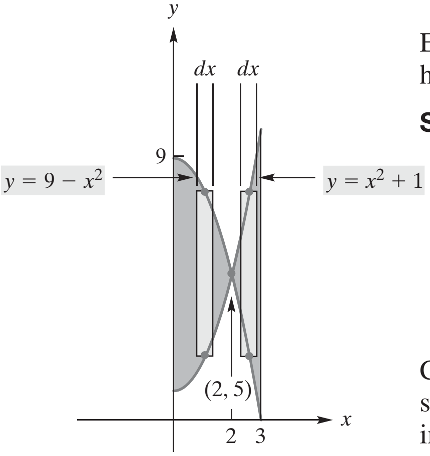


FIGURA 10.33 y_{superior} es $9 - x^2$ en $[0, 2]$ y es $x^2 + 1$ en $[2, 3]$.

EJEMPLO 5 Área de una región que tiene dos curvas superiores diferentes

Encuentre el área de la región situada entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución: La región se bosqueja en la figura 10.33. Las curvas se intersecan cuando

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= x^2 + 1 \\ 8 &= 2x^2 \\ 4 &= x^2 \\ x &= \pm 2 \qquad \text{dos soluciones} \end{aligned}$$

Cuando $x = \pm 2$, entonces $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son $(\pm 2, 5)$. Como se tiene interés en la región que va desde $x = 0$ hasta $x = 3$, el punto de intersección que importa es $(2, 5)$. En la figura 10.33 note que en la región ubicada a la *izquierda* del punto de intersección $(2, 5)$, una franja tiene

$$y_{\text{superior}} = 9 - x^2 \quad \text{y} \quad y_{\text{inferior}} = x^2 + 1$$

pero para una franja situada a la *derecha* de $(2, 5)$ ocurre lo contrario, a saber,

$$y_{\text{superior}} = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y_{\text{inferior}} = 9 - x^2$$

Entonces, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, el área de una franja es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,dx \\ &= (8 - 2x^2)dx \end{aligned}$$

pero desde $x = 2$ hasta $x = 3$, el área es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,dx \\ &= (2x^2 - 8)\,dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, para encontrar el área de toda la región se necesitan dos integrales:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^2 (8-2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2-8)\,dx\\ &= \left(8x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3}-8x\right)\Bigg|_2^3\\ &= \left[\left(16-\frac{16}{3}\right)-0\right]+\left[(18-24)-\left(\frac{16}{3}-16\right)\right]\\ &= \frac{46}{3}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 42 ◁

Franjas horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar sumando áreas de franjas horizontales en lugar de franjas verticales. En el ejemplo siguiente, se determinará el área utilizando ambos métodos. En cada caso, la franja del área determina la forma de la integral.

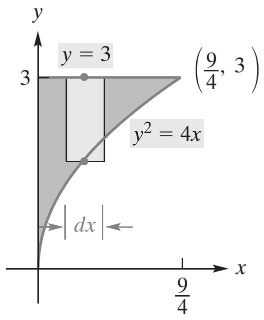


FIGURA 10.34 Franja vertical de área.

EJEMPLO 6 Franjas verticales y franjas horizontales

Encuentre el área de la región limitada por la curva $y^2 = 4x$ y las rectas $y = 3$ y $x = 0$ (el eje y).

Solución: En la figura 10.34 se presenta el bosquejo de la región. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersecan, $9 = 4x$, por lo que $x = \frac{9}{4}$. Entonces, el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Como el ancho de la franja vertical es dx, se integra con respecto a la variable x. De acuerdo con esto, y_{superior} y y_{inferior} deben expresarse como funciones de x. Para la curva inferior, $y^2 = 4x$, se tiene $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero $y \geq 0$ para la porción de esta curva que limita la región, por lo que se usa $y = 2\sqrt{x}$. La curva superior es $y = 3$. Por consiguiente, la altura de la franja es

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = 3 - 2\sqrt{x}$$

Por lo tanto, la franja tiene un área de $(3 - 2\sqrt{x})\,\Delta x$ y se desea sumar todas estas áreas desde $x = 0$ hasta $x = \frac{9}{4}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^{9/4} (3-2\sqrt{x})\,dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{9/4}\\ &= \left[3\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right]-(0)\\ &= \frac{27}{4}-\frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4}-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

¡ADVERTENCIA!

Con franjas horizontales, el ancho es dy.

Considere ahora este problema desde el punto de vista de una **franja horizontal** como se muestra en la figura 10.35. El ancho de la franja es dy. La longitud de la franja es *el valor x de la curva situada más a la derecha menos el valor x de la curva situada más a la izquierda*. Así, el área de la franja es

$$(x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy$$

Se desea sumar todas estas áreas desde $y = 0$ hasta $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy \to \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy$$

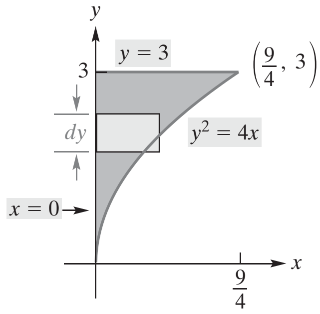


FIGURA 10.35 Franja horizontal de área.

Como la variable de integración es y, se debe expresar $x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}$ como funciones de y. La curva situada más a la derecha es $y^2 = 4x$, de manera que $x = y^2/4$. La curva izquierda es $x = 0$. Así,

$$\text{área} = \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \left.\frac{y^3}{12}\right|_0^3 = \frac{9}{4}$$

Note que para esta región, las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son límites para la variable de integración**.

Ahora resuelva el problema 56 ◁

EJEMPLO 7 Ventajas de los elementos horizontales

Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $x - y = 2$.

Solución: En la figura 10.36 se muestra el bosquejo de la región. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Así, $y^2 - y - 2 = 0$; en forma equivalente, $(y + 1)(y - 2) = 0$, de lo cual se deduce que $y = -1$ o $y = 2$. Esto nos da los puntos de intersección $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Consideremos franjas verticales de área. [Vea la figura 10.36(a)]. Al despejar y de $y^2 = x$ se obtiene $y = \pm\sqrt{x}$. Como se ve en la figura 10.36(a), a la *izquierda* de $x = 1$, el extremo superior de la franja se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior sobre $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$, la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior es $x - y = 2$ (o $y = x - 2$). Entonces, con franjas verticales son necesarias *dos* integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2))\,dx$$

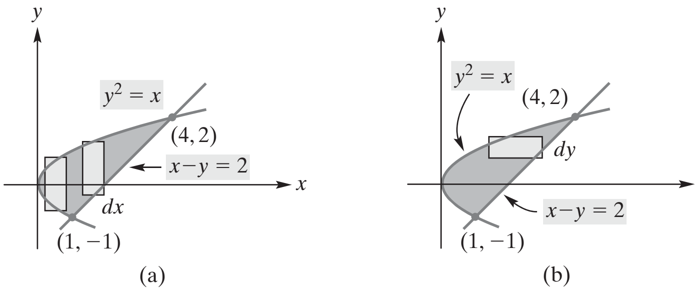


FIGURA 10.36 Región del ejemplo 7 con franjas verticales y horizontales.

Quizá el uso de franjas horizontales pueda simplificar el trabajo. En la figura 10.36(b), el ancho de la franja es Δy. La curva situada más a la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o $x = y + 2$) y la curva situada más a la izquierda siempre es $y^2 = x$ (o $x = y^2$). Por lo tanto, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\Delta y$, así que el área total es

$$\text{área} = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)\,dy = \frac{9}{2}$$

Resulta claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de abordar este problema. Así que solo se requiere una integral que además resulta mucho más sencilla de calcular.

Ahora resuelva el problema 57 ◁

PROBLEMAS 10.9

En los problemas del 1 al 24, use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva dada, el eje x y las rectas dadas. En cada caso, primero bosqueje la región. Tenga cuidado con las áreas de regiones que se encuentran por debajo del eje x.

1. $y = 5x + 2, \quad x = 1, \quad x = 4$

2. $y = x + 5, \quad x = 2, \quad x = 4$

3. $y = 3x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$

4. $y = x^2, \quad x = 2, \quad x = 3$

5. $y = x + x^2 + x^3, \quad x = 1$

6. $y = x^2 - 2x, \quad x = -3, \quad x = -1$

7. $y = 3x^2 - 4x, \quad x = -2, \quad x = -1$

8. $y = 2 - x - x^2$

9. $y = \dfrac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2$

10. $y = 2 - x - x^3, \quad x = -3, \quad x = 0$

11. $y = e^x, \quad x = 1, \quad x = 3$

12. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}, \quad x = 2, \quad x = 3$

13. $y = \dfrac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e$

14. $y = \sqrt{x+9}, \quad x = -9, \quad x = 0$

15. $y = x^2 - 4x, \quad x = 2, \quad x = 6$

16. $y = \sqrt{2x-1}, \quad x = 1, \quad x = 5$

17. $y = x^3 + 3x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$

18. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2$

19. $y = e^x + 1, \quad x = 0, \quad x = 1$

20. $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2$

21. $y = x + \dfrac{2}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2$

22. $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4$

23. $y = \sqrt{x-2}, \quad x = 2, \quad x = 6$

24. $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 4$

25. Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la recta $x = 3$. Incluya un bosquejo de la región.

26. Bajo condiciones de una distribución uniforme continua (un tema de estadística), la proporción de personas con ingresos entre a y t, donde $a \le t \le b$, es el área de la región ubicada entre la curva $y = 1/(b - a)$ y el eje x desde $x = a$ hasta $x = t$. Bosqueje la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

27. Suponga que $f(x) = x/8$, donde $0 \le x \le 4$. Si f es una función de densidad (consulte el ejemplo 2), encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

(a) $P(0 \le x \le 1)$

(b) $P(2 \le x \le 4)$

(c) $P(x \ge 3)$

28. Suponga que $f(x) = \frac{1}{3}(1 - x^2)$, donde $0 \le x \le 3$. Si f es una función de densidad (consulte el ejemplo 2), encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

(a) $P(1 \le x \le 2)$

(b) $P(1 \le x \le \frac{5}{2})$

(c) $P(x \le 1)$

(d) $P(x \ge 1)$ usando su resultado del inciso (c)

29. Suponga que $f(x) = 1/x$, donde $e \le x \le e^2$. Si f es una función de densidad (consulte el ejemplo 2), encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

(a) $P(3 \le x \le 7)$

(b) $P(x \le 5)$

(c) $P(x \ge 4)$

(d) Verifique si $P(e \le x \le e^2) = 1$.

30. (a) Sea r un número real, donde $r > 1$. Evalúe

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx$$

(b) Su respuesta al inciso (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.

(c) Evalúe $\lim\limits_{r \to \infty} \left(\displaystyle\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx \right)$.

(d) Su respuesta al inciso (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.

En los problemas del 31 al 34, utilice la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva dada, el eje x y las rectas dadas. Redondee su respuesta a dos decimales.

31. $y = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x = -2, \quad x = 1$

32. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+5}}, \quad x = 2, \quad x = 7$

33. $y = x^4 - 2x^3 - 2, \quad x = 1, \quad x = 3$

34. $y = 1 + 3x - x^4$

En los problemas del 35 al 38, exprese el área de la región sombreada en términos de una integral (o integrales). No evalúe su expresión.

35. Vea la figura 10.37.

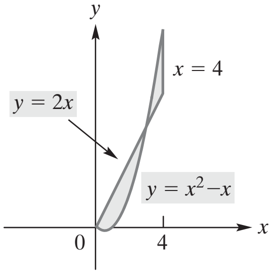


FIGURA 10.37

36. Vea la figura 10.38.

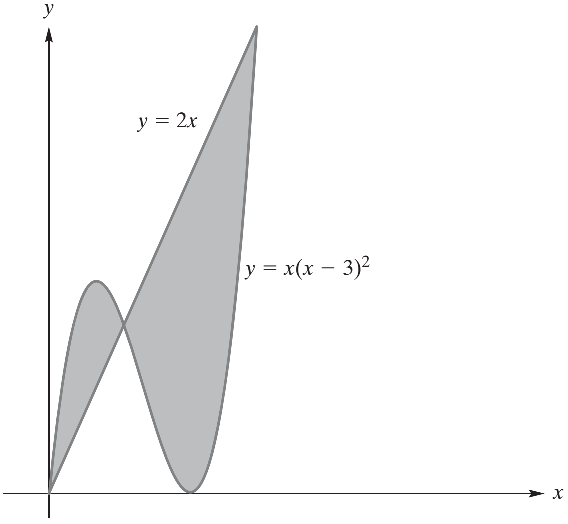


FIGURA 10.38

37. Vea la figura 10.39.

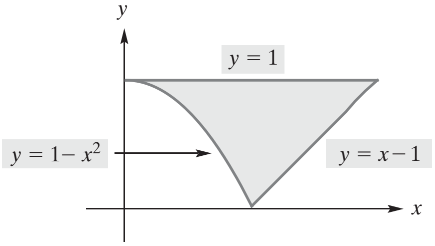


FIGURA 10.39

38. Vea la figura 10.40.

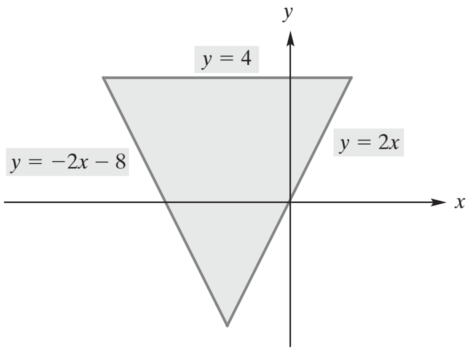


FIGURA 10.40

39. Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región ubicada a la izquierda de la recta $x = 1$ que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 5$ y $y = 7 - 2x^2$. *No* evalúe la integral.

40. Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región ubicada en el primer cuadrante limitada por el eje x y las gráficas de $y^2 = x$ y $2y = 3 - x$. *No* evalúe la integral.

En los problemas del 41 al 56, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.

41. $y = x^2, \quad y = 2x$ 42. $y = x, \quad y = -x + 3, \quad y = 0$

43. $y = 10 - x^2, \quad y = 4$ **44.** $y^2 = x + 1, \quad x = 1$

45. $x = 8 + 2y, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 3$

46. $y = x - 6, \quad y^2 = x$ 47. $y^2 = 4x, \quad y = 2x - 4$

48. $y = x^3, \quad y = x + 6, \quad x = 0.$

(*Sugerencia*: La única raíz real de $x^3 - x - 6 = 0$ es 2).

49. $2y = 4x - x^2, \quad 2y = x - 4$

50. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$

51. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 1$

52. $y = x^3 + x, y = 0, x = -1, x = 2$

53. $y = x^3 - 1, \quad y = x - 1$

54. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$

55. $4x + 4y + 17 = 0, \quad y = \dfrac{1}{x}$

56. $y^2 = -x - 2, \quad x - y = 5, \quad y = -1, \quad y = 1$

57. Encuentre el área de la región situada entre las curvas

$$y = x - 1 \quad \text{y} \quad y = 5 - 2x$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

34. Encuentre el área de la región situada entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \quad \text{y} \quad y = 10 - x^2$$

desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

35. Curva de Lorenz Una *curva de Lorenz* se utiliza para estudiar las distribuciones del ingreso. Si x es el porcentaje acumulado de los receptores del ingreso, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulado del ingreso, entonces la igualdad de la distribución del ingreso está dada por la recta $y = x$ en la figura 10.41, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% del ingreso total, 20% de la gente recibe 20% del ingreso total, etc. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorenz definida por

$$y = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$$

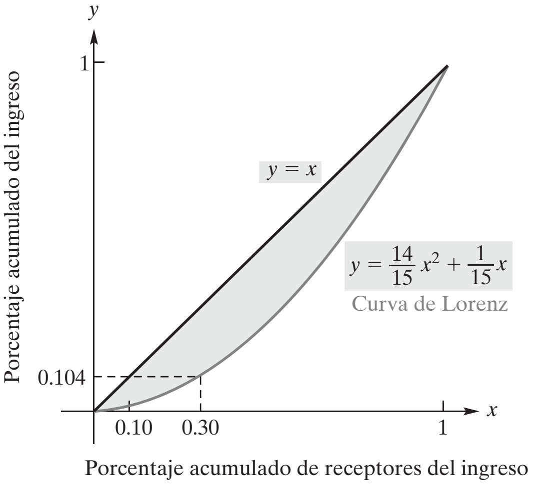


FIGURA 10.41

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente solo recibe 10.4% del ingreso total. El grado de desviación de la igualdad se mide por medio del *coeficiente de desigualdad*[15] para una curva de Lorenz. Este coeficiente se define cómo el área situada entre la curva y la diagonal dividida entre el área localizada bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es 0. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorenz que se acaba de definir.

60. Curva de Lorenz Encuentre el coeficiente de desigualdad, como en el problema 59, para la curva de Lorenz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

61. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 3x$ y $y = mx$, donde m es una constante positiva.

62. (a) Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 2x + 2$.
(b) ¿Qué porcentaje del área del inciso (a) se encuentra por encima del eje x?

63. La región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ está dividida en dos partes de igual área por la recta $y = k$, donde k es una constante. Encuentre el valor de k.

En los problemas del 64 al 68, estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

64. $y = x^2 - 4x + 1, \quad y = -\dfrac{6}{x}$

65. $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 7 - 2x - x^4$

66. $y = x^3 - 8x + 1, \quad y = x^2 - 5$

67. $y = x^5 - 3x^3 + 2x, \quad y = 3x^2 - 4$

68. $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30, \quad y = x^3 + x^2 - 20x$

---

[15] G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), pp. 293-294.

10.10 Excedentes de los consumidores y los productores

Objetivo

Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los cuales se representan mediante áreas.

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 10.42 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio p por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará) q unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán) q unidades. El punto (q_0, p_0) en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí, p_0 es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad q_0 de un producto que los productores desean vender a ese precio. De manera breve, p_0 es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

Suponga que el mercado está en equilibrio y que el precio por unidad del producto es p_0. De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que p_0. Por ejemplo, al precio p_1 por unidad, los consumidores comprarían q_1 unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio p_0.

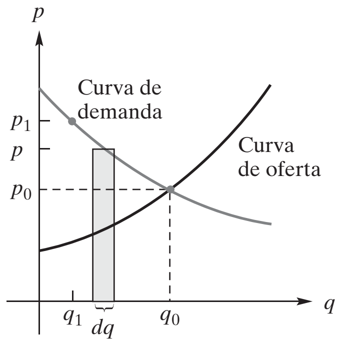


FIGURA 10.42 Curvas de oferta y demanda.

La franja vertical de la figura 10.42 tiene un área de $p\,dq$. Esta expresión también puede considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando dq unidades de producto si el precio por unidad fuese p. Como el precio es en realidad p_0, esos consumidores solo gastan $p_0\,dq$ en esas dq unidades y se benefician así mediante la cantidad $p\,dq - p_0\,dq$. Esta expresión puede escribirse como $(p - p_0)dq$, que es el área de un rectángulo de ancho dq y altura $p - p_0$. (Vea la figura 10.43). Al sumar las áreas de todos los rectángulos desde $q = 0$ hasta $q = q_0$ mediante la integración definida, se tiene

$$\int_0^{q_0} (p - p_0)\,dq$$

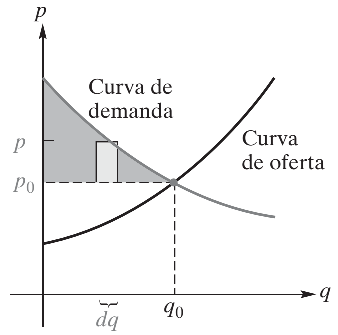


FIGURA 10.43 Beneficio para los consumidores por dq unidades.

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq$$

De manera geométrica (vea la figura 10.44), el excedente de los consumidores se representa mediante el área situada entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$ desde $q = 0$ hasta $q = q_0$.

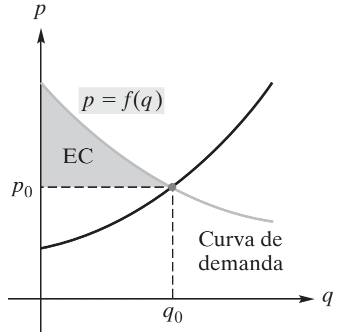


FIGURA 10.44 Excedente de los consumidores.

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, puesto que están dispuestos a suministrar el producto a precios *menores* que p_0. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en la figura 10.45, mediante el área situada entre la recta $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$ desde $q = 0$ hasta $q = q_0$. Esta ganancia, llamada **excedente de los productores** y abreviada como EP, está dada por

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq$$

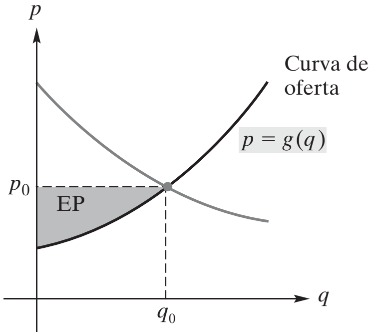


FIGURA 10.45 Excedente de los productores.

EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q$$

donde p es el precio por unidad para q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo condiciones de equilibrio del mercado.

Solución: Primero se debe encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el sistema formado por las funciones $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$. Por consiguiente, se igualan las dos expresiones para p y se resuelve:

$$10 + 0.1q = 100 - 0.05q$$
$$0.15q = 90$$
$$q = 600$$

Cuando $q = 600$, entonces $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\,dq$$

$$= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 9000$$

El excedente de los productores es

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\,dq$$

$$= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18\ 000$$

Por lo tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18 000.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

La ecuación de demanda para un producto es

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

Solución: Para determinar el punto de equilibrio, se tiene

$$p - 1 = \frac{90}{p} - 2$$

$$p^2 + p - 90 = 0$$

$$(p + 10)(p - 9) = 0$$

Así, $p_0 = 9$, por lo que $q_0 = 9 - 1 = 8$. (Vea la figura 10.46). Observe que la ecuación de demanda expresa a q como una función de p. Ya que el excedente de los consumidores puede considerarse como un área, ésta puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho dp y longitud $q = f(p)$. Las áreas de estas franjas se suman desde $p = 9$ hasta $p = 45$

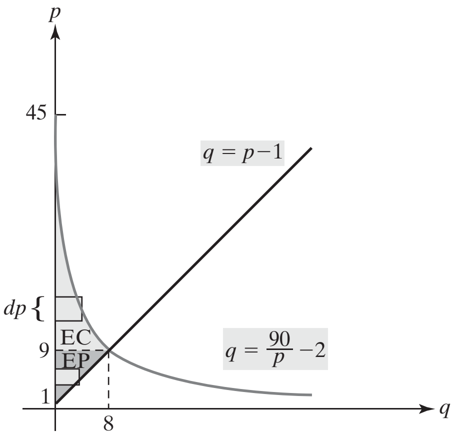


FIGURA 10.46 Diagrama para el ejemplo 2.

mediante la integración con respecto a p:

$$\text{EC} = \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2 \right) dp = (90 \ln |p| - 2p) \Big|_9^{45}$$

$$= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85$$

Si se utilizan franjas horizontales para calcular el excedente de los productores, se tiene

$$\text{EP} = \int_1^9 (p - 1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2} \Big|_1^9 = 32$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

PROBLEMAS 10.10

En los problemas del 1 al 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado.

1. $p = 22 - 0.8q$
$p = 6 + 1.2q$

2. $p = 2200 - q^2$
$p = 400 + q^2$

3. $p = \dfrac{50}{q+5}$
$p = \dfrac{q}{10} + 4.5$

4. $p = 900 - q^2$
$p = 10q + 300$

5. $q = 100(10 - 2p)$
$q = 50(2p - 1)$

6. $q = \sqrt{100 - p}$
$q = \dfrac{p}{2} - 10$

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado que ocurre a un precio de \$84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{10-q}$ y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+2}$, donde p es el precio por unidad (en cientos) cuando se demandan o se ofrecen q unidades. Determine el excedente de los consumidores, al millar de unidades más cercano, bajo equilibrio del mercado.

10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 10)(q + 20) = 1000$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 4p + 10 = 0$$

(a) Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 10$ y $q = 30$.

(b) Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

11. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10 \ln(q + 20) - 26$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

12. Excedente de los productores La función de oferta para un producto está dada por la tabla siguiente, donde p es el precio por unidad en el cual se suministran q unidades al mercado:

q	0	10	20	30	40	50
p	25	49	59	71	80	94

Use la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores si el precio de venta es de \$80.

Repaso del capítulo 10

Términos y símbolos importantes

Sección 10.1 **Diferenciales**
diferencial, dy, dx

Sección 10.2 **Integral indefinida**
antiderivada integral indefinida $\int f(x)\, dx$ signo de integral
integrando variable de integración constante de integración

Sección 10.3 **Integración con condiciones iniciales**
condición inicial

Sección 10.4 **Más fórmulas de integración**
regla de la potencia para la integración

Sección 10.5 **Técnicas de integración**
división preliminar

Sección 10.6	**Integral definida**
	integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ límites de integración
Sección 10.7	**Teorema fundamental del cálculo integral**
	Teorema fundamental del cálculo integral $F(x)\vert_a^b$
Sección 10.8	**Integración aproximada**
	regla del trapecio regla de Simpson
Sección 10.9	**Área entre curvas**
	franja vertical de área
	franja horizontal de área
Sección 10.10	**Excedentes de los consumidores y los productores**
	excedente de los consumidores excedente de los productores

Resumen

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, la diferencial dy se define mediante

$$dy = f'(x)\,dx$$

donde $dx = \Delta x$ es un cambio en x y puede ser cualquier número real. (Así que dy es una función de dos variables, a saber, x y dx). Si dx está cerca de 0, entonces dy es una aproximación a $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$.

$$\Delta y \approx dy$$

Además, dy puede usarse para aproximar el valor de una función usando

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy$$

Una antiderivada de una función f es una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Dos antiderivadas cualesquiera de f difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de f se llama integral indefinida de f y se denota por $\int f(x)\,dx$. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es llamada la constante de integración si y solo si $F' = f$.

Algunas fórmulas básicas de integración son:

$$\int k\,dx = kx + C \qquad k \text{ es una constante}$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \qquad \text{para } x > 0$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad k \text{ es una constante}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad \text{si } a \neq -1$$

Aquí, u representa una función diferenciable de x y du es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral sea escrita de manera que coincida en forma precisa con la de la regla de la potencia. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\text{y} \quad \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C \qquad u \neq 0$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f —esto es, si f' es conocida— entonces f es una antiderivada de f'. Además, si sabemos que f satisface una condición inicial, entonces es posible encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, si nos es dada una función de costo marginal dc/dq, entonces podemos encontrar la forma general de c mediante la integración. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, cuando también se nos dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando $q = 0$), entonces podemos determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función particular de costo c. De manera similar, si nos dan una función de ingreso marginal dr/dq, entonces por integración y usando el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$, es posible determinar la función de ingreso particular r. Una vez conocida r, puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda usando la ecuación $p = r/q$.

En este punto resulta útil revisar la notación sigma de la sección 1.5. Esta notación resulta particularmente útil en la determinación de áreas. Si $f(x) \geq 0$ es continua, para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $dx = (b - a)/n$. Si x_i es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, entonces el producto $f(x_i)dx$ es el área de un rectángulo. Si se denota la suma de todas estas áreas de rectángulos para los n subintervalos mediante S_n, entonces el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es el área de toda la región:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,dx = \text{área}$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite anterior se define como la integral definida de f sobre $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

En vez de evaluar integrales definidas usando límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. De manera matemática,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f.

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k \text{ es una constante,}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Si $f(x) \geq 0$ es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje x, $x = a$ y $x = b$. La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar una franja de área en la región. Lo anterior permite establecer la integral definida apropiada. A este respecto, tanto las franjas verticales como las horizontales tienen sus propios usos.

Una aplicación de la determinación de áreas implica el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado disponible para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área que va desde $q = 0$ hasta $q = q_0$, limitada desde arriba por la curva de demanda y desde abajo por la recta $p = p_0$. Así,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} (f(q) - p_0)\,dq$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área comprendida desde $q = 0$ hasta $q = q_0$, limitada desde arriba por la recta $p = p_0$ y desde abajo por la curva de oferta. Por lo tanto,

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} (p_0 - g(q))\,dq$$

donde g es la función de oferta.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 40, determine las integrales.

1. $\int (x^3 + 2x - 7)\,dx$

2. $\int dx$

3. $\int_0^{12} (9\sqrt{3x} + 3x^2)\,dx$

4. $\int \frac{4}{5 - 3x}\,dx$

5. $\int \frac{6}{(x+5)^3}\,dx$

6. $\int_3^9 (y-6)^{301}\,dy$

7. $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\,dx$

8. $\int_0^3 2xe^{5-x^2}\,dx$

9. $\int_0^1 \sqrt[3]{3t+8}\,dt$

10. $\int \frac{4 - 2x}{7}\,dx$

11. $\int y(y+1)^2\,dy$

12. $\int_0^1 10^{-8}\,dx$

13. $\int \frac{\sqrt[7]{t} - \sqrt{t}}{\sqrt[3]{t}}\,dt$

14. $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\,dx$

15. $\int_1^3 \frac{2t^2}{3 + 2t^3}\,dt$

16. $\int \frac{4x^2 - x}{x}\,dx$

17. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\,dx$

18. $\int (6x^2 + 4x)(x^3 + x^2)^{3/2}\,dx$

19. $\int (e^{2y} - e^{-2y})\,dy$

20. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\,dx$

21. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$

22. $\int_0^2 \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}\,dx$

23. $\int_{-2}^{2} (y^4 + y^3 + y^2 + y)\,dy$

24. $\int_7^{70} dx$

25. $\int_1^2 5x\sqrt{5 - x^2}\,dx$

26. $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x)^4\,dx$

27. $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right]dx$

28. $\int_0^{18} (2x - 3\sqrt{2x} + 1)\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\,dt$

30. $\int \frac{3z^3}{z - 1}\,dz$

31. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2}\,dx$

32. $\int \frac{(x^2 + 4)^2}{x^2}\,dx$

33. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + x}{2\sqrt{x}}\,dx$

34. $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{3x}}\,dx$

35. $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2}\,dx$

36. $\int \frac{6x^2 + 4}{e^{x^3 + 2x}}\,dx$

37. $\int \frac{(1 + e^{2x})^3}{e^{-2x}}\,dx$

38. $\int \frac{c}{e^{bx}(a + e^{-bx})^n}\,dx$ para $n \neq 1$ y $b \neq 0$

39. $\int 3\sqrt{10^{3x}}\,dx$

40. $\int \frac{5x^3 + 15x^2 + 37x + 3}{x^2 + 3x + 7}\,dx$

En los problemas 41 y 42, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

41. $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

42. $y' = \frac{x + 5}{x}, \quad y(1) = 3$

En los problemas del 43 al 50, determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.

43. $y = x^3, \quad x = 0, \ x = 2$

44. $y = 4e^x, \quad x = 0, \ x = 3$

45. $y = \sqrt{x + 4}, \quad x = 0$

46. $y = x^2 - x - 6, \quad x = -4, \ x = 3$

47. $y = 5x - x^2$

48. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8, \ x = 16$

49. $y = \frac{1}{x} + 2, \quad x = 1, \ x = 4$

50. $y = x^3 - 1, \quad x = -1$

En los problemas del 51 al 58, encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

51. $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2$ **52.** $y = 3x^2 - 5, \quad x = 0, \quad y = 4$

53. $y = -x(x - a), \quad y = 0$ para $0 < a$

54. $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9$ **55.** $y = x^2 - x, \quad y = 10 - x^2$

56. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3$

57. $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$

58. $y = 3 - x, \quad y = x - 4, \quad y = 0, \quad y = 3$

59. Ingreso marginal Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q}$$

determine la ecuación de demanda correspondiente.

60. Costo marginal Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6$$

y los costos fijos son de \$2500, determine el costo total de producir seis unidades.

61. Ingreso marginal La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 250 - q - 0.2q^2$$

Si r es el ingreso, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 15 a 25 unidades.

62. Costo marginal La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{3q + 70}}$$

Si c es el costo, determine el costo implicado en incrementar la producción de 10 a 33 unidades.

63. Altas hospitalarias Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.007e^{-0.007t}$$

donde $f(t)$ es la proporción de altas por día al final de t días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo será dada de alta al término de 100 días?

64. Gastos de un negocio Los gastos totales de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\, dt$$

Evalúe los gastos.

65. Encuentre el área de la región ubicada entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

66. Encuentre el área de la región ubicada entre las curvas $y = 2x^2$ y $y = 2 - 5x$ desde $x = -1$ hasta $x = \frac{1}{3}$.

67. Excedentes de los consumidores y de los productores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8$$

Determine los excedentes de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio de mercado.

68. Excedente de los consumidores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 4)^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 7$$

donde p (en miles) es el precio de 100 unidades cuando q cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

69. Biología En un estudio sobre mutación genética,[16] se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \widehat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt$$

donde u y v son razones de mutación de genes, las q son frecuencias de genes y n es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto q y t. Integre ambos lados de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v} \ln \left| \frac{q_0 - \widehat{q}}{q_n - \widehat{q}} \right|$$

70. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante, R, tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, se puede pensar que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \leq r \leq R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[17]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l}$$

donde P_1 y P_2 son las presiones registradas en los extremos del tubo, η (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l la longitud del tubo. La razón de volumen, Q, del fluido por todo el tubo está dada por

$$Q = \int_0^R 2\pi rv\, dr$$

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Observe que R aparece como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula utilizada para calcular la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

71. Inventario En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman[18] hacen referencia a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\, du$$

---

[16] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

[17] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[18] L. C. Barbosa y M. Friedman, "Deterministic Inventory Lot Size Models—a General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), pp. 819-826.

donde k y r son constantes, $k > 0$, $r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}$$

(*Sugerencia*: Considere dos casos: cuando $r \neq -1$ y cuando $r = -1$).

En los problemas del 72 al 74, estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

72. $y = x^3 + 9x^2 + 14x - 24, y = 0$

73. $y = x^3 + x^2 + x + 1, y = x^2 + 2x + 1$

74. $y = x^3 + x^2 - 5x - 3, y = x^2 + 2x + 3$

75. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2 \ln(q + 10) + 5$$

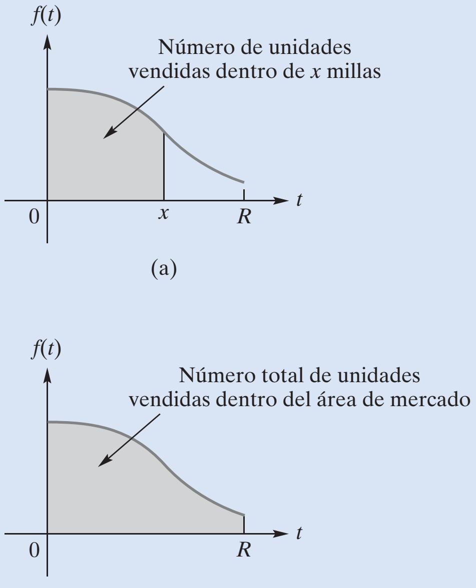
Determine los excedentes de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

EXPLORE Y AMPLÍE Precio de envío

Suponga que usted es fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de R millas alrededor de su fábrica. Suponga también que usted cobra a sus clientes el envío, a razón de s por milla, por cada unidad de producto vendido. Si m es el precio unitario en la fábrica, entonces el precio unitario p de entrega a un cliente situado a x millas de la fábrica será el precio de fábrica más el cargo por envío sx:

$$p = m + sx \qquad 0 \leq x \leq R \tag{1}$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.



(a)

(b)

FIGURA 10.47 Número de unidades vendidas como un área.

Suponga que existe una función f tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y que el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, desde $t = 0$ hasta $t = x$, representa el número total de unidades Q vendidas a clientes ubicados dentro de un radio de x millas a partir de la fábrica. [Vea la figura 10.47(a)]. Se puede hacer referencia a f como la distribución de la demanda. Debido a que Q es una función de x y se representa mediante un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área de mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\,dt$$

[vea la figura 10.47(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área de mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\,dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000$$

El precio promedio A de envío está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}$$

Como el denominador es $Q(R)$, A puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

Para encontrar el ingreso total, considere primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [vea la figura 10.48(a)], entonces el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, desde $t = 0$ hasta $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de t_1 millas a partir de la fábrica. De manera similar, el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, desde $t = 0$ hasta $t = t_2$, representa

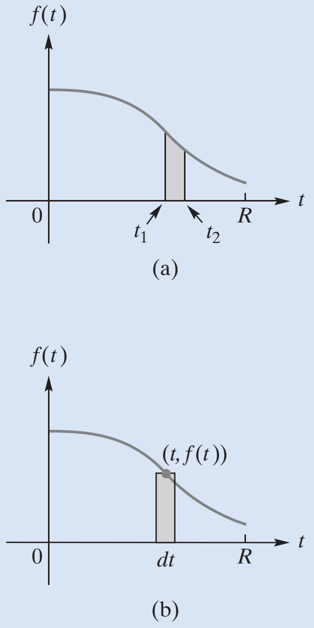


FIGURA 10.48 Número de unidades vendidas en un intervalo.

el número de unidades vendidas dentro de t_2 millas desde la fábrica. Así que la diferencia entre esas áreas es geométricamente el área de la región sombreada en la figura 10.48(a) y representa el número de unidades vendidas entre t_1 y t_2 millas desde la fábrica, lo cual es $Q(t_2) - Q(t_1)$. Por ende,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\,dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20$$

El área de la región sombreada en la figura 10.48(a) puede aproximarse mediante el área de un rectángulo [vea la figura 10.48(b)] cuya altura es $f(t)$ y cuyo ancho es dt, donde $dt = t_2 - t_1$. Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud dt es aproximadamente igual a $f(t)dt$. Como el precio de cada una de esas unidades es aproximadamente $m + st$ [a partir de la ecuación (1)], el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)dt$$

La suma de todos estos productos desde $t = 0$ hasta $t = R$ aproxima el ingreso total. La integración definida resulta en

$$\sum (m + st)f(t)\,dt \to \int_0^R (m + st)f(t)\,dt$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\,dt$$

En consecuencia, el precio promedio A de envío está dado por

$$A = \frac{\displaystyle\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{Q(R)}$$

En forma equivalente,

$$A = \frac{\displaystyle\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^R f(t)\,dt}$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, $m = 200$, $s = 0.25$ y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\,dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t)\cdot 10\,dt\\ &= 10\int_0^{100} (200 + 0.25t)\,dt\\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Big|_0^{100}\\ &= 10\left[\left(20\,000 + \frac{10\,000}{8}\right) - 0\right]\\ &= 212\,500\end{aligned}$$

Como ya se calculó antes,

$$\int_0^R f(t)\,dt = \int_0^{100} 10\,dt = 1000$$

Por lo tanto, el precio promedio de envío es de $212\,500/1000 = \$212.50$.

Problemas

1. Si $f(t) = 100 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas desde la fábrica y (b) entre 20 y 25 millas desde la fábrica.

2. Si $f(t) = 40 - 0.5t$, $m = 50$, $s = 0.20$ y $R = 80$, determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el precio promedio de envío.

3. Si $f(t) = 900 - t^2$, $m = 100$, $s = 1$ y $R = 30$, determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el precio promedio de envío. Si desea, utilice una calculadora gráfica.

4. En el mundo real, ¿cómo hacen los vendedores de cosas como libros o ropa para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para determinarlo). ¿Usted cómo podría calcular el precio promedio de envío de sus productos? ¿El procedimiento es fundamentalmente distinto del visto en esta aplicación práctica?

MÉTODOS Y APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

11

Ahora se sabe cómo determinar la derivada de una función y, en algunos casos, se conoce cómo encontrar una función a partir de su derivada mediante la integración. Sin embargo, el proceso de integración no siempre es directo.

Suponga que se modela la desaparición gradual de una sustancia química usando las ecuaciones $M' = -0.004t$ y $M(0) = 3000$, donde la cantidad M, en gramos, es una función del tiempo t en días. Este problema de condición inicial se resuelve con facilidad por medio de integración con respecto a t e identificando la constante de integración. El resultado es $M = -0.002t^2 + 3000$. Pero, ¿qué pasa si, en lugar de esto, la desaparición de la sustancia se modelara por medio de las ecuaciones $M' = -0.004M$ y $M(0) = 3000$? El simple reemplazo de t por M en la primera ecuación cambia el carácter del problema. Aún no se ha estudiado cómo encontrar una función cuando su derivada está descrita en términos de la misma función.

En la sección Explore y amplíe del capítulo 9 fue planteada una situación similar que involucra una ecuación con P de un lado y la derivada de P en el otro. Allí se usó una aproximación para resolver el problema. En este capítulo aprenderemos un método que produce una solución exacta para algunos problemas de este tipo.

Las ecuaciones de la forma $y' = ky$, donde k es constante, son especialmente comunes. Cuando y representa la cantidad de sustancia radiactiva, $y' = ky$ puede representar la tasa de su desaparición por decaimiento radiactivo. Y si y es la temperatura de un pollo recién sacado del horno o que se acaba de meter al congelador, entonces una fórmula, conocida como ley de enfriamiento de Newton, puede utilizarse para describir el cambio en la temperatura interna del pollo a lo largo del tiempo. La ley de Newton, que se analizará en este capítulo, podría usarse para recomendar procedimientos en la cocina de un restaurante de modo que los alimentos propensos a contaminación a través de crecimiento bacterial no permanezcan mucho tiempo en una zona de temperatura peligrosa (40 a 140 °F). (A este respecto, el crecimiento bacterial también sigue una ley del tipo $y' = ky$).

Objetivo

Desarrollar y aplicar la fórmula para la integración por partes.

11.1 Integración por partes[1]

Muchas integrales no se pueden encontrar con los métodos que se han estudiado hasta ahora. Sin embargo, hay modos de cambiar ciertas integrales a formas más fáciles de integrar. Se analizarán dos de estos métodos: la *integración por partes* y (en la sección 11.2), la *integración mediante fracciones parciales*.

Si u y v son funciones diferenciables de x, por la regla del producto, se tiene

$$(uv)' = uv' + vu'$$

Al reordenar los términos resulta

$$uv' = (uv)' - vu'$$

Integrando ambos lados con respecto a x, se obtiene

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx \qquad \textbf{(1)}$$

Para $\int (uv)'\,dx$, debe encontrarse una función cuya derivada con respecto a x sea $(uv)'$. Queda claro que uv es esa función. Por lo tanto, $\int (uv)'\,dx = uv + C_1$ y la ecuación (1) se convierte en

$$\int uv'\,dx = uv + C_1 - \int vu'\,dx$$

Al absorber a C_1 en la constante de integración para $\int vu'\,dx$ y reemplazar $v'dx$ por dv y $u'dx$ por du, se obtiene la *fórmula para la integración por partes*:

Fórmula para la integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \textbf{(2)}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$ en términos de otra integral, $\int v\,du$, que puede ser más fácil de encontrar.

Para aplicar la fórmula a una integral dada $\int f(x)dx$, se debe escribir $f(x)dx$ como el producto de dos factores (o *partes*) seleccionando una función u y una diferencial dv tales que $f(x)dx = u\,dv$. Sin embargo, para que la fórmula sea útil, se debe tener la capacidad de integrar la parte seleccionada como dv. Para ilustrar esto, considere

$$\int xe^x\,dx$$

Esta integral no puede determinarse mediante las fórmulas de integración previas. Una manera de escribir $xe^x\,dx$ en la forma $u\,dv$ es haciendo

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x\,dx$$

Para aplicar la fórmula de la integración por partes, se deben encontrar du y v:

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \int e^x\,dx = e^x + C_1$$

Así,

$$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\,dx \\ &= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

---

[1] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

La primera constante, C_1, no aparece en la respuesta final. Es fácil probar que la constante involucrada al encontrar v a partir de dv siempre se separará, por ello, a partir de ahora esta constante no se escribirá al determinar v.

Cuando se usa la fórmula de integración por partes, algunas veces la *mejor selección* de u y dv puede no ser obvia. En algunos casos, una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, solo una selección puede ser la adecuada. El discernimiento para hacer una buena selección (si ésta existe) se adquiere con la práctica y, desde luego, mediante prueba y error.

APLÍQUELO ▶

1. Se estima que las ventas mensuales de un teclado para computadora disminuyen a una tasa de $S'(t) = -4te^{0.1t}$ teclados por mes, donde t es el tiempo en meses y $S(t)$ es el número de teclados vendidos cada mes. Si ahora se venden 5000 teclados ($S(0) = 5000$), encuentre $S(t)$.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encuentre $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante integración por partes.

Solución: Se prueba

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Entonces

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \ln x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right) &= \int u\,dv = uv - \int v\,du\\ &= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2})\left(\frac{1}{x}\,dx\right)\\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2}\,dx\\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 2(2\sqrt{x}) + C \qquad x^{1/2} = \sqrt{x}\\ &= 2\sqrt{x}[\ln(x) - 2] + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

En el ejemplo 2 se muestra cómo puede hacerse una mala elección de u y dv. Si una elección no funciona, puede haber otra que sí lo haga.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Evalúe $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Solución: Como la integral no se ajusta a una forma conocida, se intentará la integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = \ln x\,dx$. Entonces $du = dx$, pero $v = \int \ln x\,dx$ no es evidente por inspección. Así que se hará una selección diferente para u y dv. Sean

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = x\,dx$$

Entonces

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x\,dx &= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx\\ &= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx\\ &= \frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\\ &= (2\ln 2 - 0) - \left(1 - \tfrac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 3 Integración por partes donde u es el integrando completo

Determine $\int \ln y\, dy$.

Solución: No es posible integrar ln y con los métodos previos, por lo que se tratará de integrar por partes. Sea $u = \ln y$ y $dv = dy$. Entonces $du = (1/y)dy$ y $v = y$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}\int \ln y\, dy &= (\ln y)(y) - \int y\left(\frac{1}{y}\,dy\right)\\ &= y\ln y - \int dy = y\ln y - y + C\\ &= y[\ln(y) - 1] + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 37 ◁

Antes de intentar la integración por partes, se debe ver si este procedimiento es realmente necesario. En ocasiones la integral puede resolverse mediante una técnica básica, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Forma de integración básica

Determine $\int xe^{x^2}\, dx$.

Solución: Esta integral puede ajustarse a la forma $\int e^u\, du$.

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int e^u\, du \qquad \text{donde } u = x^2\\ &= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

¡ADVERTENCIA!

Recuerde también las formas de integración más simples. Aquí no es necesaria la integración por partes.

En ocasiones la integración por partes debe usarse más de una vez, como se muestra en el ejemplo siguiente.

APLÍQUELO ▶

2. Suponga que una población de bacterias crece a una tasa de

$$P'(t) = 0.1t(\ln t)^2$$

Encuentre la forma general de $P(t)$.

EJEMPLO 5 Aplicación de la integración por partes dos veces

Determine $\int x^2e^{2x+1}\, dx$.

Solución: Sea $u = x^2$ y $dv = e^{2x+1}\, dx$. Entonces $du = 2x\, dx$ y $v = e^{2x+1}/2$.

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x+1}\, dx &= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2x\,dx)\\ &= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}\, dx\end{aligned}$$

Para encontrar $\int xe^{2x+1}\, dx$, se usará de nuevo la integración por partes. Aquí, sea $u = x$ y $dv = e^{2x+1}\, dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^{2x+1}/2$ y se tiene

$$\begin{aligned}\int xe^{2x+1}\, dx &= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}\, dx\\ &= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1\end{aligned}$$

Así,

$$\int x^2 e^{2x+1}\,dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C \qquad \text{donde } C = -C_1$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Ahora resuelva el problema 23 ◁

PROBLEMAS 11.1

1. Al aplicar la integración por partes a

$$\int f(x)\,dx$$

un estudiante encontró que $u = x$, $du = dx$, $dv = (x+5)^{1/2}$ y $v = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$. Use esta información para encontrar $\int f(x)\,dx$.

2. Use la integración por partes para encontrar

$$\int xe^{3x+1}\,dx$$

mediante la selección de $u = x$ y $dv = e^{3x+1}\,dx$.

En los problemas del 3 al 29, encuentre las integrales.

3. $\int xe^{-x}\,dx$

4. $\int xe^{ax}\,dx$ for $a \neq 0$

5. $\int y^3 \ln y\,dy$

6. $\int x^2 \ln x\,dx$

7. $\int \ln(4x)\,dx$

8. $\int \frac{t}{e^t}\,dt$

9. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx$

10. $\int \frac{12x}{\sqrt{1+4x}}\,dx$

11. $\int \frac{x}{(5x+2)^3}\,dx$

12. $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\,dx$

13. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

14. $\int \frac{2x+7}{e^{3x}}\,dx$

15. $\int_1^2 4xe^{2x}\,dx$

16. $\int_1^2 2xe^{-3x}\,dx$

17. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

18. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

19. $\int_5^8 \frac{4x}{\sqrt{9-x}}\,dx$

20. $\int (\ln x)^2\,dx$

21. $\int 3(2x-2)\ln(x-2)\,dx$

22. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

23. $\int x^2 e^x\,dx$

24. $\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x^9)\,dx$

25. $\int (x - e^{-x})^2\,dx$

26. $\int x^2 e^{3x}\,dx$

27. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

28. $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

29. $\int (e^x + x)^2\,dx$

30. Encuentre $\int \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,dx$. *Sugerencia*: Muestre que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x + \sqrt{x^2+1})] = \frac{1}{\sqrt{x^2 \quad 1}}$$

31. Encuentre el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = \ln x$ y la recta $x = e^3$.

32. Encuentre el área de la región limitada por el eje x y la curva $y = x^2 e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

33. Encuentre el área de la región limitada por el eje x y la curva $y = x^2 \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

34. Excedente de los consumidores Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = 5(q+5)e^{-(q+5)/5}$$

donde p es el precio por unidad cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre cuando $q = 7$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

35. Ingreso Suponga que el ingreso total r y el precio por unidad p son funciones diferenciables de la función de producción q.

(a) Use integración por partes para demostrar que

$$\int p\,dq = r - \int q\frac{dp}{dq}\,dq$$

(b) Utilice el inciso (a) para demostrar que

$$r = \int \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq$$

(c) Utilice el inciso (b) para demostrar que

$$r(q_0) = \int_0^{q_0} \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq$$

(*Sugerencia:* Revise la sección 14.7).

36. Suponga que f es una función diferenciable. Aplique la integración por partes a $\int f(x)e^x\,dx$ para demostrar que

$$\int f(x)e^x\,dx + \int f'(x)e^x\,dx = f(x)e^x + C$$

$$\left(\text{Por consiguiente,} \int [f(x) + f'(x)]e^x\,dx = f(x)e^x + C\right)$$

37. Suponga que f tiene una inversa y que $F' = f$. Use la integración por partes para desarrollar una fórmula útil para $\int f^{-1}(x)\,dx$ en términos de F y f^{-1}. [*Sugerencia*: Revise el ejemplo 3. Ahí se utilizó la idea que se requiere ahora, para el caso especial de $f(x) = e^x$]. Si $f^{-1}(a) = c$ y $f^{-1}(b) = d$, demuestre que

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = bd - ac - \int_c^d f(x)\,dx$$

Para $0 < a < b$ y $f^{-1} > 0$ en $[a, b]$, dibuje un diagrama que ilustre la última ecuación.

Objetivo

Mostrar cómo se integra una función racional propia expresándola primero como una suma de sus fracciones parciales.

11.2 Integración mediante fracciones parciales[2]

Recuerde que una *función racional* es un cociente de polinomios $N(x)/D(x)$ y que es *propia* si N y D no tienen un factor polinomial común y el grado del numerador N es menor que el grado del denominador D. Si N/D no es una función racional propia, entonces podemos usar la división larga para dividir $N(x)$ entre $D(x)$:

$$D(x)\overline{\smash{)}N(x)}^{\,Q(x)} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \hline R(x) \end{array} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Aquí el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ también son polinomios y $R(x)$ es el polinomio 0 constante o bien el grado de $R(x)$ es menor que el de $D(x)$. Por lo tanto, R/D es una función racional propia. Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \left(Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right) dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

y ya se sabe cómo integrar un polinomio, deducimos que la tarea de integrar funciones racionales se reduce a integrar funciones racionales *propias*. Es necesario enfatizar que la técnica a describir aquí requiere de una función racional propia, de manera que el paso de la división larga no es opcional. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx &= \int \left(2x + 1 + \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\right) dx \\ &= x^2 + x + \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx\end{aligned}$$

Factores lineales distintos

Ahora se considera

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx$$

Es indispensable que el denominador se exprese en forma factorizada:

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)}\,dx$$

Observe que en este ejemplo el denominador consiste solo en **factores lineales** y que cada factor se presenta exactamente una vez. Puede demostrarse que a cada factor $x - a$ le corresponde una *fracción parcial* de la forma

$$\frac{A}{x-a} \qquad A \text{ es una constante}$$

tal que el integrando es la suma de las fracciones parciales. Si se tienen n factores lineales *distintos*, se tendrán n fracciones parciales, cada una de las cuales resulta fácilmente integrable. Aplicando estos hechos, se puede escribir

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} \tag{1}$$

Para determinar las constantes A, B y C, primero se combinan los términos en el lado derecho:

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$$

---

[2] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Como los denominadores de ambos lados son iguales, sus numeradores se pueden igualar:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1) \tag{2}$$

Aunque la ecuación (1) no está definida para $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$, se desea encontrar valores para A, B y C que hagan verdadera la ecuación (2) para todos los valores de x, de manera que los dos lados de la ecuación proporcionen ecuaciones iguales. Al hacer sucesivamente a x igual a tres números cualesquiera diferentes en la ecuación (2), se obtiene un sistema de ecuaciones del que se puede despejar A, B y C. En particular, el trabajo puede simplificarse dándole a x los valores de las raíces de $D(x) = 0$; en este caso, $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. Usando la ecuación (2) se tiene, para $x = 0$,

$$-6 = A(1)(-3) + B(0) + C(0) = -3A, \quad \text{por lo que } A = 2$$

Si $x = -1$,

$$12 = A(0) + B(-1)(-4) + C(0) = 4B, \quad \text{por lo que } B = 3$$

Si $x = 3$,

$$-12 = A(0) + B(0) + C(3)(4) = 12C, \quad \text{por lo que } C = -1$$

Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)}\, dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}\right) dx \\ &= 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{x - 3} \\ &= 2 \ln |x| + 3 \ln |x + 1| - \ln |x - 3| + C \end{aligned}$$

Para la integral original, ahora se puede establecer que

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx = x^2 + x + 2 \ln |x| + 3 \ln |x + 1| - \ln |x - 3| + C$$

Un método alternativo para determinar A, B y C implica desarrollar el lado derecho de la ecuación (2) y agrupar términos semejantes:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 14x - 6 &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x) \\ &= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + Cx \\ 4x^2 - 14x - 6 &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (-3A) \end{aligned}$$

Para que esta última ecuación exprese una igualdad de funciones, los coeficientes de las potencias correspondientes de x deben ser iguales en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{cases} 4 = A + B + C \\ -14 = -2A - 3B + C \\ -6 = -3A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se tiene que $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$, igual que antes.

APLÍQUELO ▶

3. El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semana esta dado por $r'(q) = \frac{5(q+4)}{q^2+4q+3}$ donde $r(q)$ es el ingreso en miles. Encuentre la ecuación para $r(q)$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Determine $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}$ usando fracciones parciales.

Solución: Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no es necesaria la división larga. La integral puede escribirse como

$$\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx$$

Al expresar $(2x+1)/(x^2-9)$ como una suma de fracciones parciales, se tiene

$$\frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Combinando términos e igualando los numeradores resulta

$$2x+1 = A(x-3) + B(x+3)$$

Si $x = 3$, entonces

$$7 = 6B, \quad \text{por lo que } B = \frac{7}{6}$$

Si $x = -3$, entonces

$$-5 = -6A, \quad \text{por lo que } A = \frac{5}{6}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{3x^2-27}\,dx &= \frac{1}{3}\left(\int \frac{\frac{5}{6}\,dx}{x+3} + \int \frac{\frac{7}{6}\,dx}{x-3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\ln|x+3| + \frac{7}{6}\ln|x-3|\right) + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Factores lineales repetidos

Si el denominador de $N(x)/D(x)$ solo contiene factores lineales, algunos de los cuales están repetidos, entonces a cada factor $(x-a)^k$, donde k es el número máximo de veces que se presenta $x-a$ como factor, le corresponderá la suma de k fracciones parciales:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-a)^k}$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Determine $\int \frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$ usando fracciones parciales.

Solución: Como el grado del numerador, a saber, 2, es menor que el denominador, 3, no es necesaria la división larga. En el denominador, el factor lineal $x+2$ aparece una vez y el factor lineal $x+1$ aparece dos veces. Se deberán determinar entonces tres fracciones parciales y tres constantes, así que se tiene

$$\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$6x^2+13x+6 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

Seleccionamos $x = -2$, $x = -1$ y, por conveniencia, $x = 0$. Para $x = -2$ se tiene

$$4 = A$$

Si $x = -1$, entonces

$$-1 = C$$

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 6 &= A + 2B + 2C = 4 + 2B - 2 = 2 + 2B \\ 4 &= 2B \\ 2 &= B \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\,dx &= 4\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 4\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \ln\left[(x+2)^4(x+1)^2\right] + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

La última línea de la ecuación anterior es de alguna forma opcional (dependiendo de para qué se requiera la integral). Solamente ilustra que en problemas de este tipo, con frecuencia los logaritmos pueden combinarse.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Factores cuadráticos irreducibles distintos

Suponga que un factor cuadrático $x^2 + bx + c$ ocurre en $D(x)$ y que no puede expresarse como un producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Se dice que tal factor es un factor *cuadrático irreducible en los números reales*. A cada factor cuadrático irreducible distinto que ocurre solo una vez en $D(x)$, le corresponderá una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

Observe que incluso después de haber expresado una función racional en términos de fracciones parciales, todavía puede resultar imposible integrar utilizando solamente las funciones básicas que se estudian en este libro. Por ejemplo, un factor cuadrático irreducible muy simple es $x^2 + 1$ y aún así

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$$

donde $\tan^{-1}$ es la inversa de la función trigonométrica tan cuando tan se restringe a $(-\pi/2, \pi/2)$. En este libro no se analizan las funciones trigonométricas, pero cualquier buena calculadora tiene una tecla para calcular $\tan^{-1}$, tal como usted mismo puede comprobar.

EJEMPLO 3 Integral con un factor cuadrático irreducible distinto

Determine $\displaystyle\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x}\,dx$ usando fracciones parciales.

Solución: Como $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, se tiene el factor lineal x y el factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que no parece factorizable a simple vista. Si fuera factorizable en $(x - r_1)(x - r_2)$, con r_1 y r_2 reales, entonces r_1 y r_2 serían las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Por medio de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

Como no se tienen raíces reales, se concluye que $x^2 + x + 1$ es irreducible. Así, habrá dos fracciones parciales y *tres* constantes que determinar. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{-2x-4}{x(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1} \\ -2x - 4 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x \\ &= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx \\ 0x^2 - 2x - 4 &= (A + B)x^2 + (A + C)x + A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, se obtiene

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ -2 = A + C \\ -4 = A \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = -4$, $B = 4$ y $C = 2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\, dx &= \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= -4 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx \end{aligned}$$

Ambas integrales tienen la forma $\int \frac{du}{u}$, por lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\, dx &= -4 \ln |x| + 2 \ln |x^2 + x + 1| + C \\ &= \ln \left[\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^4} \right] + C \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Suponga que $D(x)$ contiene factores de la forma $(x^2 + bx + c)^k$, donde k es el número máximo de veces que ocurre el factor irreducible $x^2 + bx + c$. Entonces, a cada uno de tales factores le corresponde una suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A + Bx}{x^2 + bx + c} + \frac{C + Dx}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M + Nx}{(x^2 + bx + c)^k}$$

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Determine $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\, dx$ usando fracciones parciales.

Solución: Como el numerador tiene grado 5 y el denominador grado 4, primero se utiliza la división larga, lo que resulta en

$$\frac{x^5}{x^4 + 8x^2 + 16} = x - \frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2}$$

El factor cuadrático $x^2 + 4$ presente en el denominador de $(8x^3 + 16x)/(x^2 + 4)^2$ es irreducible y ocurre dos veces como factor. Así, a $(x^2 + 4)^2$ le corresponden dos fracciones parciales y se deben determinar *cuatro* coeficientes. De acuerdo con esto, se establece

$$\frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

y se obtiene

$$8x^3 + 16x = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

$$8x^3 + 0x^2 + 16x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + 4B + D$$

Al igualar los coeficientes de las potencias iguales de x, se obtiene

$$\begin{cases} 8 = A \\ 0 = B \\ 16 = 4A + C \\ 0 = 4B + D \end{cases}$$

Al resolver el sistema tenemos que $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \left(x - \left(\frac{8x}{x^2+4} - \frac{16x}{(x^2+4)^2}\right)\right)dx$$

$$= \int x\,dx - 4\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 8\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

En la línea precedente, la segunda integral tiene la forma $\int \frac{du}{u}$ y la tercera integral tiene la forma $\int \frac{du}{u^2}$. De modo que

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{x^2+4} + C$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

A partir de los ejemplos resueltos, usted debe haber deducido que el número de constantes necesarias para expresar $N(x)/D(x)$ por medio de fracciones parciales es igual al grado de $D(x)$, si asume que $N(x)/D(x)$ define una función racional propia. Ciertamente, este es el caso. Observe también que la representación de una función racional propia por medio de fracciones parciales es única; esto es, solo hay una posible opción para las constantes. Además, independientemente de la complejidad del polinomio $D(x)$, este siempre puede expresarse (teóricamente) como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

¡ADVERTENCIA!

También busque las soluciones simples.

APLÍQUELO ▶

4. La tasa de cambio con respecto al tiempo t (en años) de la población que vota en una ciudad se estima como $V'(t) = \frac{300t^3}{t^2+6}$. Encuentre la forma general de $V(t)$.

EJEMPLO 5 Una integral que no requiere fracciones parciales

Encuentre $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$.

Solución: Esta integral tiene la forma $\int \frac{1}{u}\,du$. Así,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1| + C$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

PROBLEMAS 11.2

En los problemas del 1 al 8, exprese la función racional dada en términos de fracciones parciales. Tome en cuenta cualquier división preliminar que sea necesaria.

1. $f(x) = \frac{10x}{x^2+7x+6}$

2. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$

3. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+5x+6}$

4. $f(x) = \frac{2x^2-15}{x^2+5x}$

5. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x+1}$

6. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x-1)}$

7. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x}$

8. $f(x) = \frac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$

En los problemas del 9 al 30, determine las integrales.

9. $\int \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$

10. $\int \frac{15x+5}{x^2+5x}\,dx$

11. $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}\,dx$

12. $\int \frac{2x-1}{x^2-x-12}\,dx$

13. $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4}\,dx$

14. $\int \frac{7(4-x^2)}{(x-4)(x-2)(x+3)}\,dx$

15. $\int \frac{19x^2-5x-36}{2x^3-2x^2-12x}\,dx$

16. $\int \frac{4-x}{x^4-x^2}\,dx$

17. $\int \frac{2(3x^5+4x^3-x)}{x^6+2x^4-x^2-2}\,dx$

18. $\int \frac{x^4-2x^3+6x^2-11x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

19. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)}\,dx$

20. $\int \frac{5x^3+x^2+x-3}{x^4-x^3}\,dx$

21. $\int \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x}\,dx$

22. $\int \frac{4x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+3)(x+1)(x-2)}\,dx$

23. $\int \frac{-x^3+8x^2-9x+2}{(x^2+1)(x-3)^2}\,dx$

24. $\int \frac{5x^4+9x^2+3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

25. $\int \frac{7x^3+24x}{(x^2+3)(x^2+4)}\,dx$

26. $\int \frac{12x^3+20x^2+28x+4}{3(x^2+2x+3)(x^2+1)}\,dx$

27. $\int \frac{3x^3+8x}{(x^2+2)^2}\,dx$

28. $\int \frac{3x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x-6}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2-2x}{x^2+7x+12}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+5x+5}{x^2+3x+2}\,dx$

31. Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{6(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

32. Excedente de los consumidores La ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = \frac{200(q+3)}{q^2+7q+6}$$

donde p es el precio por unidad cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre en el punto $(q, p) = (10, 325/22)$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

Objetivo

Ilustrar el uso de la tabla de integrales del apéndice B.

11.3 Integración por medio de tablas

Ciertas formas de integrales que se presentan con frecuencia pueden encontrarse en tablas estándar de fórmulas de integración.[3] En el apéndice B aparece una tabla corta cuyo uso se ilustrará en esta sección.

Una integral dada puede tener que transformarse a una forma equivalente para que se ajuste a una fórmula de la tabla. La forma equivalente debe concordar exactamente con la fórmula. En consecuencia, los pasos que se realicen para obtener la forma equivalente deben escribirse con cuidado en vez de hacerlos mentalmente. Antes de proseguir con los ejercicios que requieran de tablas, se recomienda estudiar cuidadosamente los ejemplos de esta sección.

En los ejemplos siguientes, los números de las fórmulas se refieren a los de la tabla de integrales seleccionadas que se proporciona en el apéndice B.

EJEMPLO 1 Integración por medio de tablas

Encuentre $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2}$

Solución: Al revisar la tabla, se identifica el integrando con la fórmula (7):

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C$$

Ahora veamos si es posible hacer coincidir de manera exacta el integrando dado con el de la fórmula. Si se reemplaza x por u, 2 por a y 3 por b, entonces $du = dx$ y, por sustitución, se tiene

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C$$

Volviendo a la variable x y reemplazando a por 2 y b por 3, se obtiene

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x}\right) + C$$

Note que la respuesta debe darse en términos de x, que es la variable *original* de integración.

Ahora resuelva el problema 5 ◁

EJEMPLO 2 Integración por medio de tablas

Encuentre $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución: Esta integral se identifica con la fórmula (24):

$$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

En la fórmula anterior, si usamos el signo inferior del símbolo dual "±" en el lado izquierdo, entonces deberá usarse también el signo inferior de los símbolos duales en el lado derecho.

---

[3] Vea, por ejemplo, W. H. Beyer (ed.), *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30a. ed. (Boca Ratón, Florida: CRC Press, 1996).

En la integral original, se hace $u = x$ y $a = 1$. Entonces $du = dx$ y, por sustitución, la integral se convierte en

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$$

Como $u = x$ y $a = 1$,

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

Ahora resuelva el problema 17 ◁

Este ejemplo, así como los ejemplos 4, 5 y 7, muestra cómo ajustar una integral de modo que se adecue a una de la tabla.

EJEMPLO 3 Integración por medio de tablas

Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2+3}}$.

Solución: El integrando puede identificarse con la fórmula (28):

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C$$

Al hacer $u = 4x$ y $a = \sqrt{3}$, resulta que $du = 4\,dx$. Observe con cuidado cómo, al insertar 4 en el numerador y en el denominador, se transforma la integral dada a una forma equivalente que coincide con la fórmula (28):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2+3}} = \int \frac{(4\,dx)}{(4x)\sqrt{(4x)^2+(\sqrt{3}\,)^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+3}-\sqrt{3}}{4x}\right| + C$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

EJEMPLO 4 Integración por medio de tablas

Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2-3x^2)^{1/2}}$.

Solución: El integrando se identifica con la fórmula (21):

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$$

Haciendo $u = \sqrt{3}x$ y $a^2 = 2$, se tiene $du = \sqrt{3}\,dx$. De modo que al insertar dos factores de $\sqrt{3}$ en el numerador y el denominador de la integral original, se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2(2-3x^2)^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{(\sqrt{3}\,dx)}{(\sqrt{3}x)^2[2-(\sqrt{3}x)^2]^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}\right] + C = \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{2-3x^2}}{2(\sqrt{3}x)}\right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{2x} + C$$

Ahora resuelva el problema 35 ◁

EJEMPLO 5 Integración por medio de tablas

Encuentre $\int 7x^2 \ln (4x)\, dx$.

Solución: Esto es similar a la fórmula (42) con $n = 2$:

$$\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1} \ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Si hacemos $u = 4x$, entonces $du = 4\, dx$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int 7x^2 \ln (4x)\, dx &= \frac{7}{4^3} \int (4x)^2 \ln (4x)(4\, dx)\\ &= \frac{7}{64} \int u^2 \ln u\, du = \frac{7}{64}\left(\frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9}\right) + C\\ &= \frac{7}{64}\left(\frac{(4x)^3 \ln (4x)}{3} - \frac{(4x)^3}{9}\right) + C\\ &= 7x^3\left(\frac{\ln (4x)}{3} - \frac{1}{9}\right) + C\\ &= \frac{7x^3}{9}(3 \ln (4x) - 1) + C\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 45 ◁

EJEMPLO 6 Integral en la que no se necesita la tabla

Encuentre $\int \frac{e^{2x}\, dx}{7 + e^{2x}}$.

Solución: A primera vista, el integrando no se identifica con ninguna forma incluida en la tabla. Tal vez sea de ayuda escribir de nuevo la integral. Sea $u = 7 + e^{2x}$, entonces $du = 2e^{2x}\, dx$. De modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}\, dx}{7 + e^{2x}} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2e^{2x}\, dx)}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C\\ &= \frac{1}{2} \ln |7 + e^{2x}| + C = \frac{1}{2} \ln (7 + e^{2x}) + C\end{aligned}$$

Así, únicamente se tuvo que usar el conocimiento de las formas básicas de integración. [En realidad, esta forma aparece como la fórmula (2) en la tabla, con $a = 0$ y $b = 1$].

Ahora resuelva el problema 39 ◁

EJEMPLO 7 Determinación de una integral definida mediante el uso de tablas

Evalúe $\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}}$.

Solución: Se usará la fórmula (32) para obtener primero la integral indefinida:

$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Haciendo $u = 2x$ y $a^2 = 2$, se tiene $du = 2\, dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2\, dx)}{((2x)^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\sqrt{u^2 + 2}}\right) + C\end{aligned}$$

Aquí se determinan los límites de integración con respecto a u.

En vez de sustituir los valores de x y evaluar la integral desde $x = 1$ hasta $x = 4$, es posible determinar los límites de integración correspondientes con respecto a u y luego evaluar la última expresión ubicada entre esos límites. Como $u = 2x$, cuando $x = 1$ se tiene $u = 2$; cuando $x = 4$, se tiene $u = 8$. Por consiguiente,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\sqrt{u^2+2}}\right)\Bigg|_2^8 = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

¡ADVERTENCIA!

Al cambiar la variable de integración x a la variable de integración u, asegúrese de cambiar los límites de integración de manera que concuerden con u.

Integración aplicada a anualidades

Las tablas de integrales son útiles al manejar integrales asociadas con anualidades. Suponga que usted debe pagar \$100 (dólares estadounidenses) al final de cada año durante los siguientes dos años. Del capítulo 5, recuerde que una serie de pagos sobre un periodo, como en este caso, se denomina *anualidad*. Si usted debiera liquidar la deuda ahora, en vez de en anualidades, pagaría el valor presente de los \$100 que vencen al final del primer año más el valor presente de los \$100 que vencen al final del segundo año. La suma de esos valores presentes es el valor presente de la anualidad. Ahora se considerará el valor presente de pagos hechos de manera continua en el intervalo de tiempo que va de $t = 0$ a $t = T$, con t en años, cuando el interés se compone de manera continua a una tasa anual de r.

Suponga que se hace un pago en el tiempo t de manera que, según una base anual, este pago es $f(t)$. Si se divide el intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de longitud dt (donde dt es pequeña), entonces la cantidad total de todos los pagos comprendidos en tal intervalo es aproximadamente igual a $f(t_i)dt$. [Por ejemplo, si $f(t) = 2000$ y dt fuese de un día, la cantidad total de los pagos sería $2000\,(\frac{1}{365})$]. El valor presente de esos pagos es de aproximadamente $e^{-rt_i}f(t_i)\,dt$.. En el intervalo $[0, T]$, el total de todos los valores presentes es

$$\sum e^{-rt_i}f(t_i)\,dt$$

Esta suma aproxima el valor presente A de la anualidad. Entre menor sea dt, mejor será la aproximación. Esto es, cuando $dt \to 0$, el límite de la suma es el valor presente. Sin embargo, este límite es también una integral definida. Esto es,

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt \qquad (1)$$

donde A es el **valor presente de una anualidad continua** a la tasa anual r (compuesta de manera continua) durante T años si un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año.

Se dice que la ecuación (1) da el **valor presente de un flujo continuo de ingreso**. La ecuación (1) puede usarse también para encontrar el valor presente de la utilidad futura de un negocio. En esta situación, $f(t)$ es la tasa anual de utilidad en el tiempo t.

También se puede considerar el valor *futuro* de una anualidad en vez de su valor presente. Si se hace un pago en el tiempo t, entonces el pago tiene cierto valor al *final* del periodo de la anualidad —esto es, $T - t$ años después—. Este valor es

$$\begin{pmatrix}\text{monto}\\ \text{del pago}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{interés sobre este pago}\\ \text{durante } T-t \text{ años}\end{pmatrix}$$

Si S es el total de esos valores para todos los pagos, entonces a S se le denomina *monto acumulado de una anualidad continua* y está dado por la fórmula:

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt$$

donde S es el **monto acumulado de una anualidad continua** al final de T años a la tasa anual r (compuesta de manera continua) cuando un pago en el tiempo t es a la tasa $f(t)$ por año.

EJEMPLO 8 Valor presente de una anualidad continua

Encuentre el valor presente (al entero más cercano) de una anualidad continua a una tasa anual de 8% durante 10 años si el pago en el tiempo t es a razón de t^2 por año.

Solución: El valor presente está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t}\,dt$$

Se usará la fórmula (39),

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$$

Esta expresión se llama *fórmula de reducción*, puesto que reduce una integral a una expresión que contiene una integral más fácil de determinar. Si $u = t$, $n = 2$ y $a = -0.08$, entonces $du = dt$ y se tiene

$$A = \left.\frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\right|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\int_0^{10} te^{-0.08t}\,dt$$

En la nueva integral, el exponente de t se ha reducido a 1. Es posible identificar esta integral con la de la fórmula (38),

$$\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C$$

haciendo $u = t$ y $a = -0.08$. Entonces $du = dt$ y

$$\begin{aligned} A = \int_0^{10} t^2e^{-0.08t}\,dt &= \left.\frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\right|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\left(\frac{e^{-0.08t}}{(-0.08)^2}(-0.08t-1)\right)\Bigg|_0^{10} \\ &= \frac{100e^{-0.8}}{-0.08} - \frac{2}{-0.08}\left(\frac{e^{-0.8}}{(-0.08)^2}(-0.8-1) - \frac{1}{(-0.08)^2}(-1)\right) \\ &\approx 185 \end{aligned}$$

El valor presente es de \$185.

Ahora resuelva el problema 59 ◁

PROBLEMAS 11.3

En los problemas 1 y 2, use la fórmula (19) del apéndice B para determinar las integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(25-4x^2)^{3/2}}$

En los problemas 3 y 4, use la fórmula (30) del apéndice B para determinar las integrales.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2+3}}$

4. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x^3\sqrt{x^4-9}}$

En los problemas del 5 al 38, encuentre las integrales usando la tabla del apéndice B.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(6+7x)}$

6. $\displaystyle\int \frac{5x^2\,dx}{(2+3x)^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+7)^{3/2}}$

9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2+3x)(4+5x)}$

10. $\displaystyle\int 2^{5x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2e^{3x}}$

12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{x(5+2x)^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5-11x^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2+x}$

16. $\displaystyle\int \frac{-3x^2\,dx}{2-5x}$

17. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-3}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+5x)(2x+3)}$

19. $\displaystyle\int_0^{1/12} xe^{12x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{5+3x}}\,dx$

21. $\displaystyle\int x^3e^x\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4\,dx}{x^2(1+x)}$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5x^2+1}}{2x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+3x)^2}$

26. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sqrt{(1+2x)(3+2x)}}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{7-5x^2}$

28. $\displaystyle\int 7x^2\sqrt{3x^2-6}\,dx$

29. $\displaystyle\int 36x^5\ln(3x)\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{x^2(3+2x)^2}$

31. $\int 5x\sqrt{1+2x}\,dx$

32. $\int 9x^2 \ln x\,dx$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-13}}$

34. $\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$

35. $\int \frac{2\,dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}}$

36. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\pi+7e^{4\sqrt{x}})}$

38. $\int_0^1 \frac{3x^2\,dx}{1+2x^3}$

En los problemas del 39 al 56, encuentre las integrales por cualquier método.

39. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

40. $\int 3x\sqrt{x}e^{x^{5/2}}\,dx$

41. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

42. $\int \frac{5x^3-\sqrt{x}}{2x}\,dx$

43. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

44. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}\,dx$

45. $\int x^3\ln x\,dx$

46. $\int (9x-6)e^{-30x+20}\,dx$

47. $\int 4x^3e^{3x^2}\,dx$

48. $\int_1^2 35x^2\sqrt{3+2x}\,dx$

49. $\int \ln^2 x\,dx$

50. $\int_1^e 3x\ln x^2\,dx$

51. $\int_{-2}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x}}$

52. $\int_2^3 x\sqrt{2+3x}\,dx$

53. $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$

54. $\int_0^{\ln 2} x^2e^{3x}\,dx$

55. $\int_1^2 x\ln(2x)\,dx$

56. $\int_3^5 dA$

57. Biología En un análisis sobre frecuencia genética,[4] aparece la integral

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q(1-q)}$$

donde las q representan frecuencias genéticas. Evalúe esta integral.

58. Biología Bajo ciertas condiciones, el número n de generaciones requeridas para cambiar la frecuencia de un gen de 0.3 a 0.1 está dado por[5]

$$n = -\frac{1}{0.4}\int_{0.3}^{0.1} \frac{dq}{q^2(1-q)}$$

Encuentre n (al entero más cercano).

59. Anualidad continua Encuentre el valor presente, al entero más cercano, de una anualidad continua con una tasa de interés anual de r durante T años si el pago en el tiempo t es a la tasa anual de $f(t)$, dado que

(a) $r = 0.04$ $T = 9$ $f(t) = 1000$

(b) $r = 0.06$ $T = 10$ $f(t) = 500t$

60. Si $f(t) = k$, donde k es una constante positiva, demuestre que el valor de la integral mostrada en la ecuación (1) de esta sección es

$$k\left(\frac{1-e^{-rT}}{r}\right)$$

61. Anualidad continua Encuentre el monto acumulado, al entero más cercano, de una anualidad continua a una tasa anual de r durante T años si el pago en el tiempo t es a una tasa anual de $f(t)$, dado que

(a) $r = 0.02$ $T = 10$ $f(t) = 100$

(b) $r = 0.01$ $T = 10$ $f(t) = 200$

62. Valor de un negocio Durante los próximos cinco años, las utilidades de un negocio en el tiempo t se estiman igual a \$50 000t por año. El negocio se va a vender a un precio igual al valor presente de esas futuras utilidades. A la decena más cercana, ¿a qué precio debe venderse el negocio si el interés se compone continuamente a una tasa anual del 7 por ciento?

Objetivo

Desarrollar el concepto del valor promedio de una función.

11.4 Valor promedio de una función

Para los tres números 1, 2 y 9, su valor promedio o *media* es su suma dividida entre 3. Al denotar esta media por $\bar{y}$, se tiene

$$\bar{y} = \frac{1+2+9}{3} = 4$$

En forma similar, suponga que se da una función f definida en el intervalo $[a, b]$ y que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en el intervalo. Entonces, el valor promedio de los n valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\bar{y} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \tag{1}$$

Se puede ir un paso más adelante. Se dividirá el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Seleccionamos x_i como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo. Como $[a, b]$

---

[4] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burges Publishing Company, 1964).

[5] E. O. Wilson y W. H. Bossert, *A Primer of Population Biology* (Stamford, Conn.: Sinauer Associates, Inc., 1971).

tiene longitud $b - a$, cada subintervalo tiene longitud $\dfrac{b-a}{n}$, la cual se llamará dx. Por ende, la ecuación (1) puede escribirse como

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{dx}{dx}\right)}{n} = \frac{\displaystyle\frac{1}{dx}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx}{n} = \frac{1}{n\,dx}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx \qquad (2)$$

Como $dx = \dfrac{b-a}{n}$, se deduce que $n\,dx = b — a$. De modo que la expresión $\dfrac{1}{n\,dx}$ incluida en la ecuación (2) puede reemplazarse con $\dfrac{1}{b-a}$. Además, cuando $n \to \infty$, el número de valores de la función usados para calcular $\bar{y}$ se incrementa y se obtiene el *valor promedio de la función f*, denotado por $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx\right] = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx$$

Pero el límite de la derecha es precisamente la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición

El ***valor promedio de una función*** $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota con $\bar{f}$ y está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Valor promedio de una función

Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [1, 2].

Solución:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{3}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

En el ejemplo 1 se encontró que el valor promedio de $y = f(x) = x^2$ en el intervalo [1, 2] es $\frac{7}{3}$. Este valor puede interpretarse de manera geométrica. Como

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

al despejar la integral se tiene

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}(2-1)$$

Sin embargo, esta integral da el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 2$. (Vea la figura 11.1). De la ecuación anterior, esta área es $\left(\frac{7}{3}\right)(2 — 1)$, la cual corresponde al área de un rectángulo cuya altura es el valor promedio $\bar{f} = \frac{7}{3}$ y cuyo ancho es $b - a = 2 - 1 = 1$.

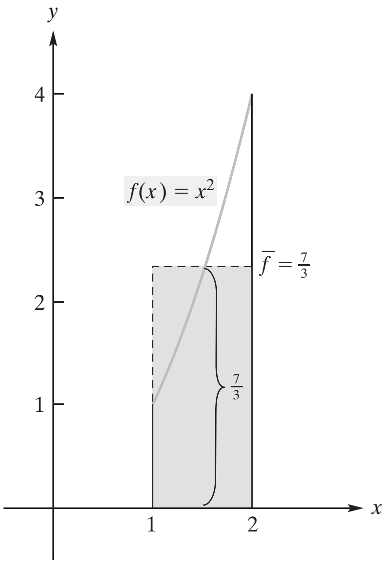


FIGURA 11.1 Interpretación geométrica del valor promedio de una función.

EJEMPLO 2 Flujo promedio de sangre

Suponga que el flujo de sangre en el tiempo t en cierto sistema está dado por

$$F(t) = \frac{F_1}{(1+\alpha t)^2} \qquad 0 \le t \le T$$

donde F_1 y α (letra griega "alfa") son constantes.[6] Encuentre el flujo promedio $\overline{F}$ en el intervalo $[0, T]$.

Solución:

$$\overline{F} = \frac{1}{T-0}\int_0^T F(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_1}{(1+\alpha t)^2}\,dt = \frac{F_1}{\alpha T}\int_0^T (1+\alpha t)^{-2}(\alpha\,dt)$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left(\frac{(1+\alpha t)^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_0^T = \frac{F_1}{\alpha T}\left(-\frac{1}{1+\alpha T}+1\right)$$

$$= \frac{F_1}{\alpha T}\left(\frac{-1+1+\alpha T}{1+\alpha T}\right) = \frac{F_1}{\alpha T}\left(\frac{\alpha T}{1+\alpha T}\right) = \frac{F_1}{1+\alpha T}$$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

PROBLEMAS 11.4

En los problemas del 1 al 8, encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^2$; $[-1, 3]$
2. $f(x) = 2x + 1$; $[0, 1]$
3. $f(x) = 2 - 3x^2$; $[-1, 2]$
4. $f(x) = x^2 + x + 1$; $[1, 3]$
5. $f(t) = 2t^5$; $[-3, 3]$
6. $f(t) = t\sqrt{t^2+9}$; $[0, 4]$
7. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 1]$
8. $f(x) = 5/x^2$; $[1, 3]$

9. Utilidad La utilidad de un negocio está dada por

$$P = P(q) = 369q - 2.1q^2 - 400$$

donde q es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio en el intervalo de $q = 0$ a $q = 100$.

10. Costo Suponga que el costo de producir q unidades de cierto artículo está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2$$

Encuentre el costo promedio en el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

11. Inversión Una inversión de $3000 gana interés a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Después de t años, su valor S está dado por $S = 3000e^{0.05t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a dos años.

12. Medicina Suponga que se inyecta un tinte en la corriente sanguínea a una razón constante R. En el tiempo t, sea

$$C(t) = \frac{R}{F(t)}$$

la concentración de tinte en un punto situado a cierta distancia (distal) desde el punto de inyección, donde $F(t)$ está dada en el ejemplo 2. Demuestre que la concentración promedio en $[0, T]$ es

$$\overline{C} = \frac{R\left(1 + \alpha T + \frac{1}{3}\alpha^2 T^2\right)}{F_1}$$

13. Ingreso Suponga que un fabricante recibe un ingreso r por la venta de q unidades de cierto producto. Demuestre que el valor promedio de la función de ingreso marginal en el intervalo $[0, q_0]$ es el precio por unidad cuando se han vendido q_0 unidades.

14. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante una técnica de integración aproximada. Redondee su respuesta a dos decimales.

Objetivo

Resolver una ecuación diferencial por medio del método de separación de variables. Analizar soluciones particulares y soluciones generales. Desarrollar el concepto de interés compuesto continuamente en términos de una ecuación diferencial. Estudiar el crecimiento y el decaimiento exponenciales.

11.5 Ecuaciones diferenciales

En algunas ocasiones, usted tendrá que resolver una ecuación que contenga la derivada de una función desconocida. Tal ecuación se llama **ecuación diferencial**. Un ejemplo es

$$y' = xy^2 \tag{1}$$

Con mayor precisión, la ecuación (1) se llama **ecuación diferencial de primer orden**, puesto que incluye una derivada de primer orden y ninguna de orden superior. Una solución de la ecuación (1) es cualquier función $y = f(x)$ que esté definida en un intervalo y satisfaga la ecuación para toda x incluida en el intervalo.

---

[6] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Para resolver $y' = xy^2$, o de manera equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \tag{2}$$

se piensa en dy/dx como un cociente de diferenciales y “se separan variables” algebraicamente al escribir de nuevo la ecuación de manera que cada miembro contenga solo una variable y no aparezcan diferenciales en ningún denominador:

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$$

Al integrar ambos lados y combinar las constantes de integración, se obtiene

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2C_1}{2}$$

Como $2C_1$ es una constante arbitraria, se reemplaza por C.

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2} \tag{3}$$

Despejando y de la ecuación (3), se tiene

$$y = -\frac{2}{x^2 + C} \tag{4}$$

Es posible verificar por sustitución que y es una solución de la ecuación diferencial (2):

Si y está dada por la ecuación (4), entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$$

aunque también

$$xy^2 = x\left[-\frac{2}{x^2 + C}\right]^2 = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$$

con lo cual se muestra que y satisface a (2). Observe que en la ecuación (4), para *cada* valor de C se obtuvo una solución diferente. A la ecuación (4) se le llama **solución general** de la ecuación diferencial. El método que se usa para encontrarla se llama **separación de variables**.

En el ejemplo anterior, suponga que se tiene la condición de que $y = -\frac{2}{3}$ cuando $x = 1$; esto es, $y(1) = -\frac{2}{3}$. Entonces la función *particular* que satisface a la ecuación (2) y a esta condición puede encontrarse por sustitución de los valores $x = 1$ y $y = -\frac{2}{3}$ en la ecuación (4) y despejando C:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{1^2 + C}$$

$$C = 2$$

Por lo tanto, la solución para una $dy/dx = xy^2$ tal que $y(1) = -\frac{2}{3}$ es

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2} \tag{5}$$

A la ecuación (5) se le llama **solución particular** de la ecuación diferencial.

APLÍQUELO ▶

5. Para un líquido claro, la intensidad de la luz disminuye a una razón de $\frac{dI}{dx} = -kI$, dónde I es la intensidad de la luz y x es el número de pies por debajo de la superficie del líquido. Si $k = 0.0085$ e $I = I_0$ cuando $x = 0$, encuentre I como una función de x.

EJEMPLO 1 Separación de variables

Resuelva $y' = -\frac{y}{x}$ si $x, y > 0$.

Solución: Al escribir y' como dy/dx, separar variables e integrar, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = C_1 - \ln|x|$$

Como $x, y > 0$, se pueden omitir las barras de valor absoluto:

$$\ln y = C_1 - \ln x \qquad (6)$$

Para despejar y, se convierte la ecuación (6) a su forma exponencial:

$$y = e^{C_1 - \ln x}$$

Por lo que,

$$y = e^{C_1} e^{-\ln x} = \frac{e^{C_1}}{e^{\ln x}}$$

Si se reemplaza e^{C_1} por C, donde $C > 0$, y se reescribe $e^{\ln x}$ como x, resulta

$$y = \frac{C}{x} \qquad C, x > 0$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

En el ejemplo 1, observe que la ecuación (6) expresa la solución de manera implícita, mientras que la ecuación final ($y = C/x$) proporciona la solución para y en forma explícita en términos de x. Las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales suelen expresarse en forma implícita por conveniencia (o por necesidad cuando se dificulta obtener una forma explícita).

Crecimiento y decaimiento exponenciales

El concepto del interés compuesto en forma continua se abordará desde un punto de vista diferente que involucra una ecuación diferencial. Suponga una inversión de P valor a una tasa anual r compuesta n veces por año. Sea la función $S = S(t)$ la cantidad compuesta S (o la cantidad total presente) después de t años contados desde la fecha de inversión inicial. Entonces el capital inicial es $S(0) = P$. Además, como se tienen n periodos de interés por año, cada periodo tiene una duración de $1/n$ años, lo que se denotará por dt. Al final del primer periodo, el interés acumulado se suma al capital y la suma actúa como el capital para el segundo periodo, y así sucesivamente. Por lo tanto, si el principio de un periodo de interés ocurre en el tiempo t, entonces el incremento en la cantidad presente al final de un periodo dt es $S(t + dt) - S(t)$, que se escribe como S. Este incremento, S, es también el interés ganado en el periodo. De manera equivalente, el interés ganado es el capital multiplicado por la tasa y por el tiempo:

$$S = S \cdot r \cdot dt$$

Al dividir ambos lados entre dt, se obtiene

$$\frac{\Delta S}{dt} = rS \qquad (7)$$

Cuando $dt \to 0$, entonces $n = \frac{1}{dt} \to \infty$ y, en consecuencia, el interés está siendo *compuesto continuamente*; esto es, el capital está sometido a un crecimiento continuo en cada instante. Sin embargo, cuando $dt \to 0$, entonces $S/dt \to dS/dt$ y la ecuación (7) toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = rS \qquad (8)$$

Esta ecuación diferencial significa que *cuando el interés es compuesto en forma continua, la razón de cambio de la cantidad de dinero presente en el tiempo t es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t*. La constante de proporcionalidad es r.

Para determinar la función S, se resuelve la ecuación diferencial (8) por el método de separación de variables:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

$$\frac{dS}{S} = r\,dt$$

$$\int \frac{1}{S}\,dS = \int r\,dt$$

$$\ln|S| = rt + C_1$$

Se supone que $S > 0$, por lo que $\ln|S| = \ln S$. Entonces,

$$\ln S = rt + C_1$$

Para obtener una forma explícita, se puede despejar S convirtiendo la ecuación a su forma exponencial.

$$S = e^{rt+C_1} = e^{C_1}e^{rt}$$

Por simplicidad, e^{C_1} puede reemplazarse por C (y entonces necesariamente $C > 0$) para obtener la solución general

$$S = Ce^{rt}$$

La condición $S(0) = P$ nos permite encontrar el valor de C:

$$P = Ce^{r(0)} = \mathrm{C} \cdot 1$$

Por consiguiente, $C = P$, entonces

$$S = Pe^{rt} \tag{9}$$

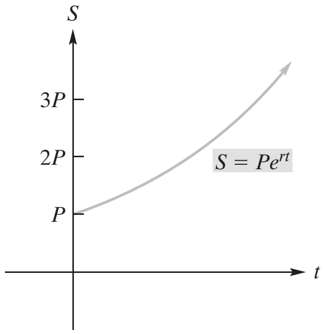


FIGURA 11.2 Composición en forma continua.

La ecuación (9) da el valor total después de t años de una inversión inicial de valor P compuesta continuamente a una tasa anual r. (Vea la figura 11.2).

En el análisis previo sobre interés compuesto, vimos en la ecuación (8) que la razón de cambio en la cantidad presente era proporcional a la cantidad presente. Hay muchas cantidades naturales, como la población, cuya tasa de crecimiento o decaimiento en cualquier tiempo se considera proporcional a la magnitud de la cantidad presente. Si N denota la magnitud de tal cantidad en el tiempo t, entonces esta razón de crecimiento significa que

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

donde k es una constante. Al separar variables y despejar N, como se hizo para la ecuación (8), se obtiene

$$N = N_0e^{kt} \tag{10}$$

donde N_0 es una constante. En particular, si $t = 0$, entonces $N = N_0e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 es simplemente $N(0)$. Debido a la forma de la ecuación (10), se dice que la cantidad sigue una **ley de crecimiento exponencial** si k es positiva y una **ley de decaimiento exponencial** si k es negativa.

EJEMPLO 2 Crecimiento de la población

En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de la población. Si la población era de 125 000 en 1970 y de 140 000 en 1990, ¿cuál es la población esperada para el año 2010? (No se consideran muertes por enfermedades ni otras variables).

Solución: Sea N el tamaño de la población en el tiempo t. Como la ley de crecimiento exponencial es aplicable,

$$N = N_0e^{kt}$$

Para encontrar la cantidad de población que habrá en 2010, primero debe encontrarse la ley de crecimiento particular implicada mediante la determinación de los valores de N_0 y k. Sea el año 1970 el correspondiente a $t = 0$. Entonces $t = 20$ en 1990 y $t = 40$ en 2010. Se tiene,

$$N_0 = N(0) = 125\ 000$$

Así,

$$N = 125\ 000e^{kt}$$

Para encontrar k, se usa la condición de que $N = 140\ 000$ cuando $t = 20$:

$$140\ 000 = 125\ 000e^{20k}$$

Entonces,

$$e^{20k} = \frac{140\ 000}{125\ 000} = 1.12$$

Por lo tanto, la ley de crecimiento es

$$\begin{aligned} N &= 125\ 000e^{kt} \\ &= 125\ 000(e^{20k})^{t/20} \\ &= 125\ 000(1.12)^{t/20} \end{aligned}$$

Al hacer $t = 40$, resulta la población esperada para 2010:

$$N = N(40) = 125\ 000(1.12)^2 = 156\ 800$$

Se observa que a partir de $e^{20k} = 1.12$ se tiene $20k = \ln(1.12)$ y, por consiguiente, $k = \dfrac{\ln(1.12)}{20} \approx 0.0057$, lo cual puede colocarse en $N = 125\ 000e^{kt}$ para obtener

$$N \approx 125\ 000e^{0.0057t} \tag{12}$$

Ahora resuelva el problema 23 ◁

En el capítulo 4 se analizó el decaimiento radiactivo. Aquí se considerará este tema desde el punto de vista de una ecuación diferencial. Se sabe que la razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dada por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{13}$$

La constante positiva λ (letra griega “lambda”) se llama **constante de decaimiento** y el signo menos indica que N disminuye cuando t aumenta. Por lo tanto, se tiene un decaimiento exponencial. A partir de la ecuación (10), la solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0e^{-\lambda t} \tag{14}$$

Si $t = 0$, entonces $N = N_0 \cdot 1 = N_0$, por lo que N_0 representa la cantidad de sustancia radiactiva presente cuando $t = 0$.

El tiempo requerido para que una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad se llama **vida media** de la sustancia. En la sección 3.2 se demostró que la vida media está dada por

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda} \tag{15}$$

Observe que la vida media depende de λ. En el capítulo 3, la figura 3.13 muestra la gráfica del decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 3 Determinación de la constante de decaimiento y de la vida media

Si después de 50 días queda el 60% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

Solución: De la ecuación (14),

$$N = N_0e^{-\cdot t}$$

donde N_0 es la cantidad del elemento presente en $t = 0$. Cuando $t = 50$, entonces $N = 0.67N_0$ y se tiene

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0 e^{-50\lambda} \\ 0.6 &= e^{-50\lambda} \\ -50\lambda &= \ln(0.6) && \text{forma logarítmica} \\ \lambda &= -\frac{\ln(0.6)}{50} \approx 0.01022 \end{aligned}$$

Así, $N \approx N_0 e^{-0.01022t}$. La vida media, a partir de la ecuación (15), es

$$\frac{\ln 2}{\lambda} \approx 67.82 \text{ días}$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

La radiactividad es útil en el fechado de restos de plantas fósiles y restos arqueológicos de origen orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contienen una pequeña cantidad de carbono 14 radiactivo (^{14}C) además del carbono ordinario (^{12}C). Los átomos de ^{12}C son estables, pero los de ^{14}C decaen exponencialmente. Sin embargo, el ^{14}C se forma en la atmósfera debido al efecto de los rayos cósmicos. Este ^{14}C es absorbido por las plantas durante el proceso de fotosíntesis y reemplaza al que ha decaído. En consecuencia, se considera que la razón de átomos de ^{14}C a ^{12}C es constante en los tejidos vivos durante un periodo largo. Cuando una planta muere, deja de absorber ^{14}C y los átomos restantes de ^{14}C decaen. Comparando la proporción de ^{14}C a ^{12}C presente en una planta fósil con la de las plantas de la actualidad, se puede estimar la edad del fósil. La vida media del ^{14}C es aproximadamente de 5730 años. Así, por ejemplo, si se encuentra que un fósil tiene una relación ^{14}C a ^{12}C que es la mitad de la de una sustancia similar que existe en la actualidad, se estimaría que el fósil tiene 5730 años de antigüedad.

EJEMPLO 4 Determinación de la edad de una herramienta antigua

Se encontró que una herramienta de madera hallada en una excavación en Medio Oriente tiene una relación de ^{14}C a ^{12}C igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual. Estime la edad de la herramienta al ciento de años más cercano.

Solución: Sea N la cantidad de ^{14}C presente en la madera t años después de que se fabricó la herramienta. Entonces $N = N_0 e^{-\lambda t}$, donde N_0 es la cantidad de ^{14}C cuando $t = 0$. Como la relación de ^{14}C a ^{12}C es igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual, esto significa que debe encontrarse el valor de t para el cual $N = 0.6N_0$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} 0.6N_0 &= N_0 e^{-\lambda t} \\ 0.6 &= e^{-\lambda t} \\ -\lambda t &= \ln(0.6) && \text{forma logarítmica} \\ t &= -\frac{1}{\lambda}\ln(0.6) \end{aligned}$$

De la ecuación (15), la vida media es $(\ln 2)/\lambda$, que es igual a 5730, por lo que $\lambda = (\ln 2)/5730$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{(\ln 2)/5730}\ln(0.6) \\ &= -\frac{5730\ln(0.6)}{\ln 2} \\ &\approx 4200 \text{ años} \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 29 ◁

PROBLEMAS 11.5

En los problemas del 1 al 8, resuelva las ecuaciones diferenciales.

1. $y' = 2xy^2$

2. $y' = x^2y^2$

3. $\dfrac{dy}{dx} - 2x\ln(x^2+1) = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = y, y > 0$

6. $y' = e^x y^3$

7. $y' = \dfrac{y}{x}, x, y > 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} - x\ln x = 0$

En los problemas del 9 al 18, resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

9. $y' = \dfrac{1}{y^2}; y(1) = 1$

10. $y' = e^{x-y}; y(0) = 0$ (*Sugerencia:* $e^{x-y} = e^x/e^y$).

11. $e^y y' - x^2 = 0;\quad y = 0$ cuando $x = 0$

12. $x^2y' + \dfrac{1}{y^2} = 0;\quad y(1) = 2$

13. $(3x^2+2)^3y' - xy^2 = 0;\quad y(0) = 2$

14. $y' + x^3y = 0;\quad y = e$ cuando $x = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1+y^2}}{y};\quad y > 0, y(1) = \sqrt{8}$

16. $2y(x^3+2x+1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+2}{\sqrt{y^2+9}};\quad y(0) = 0$

17. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2+3}};\quad y(1) = 0$

18. $dy = 2xye^{x^2}dx,\quad y > 0;\quad y(0) = e$

19. Costo Encuentre la función de costo $c = f(q)$ de un fabricante, dado que

$$(q+1)^2\frac{dc}{dq} = cq$$

y el costo fijo es e.

20. Encuentre $f(2)$, dado que $f(1) = 0$ y que $y = f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}$$

21. Circulación de dinero Un país tiene 1000 millones de papel moneda en circulación. Cada semana, 25 millones se llevan a depositar a los bancos y la misma cantidad se paga. El gobierno decide reimprimir papel moneda nuevo; siempre que el papel moneda viejo llega a los bancos, se destruye y se reemplaza por nuevo. Sea y la cantidad de papel viejo (en millones) en circulación en el tiempo t (en semanas). Entonces y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -0.025y$$

¿Cuánto tiempo será necesario para que 95% del papel moneda en circulación quede reemplazado por papel nuevo? Redondee su respuesta a la semana más cercana. (*Sugerencia*: Si 95% del papel es nuevo, entonces y es 5% de 1000).

22. Ingreso marginal y demanda Suponga que la función de ingreso marginal de un monopolista está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dq} = (50-4q)e^{-r/5}$$

Encuentre la ecuación de demanda para el producto del monopolista.

23. Crecimiento de la población En cierta ciudad, la población cambia en cualquier tiempo a una razón proporcional a la población existente. Si en 1990 la población era de 60 000 habitantes y en 2000 de 64 000, encuentre una ecuación apropiada para describir la población en el tiempo t, donde t es el número de años después de 1990. ¿Cuánta es la población esperada en 2010?

24. Crecimiento de la población La población de un pueblo se incrementa por crecimiento natural a una razón proporcional al número N de personas presentes. Si en el tiempo $t = 0$ la población es de 50 000, encuentre dos expresiones para la población N, t años después, si la población se duplica en 50 años. Suponga que $\ln 2 = 0.69$. Asimismo, encuentre N para $t = 100$.

25. Crecimiento de la población Suponga que en 1930 la población del mundo era de 2000 millones y que en 1960 era de 3000 millones. Al suponer una ley de crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada en 2015? Escriba su respuesta en términos de e.

26. Crecimiento de la población Suponiendo un crecimiento exponencial, ¿en cuántos años aproximadamente se duplicará una población si se triplica en 100 años? (*Sugerencia*: Sea N_0 la población en $t = 0$).

27. Radiactividad Si después de 100 segundos queda 30% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

28. Radiactividad Si después de 100 segundos ha *decaído* 20% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

29. Fechado con carbono Se encontró que un rollo de papiro egipcio tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.7 de la relación correspondiente a la de un material similar de la actualidad. Estime la edad del rollo al ciento de años más cercano.

30. Fechado con carbono Un espécimen arqueológico recientemente descubierto tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.1 de la relación correspondiente a la de un material orgánico similar en la actualidad. Estime la edad del espécimen al ciento de años más cercano.

31. Crecimiento de la población Suponga que una población tiene un crecimiento exponencial dado por $dN/dt = kN$ para $t \geq t_0$. Suponga también que $N = N_0$ cuando $t = t_0$. Encuentre N, el tamaño de la población en el tiempo t.

32. Radiactividad El polonio 210 tiene vida media aproximada de 140 días. (a) Encuentre la constante de decaimiento en términos de ln 2. (b) ¿Qué fracción de la cantidad original de una muestra de polonio 210 queda después de un año?

33. Radiactividad Los isótopos radiactivos se usan en los diagnósticos médicos como indicadores para determinar las anormalidades que puedan existir en un órgano. Por ejemplo, si se ingiere yodo radiactivo, este es absorbido después de cierto tiempo por la glándula tiroides. Con el uso de un detector, puede medirse la razón a la que el yodo se absorbe y determinarse si ésta es la razón normal. Suponga que el tecnecio-99m radiactivo, que tiene vida media de seis horas, se va a usar en un estudio de cerebro dentro de dos horas. ¿Cuál debe ser su actividad ahora si cuando sea usado su actividad deberá ser de 12 unidades? Redondee su respuesta a un decimal. [*Sugerencia*: En la ecuación (14), haga N = actividad dentro de t horas y N_0 = actividad actual].

34. Radiactividad Una sustancia radiactiva que tiene vida media de ocho días se va a implantar de manera temporal en un paciente de hospital hasta que queden tres quintas partes de la cantidad originalmente presente. ¿Cuánto tiempo permanecerá la sustancia implantada en el paciente?

35. Ecología En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como hojas y ramas caídas, animales muertos, etc.[7] Sea $A = A(t)$ la cantidad de basura presente en el tiempo t, donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t está en años. Suponga que no hay basura en $t = 0$. Así, $A(0) = 0$. Suponga que:

(**a**) La basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro cuadrado cada año.

(**b**) La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50% de la cantidad presente por año (que es $0.50A$).

La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo:

$$\begin{pmatrix}\text{tasa de cambio de}\\ \text{la basura presente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tasa de}\\ \text{caída al suelo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de}\\ \text{descomposición}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0.50A$$

Despeje A. Al gramo más cercano, determine la cantidad de basura acumulada por metro cuadrado después de un año.

36. Utilidad y publicidad Cierta compañía determina que la razón de cambio de la utilidad neta mensual P, como una función del gasto publicitario mensual x, es proporcional a la diferencia entre una cantidad fija, \$150 000 y $2P$; esto es, dP/dx es proporcional a $\$150\,000 - 2P$. Además, si no se gasta dinero en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$15 000; cuando se gastan \$1000 en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$70 000. ¿Cuál sería la utilidad neta mensual si se gastaran \$2000 en publicidad cada mes?

37. Valor de una máquina El valor de cierta máquina se deprecia 25% en el primer año después de su compra. La razón de la depreciación posterior es proporcional a su valor. Suponga que dicha máquina se compró nueva el 1 de julio de 1995 en \$80 000 y se valuó en \$38 900 el 1 de enero de 2006.

(a) Determine una fórmula que exprese el valor V de la máquina en términos de t, el número de años después del 1 de julio de 1996.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para determinar el año y el mes en que la máquina tiene un valor de exactamente \$14 000.

Objetivo

Desarrollar la función logística como una solución de una ecuación diferencial. Modelar el esparcimiento de un rumor. Analizar y aplicar la ley de enfriamiento de Newton.

11.6 Más aplicaciones de ecuaciones diferenciales

Crecimiento logístico

En la sección anterior se encontró que si el número N de individuos presentes en una población en el tiempo t sigue una ley de crecimiento exponencial, entonces $N = N_0e^{kt}$, donde $k > 0$ y N_0 es la población cuando $t = 0$. Esta ley supone que en el tiempo t la razón de crecimiento, dN/dt, de la población es proporcional al número de individuos que hay en la población. Esto es, $dN/dt = kN$.

Bajo crecimiento exponencial, una población llegaría a ser infinitamente grande con el paso del tiempo. Sin embargo, en realidad, cuando una población llega a ser lo suficientemente grande, factores ambientales vuelven más lenta la razón de crecimiento. Ejemplos de tales factores son la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la sobrepoblación, etc. Estos factores ocasionan que en algún momento dN/dt comience a disminuir. Es razonable suponer que el tamaño de la población está limitado a cierto número máximo M, donde $0 < N < M$, y que cuando $N \to M$, $dN/dt \to 0$ y el tamaño de la población tiende a ser estable.

En resumen, se busca un modelo de población que tenga un crecimiento inicial exponencial pero que también incluya los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población. Tal modelo se obtiene multiplicando el lado derecho de $dN/dt = kN$ por el factor $(M - N)/M$:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M-N}{M}\right)$$

Observe que si N es pequeña, entonces $(M - N)/M$ es cercano a 1 y se tiene un crecimiento que es aproximadamente exponencial. Cuando $N \to M$, entonces $M - N \to 0$ y $dN/dt \to 0$, como en el modelo que se busca. Debido a que k/M es una constante, ésta puede reemplazarse por K. Así,

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N) \tag{1}$$

Lo cual establece que la razón de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño real de la población. Ahora es posible determinar N en la ecuación diferencial (1) utilizando el método de separación

---

[7] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

de variables:

$$\frac{dN}{N(M-N)} = K\,dt$$

$$\int \frac{1}{N(M-N)}\,dN = \int K\,dt \tag{2}$$

La integral que aparece en el lado izquierdo puede encontrarse usando la fórmula (5) de la tabla de integrales del apéndice B. Así, la ecuación (2) se convierte en

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = Kt + C$$

entonces

$$\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = MKt + MC$$

Como $N > 0$ y $M - N > 0$, es posible escribir

$$\ln\frac{N}{M-N} = MKt + MC$$

En forma exponencial, se tiene

$$\frac{N}{M-N} = e^{MKt+MC} = e^{MKt}\,e^{MC}$$

Al reemplazar la constante positiva e^{MC} por A y despejar N se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{N}{M-N} &= Ae^{MKt}\\ N &= (M-N)Ae^{MKt}\\ N &= MAe^{MKt} - NAe^{MKt}\\ NAe^{MKt} + N &= MAe^{MKt}\\ N(Ae^{MKt}+1) &= MAe^{MKt}\\ N &= \frac{MAe^{MKt}}{Ae^{MKt}+1}\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Ae^{MKt}, resulta

$$N = \frac{M}{1+\dfrac{1}{Ae^{MKt}}} = \frac{M}{1+\dfrac{1}{A}e^{-MKt}}$$

Al reemplazar $1/A$ por b y MK por c se obtiene la llamada *función logística*:

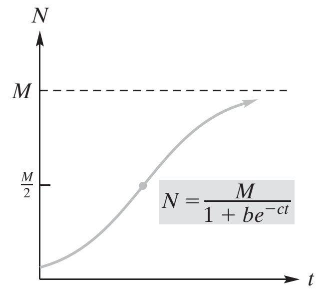


FIGURA 11.3 Curva logística.

Función logística

La función definida por

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}} \tag{3}$$

se llama **función logística** o **función logística de Verhulst-Pearl**.

La gráfica de la ecuación (3), llamada *curva logística*, tiene forma de S, tal como se muestra en la figura 11.3. Observe que la recta $N = M$ es una asíntota horizontal; esto es,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M}{1+be^{-ct}} = \frac{M}{1+b(0)} = M$$

Además, a partir de la ecuación (1), la tasa de crecimiento es

$$KN(M-N)$$

que puede considerarse como una función de N. Para encontrar cuándo ocurre la máxima razón de crecimiento, se despeja N de $\frac{d}{dN}[KN(M-N)] = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dN}[KN(M-N)] &= \frac{d}{dN}[K(MN-N^2)]\\ &= K[M-2N] = 0\end{aligned}$$

Así, $N = M/2$. En otras palabras, la razón de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es $M/2$ y después disminuye. La razón máxima de crecimiento ocurre cuando $N = M/2$ y corresponde a un punto de inflexión en la gráfica de N. Para encontrar el valor de t en el que ocurre esto, se sustituye $M/2$ por N en la ecuación (3) y se despeja t:

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} &= \frac{M}{1+be^{-ct}}\\ 1+be^{-ct} &= 2\\ e^{-ct} &= \frac{1}{b}\\ e^{ct} &= b\\ ct &= \ln b \qquad \text{forma logarítmica}\\ t &= \frac{\ln b}{c}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón máxima de crecimiento ocurre en el punto $((\ln b]/c, M/2)$.

Se observa que es posible reemplazar e^{-c} por C en la ecuación (3) y entonces la función logística tiene la siguiente forma:

Forma alternativa de la función logística

$$N = \frac{M}{1+bC^t}$$

EJEMPLO 1 Crecimiento logístico de la membresía de un club

Suponga que el número máximo de socios en un club nuevo será de 800 personas debido a las limitaciones de espacio. Hace un año, el número inicial de socios era de 50 personas, pero ahora es de 200. Si el número de socios aumenta como una función logística, ¿cuántos socios habrá dentro de tres años?

Solución: Sea N el número de socios inscritos t años después de la formación del club. Entonces, a partir de la ecuación (3),

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}}$$

Aquí, $M = 800$ y cuando $t = 0$, se tiene $N = 50$. De manera que

$$\begin{aligned}50 &= \frac{800}{1+b}\\ 1+b &= \frac{800}{50} = 16\\ b &= 15\end{aligned}$$

Así,

$$N = \frac{800}{1+15e^{-ct}} \tag{4}$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 200$, así que se tiene

$$\begin{aligned} 200 &= \frac{800}{1 + 15e^{-c}} \\ 1 + 15e^{-c} &= \frac{800}{200} = 4 \\ e^{-c} &= \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $c = -\ln \frac{1}{5} = \ln 5$. En vez de sustituir este valor de c en la ecuación (4), es más conveniente sustituir el valor de e^{-c} ahí:

$$N = \frac{800}{1 + 15\left(\frac{1}{5}\right)^t}$$

Dentro de tres años, t será 4. Por lo tanto,

$$N = \frac{800}{1 + 15\left(\frac{1}{5}\right)^4} \approx 781$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

Modelado de la difusión de un rumor

Ahora se considerará un modelo simplificado de cómo se difunde un rumor en una población de tamaño M. Una situación similar sería la difusión de una epidemia o de una nueva moda.

Sea $N = N(t)$ el número de personas que conocen el rumor en el tiempo t. Se supondrá que quienes conocen el rumor lo difunden en forma aleatoria entre la población y que quienes lo oyen se convierten en difusores del rumor. Además, se supondrá que cada conocedor del rumor lo comunica a k individuos por unidad de tiempo. (Algunos de estos k individuos pueden conocer ya el rumor). Se busca una expresión para describir la razón de crecimiento de conocedores del rumor. En una unidad de tiempo, casi cada una de N personas comunicarán el rumor a k personas. Así, el número total de personas que oyen el rumor en un tiempo unitario es (aproximadamente) Nk. Sin embargo, se tiene interés solo en los *nuevos* conocedores. La proporción de la población que no conoce el rumor es $(M - N)/M$. De modo que el número total de nuevos conocedores del rumor es

$$Nk\left(\frac{M - N}{M}\right)$$

que puede escribirse como $(k/M)N(M - N)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{k}{M}N(M - N) \\ &= KN(M - N), \qquad \text{donde } K = \frac{k}{M} \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (1), por lo que su solución, a partir de la ecuación (3), es una *función logística*:

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

EJEMPLO 2 Rumor en un campus

En una gran universidad de 45 000 estudiantes, una estudiante de sociología está investigando la difusión de un rumor en el campus. Cuando comienza su investigación, determina que 300 estudiantes conocen el rumor. Después de una semana, determina que 900 lo conocen. Suponiendo un crecimiento logístico, estime el número de estudiantes que conocen el rumor después de cuatro semanas de comenzada la investigación. Redondee la respuesta al millar más cercano.

Solución: Sea N el número de estudiantes que conocen el rumor t semanas después de que comienza la investigación. Entonces,

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

Aquí M, el tamaño de la población, es de 45 000 y cuando $t = 0$, $N = 300$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} 300 &= \frac{45\,000}{1 + b} \\ 1 + b &= \frac{45\,000}{300} = 150 \\ b &= 149 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{45\,000}{1 + 149e^{-ct}}$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 900$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 900 &= \frac{45\,000}{1 + 149e^{-c}} \\ 1 + 149e^{-c} &= \frac{45\,000}{900} = 50 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e^{-c} = \frac{49}{149}$, entonces

$$N = \frac{45\,000}{1 + 149\left(\frac{49}{149}\right)^t}$$

Cuando $t = 4$,

$$N = \frac{45\,000}{1 + 149\left(\frac{49}{149}\right)^4} \approx 16\,000$$

Después de cuatro semanas, aproximadamente 16 000 estudiantes conocerán el rumor.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Ley de enfriamiento de Newton

Esta sección concluye con una interesante aplicación de una ecuación diferencial. En un homicidio, la temperatura del cuerpo de la víctima disminuirá gradualmente de 37 °C (temperatura normal del cuerpo) a la temperatura del entorno (temperatura ambiente). En general, la temperatura de un cuerpo en proceso de enfriamiento cambia a una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Este enunciado se conoce como **ley de enfriamiento de Newton**. Así, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y la del medio ambiente es a, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, la ley de enfriamiento de Newton es una ecuación diferencial. Puede aplicarse para determinar el momento en que se cometió un homicidio, tal como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Momento del asesinato

Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a la escena del crimen a las 11:00 p.m. La temperatura del cadáver era de 31 °C en ese momento y una hora después era de 30 °C. La temperatura de la habitación en que se encontró el cadáver era de 22 °C. Estime la hora en que ocurrió el asesinato.

Solución: Sean t el número de horas después de que fue descubierto el cadáver y $T(t)$ la temperatura (en grados Celsius) de este en el tiempo t. Se desea encontrar el valor de t para el cual $T = 37$ (temperatura normal del cuerpo). Este valor de t será, por supuesto, negativo. Por la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a)$$

donde k es una constante y a (la temperatura ambiente) es 22. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22)$$

Separando variables, se tiene

$$\frac{dT}{T - 22} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 22} = \int k\,dt$$

$$\ln|T - 22| = kt + C$$

Debido a que $T - 22 > 0$,

$$\ln(T - 22) = kt + C$$

Cuando $t = 0$, entonces $T = 31$. Por lo tanto,

$$\ln(31 - 22) = k \cdot 0 + C$$

$$C = \ln 9$$

Por consiguiente,

$$\ln(T - 22) = kt + \ln 9$$

$$\ln(T - 22) - \ln 9 = kt$$

$$\ln \frac{T - 22}{9} = kt \qquad \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Cuando $t = 1$, entonces $T = 30$, por lo que

$$\ln \frac{30 - 22}{9} = k \cdot 1$$

$$k = \ln \frac{8}{9}$$

Por lo tanto,

$$\ln \frac{T - 22}{9} = t \ln \frac{8}{9}$$

Ahora encuentre t cuando $T = 37$:

$$\ln \frac{37 - 22}{9} = t \ln \frac{8}{9}$$

$$t = \frac{\ln(15/9)}{\ln(8/9)} \approx -4.34$$

De acuerdo con esto, el crimen ocurrió aproximadamente 4.34 horas *antes* del tiempo en que fue descubierto el cadáver (11:00 p.m.). Como 4.34 horas son (aproximadamente) 4 horas 20 minutos, el industrial fue asesinado alrededor de las 6:40 p.m.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

PROBLEMAS 11.6

1. Población La población de una ciudad sigue un crecimiento logístico y está limitada a 100 000 individuos. Si en 1995 la población era de 50 000 y en 2000 de 60 000, ¿cuánta población había en 2005? Redondee su respuesta a la centena más cercana.

2. Producción Una compañía cree que la producción de cierto artículo con sus instalaciones actuales tendrá un crecimiento logístico. En la actualidad se producen 200 unidades diarias y esta cantidad crecerá a 300 por día en un año. Si la producción se limita a 500 unidades por día, ¿cuál es la producción diaria prevista para dentro de dos años? Redondee su respuesta a la unidad más cercana.

3. Difusión de un rumor En una universidad de 40 000 estudiantes, la administración sostiene reuniones para analizar la idea de llevar una importante banda de rock para el fin de semana siguiente al regreso a clases. Antes de anunciar oficialmente los planes, el concejo administrativo difunde la información acerca del evento como un rumor. Al final de una semana, 100 personas conocen el rumor. Suponiendo un crecimiento logístico, ¿cuánta gente conocerá el rumor después de dos semanas? Redondee su respuesta a la centena más cercana.

4. Propagación de una moda En una universidad con 50 000 estudiantes, se cree que el número de estudiantes con un tono de timbre especial en sus teléfonos móviles está siguiendo un patrón de crecimiento logístico. El periódico estudiantil investiga cuándo revela una encuesta que 500 estudiantes tienen el tono de llamada. Una semana después, una encuesta similar publica que 1500 estudiantes lo tienen. El periódico escribe una historia sobre esto e incluye una fórmula para predecir el número $N = N(t)$ de los estudiantes que tendrá el tono de llamada t semanas después de la primera encuesta. ¿Cuál es la fórmula que publica el periódico?

5. Brote de gripe En una ciudad de 100 000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando el departamento de salud comienza a registrar casos, hay solo 500 personas infectadas. Una semana después hay 1000 infectados. Suponiendo un crecimiento logístico, estime el número de personas infectadas dos semanas después de que comenzó el registro.

6. Función sigmoide Un caso muy especial de la función logística definida por la ecuación (3) es la *función sigmoide*, obtenida al tomar $M = b = c = 1$ de manera que se tiene

$$N(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

(a) Muestre de manera directa que la función sigmoide es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - N)$$

y la condición inicial $N(0) = 1/2$

(b) Muestre que $(0, 1/2)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función sigmoide.

(c) Muestre que la función

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} - \frac{1}{2}$$

es simétrica con respecto al origen.

(d) Explique cómo el inciso (c) anterior demuestra que la función sigmoide es *simétrica con respecto al punto* $(0, 1/2)$ y, al mismo tiempo, explique lo que esto significa.

(e) Bosqueje la gráfica de la función sigmoide.

7. Biología En un experimento,[8] cinco *Paramecia* se colocaron en un tubo de ensayo que contenía un medio nutritivo. El número N de *Paramecia* presente en el tubo al final de t días está dado, aproximadamente, por

$$N = \frac{375}{1 + e^{5.2 - 2.3t}}$$

(a) Demuestre que esta ecuación se puede escribir como

$$N = \frac{375}{1 + 181.27e^{-2.3t}}$$

por lo que es una función logística.

(b) Encuentre $\lim_{t\to\infty} N$.

8. Biología En un estudio del crecimiento de una colonia de organismos unicelulares,[9] se obtuvo la siguiente ecuación

$$N = \frac{0.2524}{e^{-2.128x} + 0.005125} \qquad 0 \le x \le 5$$

donde N es el área estimada del crecimiento en centímetros cuadrados y x es la edad de la colonia en días después de la primera observación.

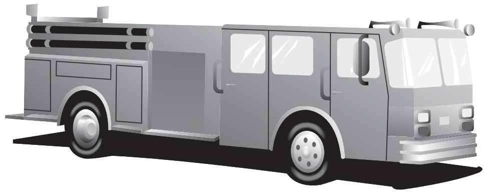
(a) Escriba esta ecuación en la forma de una función logística.

(b) Encuentre el área cuando la edad de la colonia es 0.

9. Tiempo de un asesinato Se cometió un homicidio en un almacén abandonado y la policía descubrió el cuerpo de la víctima a las 3:17 a.m. En ese momento la temperatura del cadáver era de 27 °C y la temperatura del almacén era de -5 °C. Una hora después la temperatura del cadáver era de 19 °C y no había cambiado la temperatura del almacén. La matemática forense de la policía realiza sus cálculos utilizando la ley de enfriamiento de Newton. ¿A qué hora reportará que ocurrió el asesinato?

10. Formación de enzimas Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima A se convierte en otra enzima B. La enzima B actúa como catalizador en su propia formación. Sean p la cantidad de enzima B en el tiempo t e I la cantidad total de ambas enzimas cuando $t = 0$. Suponga que la razón de formación de B es proporcional a $p(I - p)$. Sin usar el cálculo en forma directa, encuentre el valor de p para el cual la razón de formación será un máximo.

11. Recolección de fondos Un pueblo pequeño decide realizar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta \$200 000. La cantidad inicial en la colecta es de \$50 000. Con base en colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio de esta colecta, la razón dx/dt con la que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada de \$200 000 y la cantidad total x que haya en el fondo en ese momento. Después de un mes se tiene un total de \$100 000 en el fondo. ¿Cuánto se tendrá después de tres meses?



12. Tasa de nacimientos En un análisis de las propiedades inesperadas de modelos matemáticos de población, Bailey[10] considera el caso en que la tasa de nacimientos por *individuo* es proporcional al tamaño N de la población en el tiempo t. Como la tasa de crecimiento por individuo es $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, esto significa que

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = kN$$

de manera que

$$\frac{dN}{dt} = kN^2 \qquad \text{sujeta a } N = N_0 \text{ en } t = 0$$

donde $k > 0$. Demuestre que

$$N = \frac{N_0}{1 - kN_0t}$$

Use este resultado para demostrar que

$$\lim N = \infty \quad \text{como} \quad t \to \left(\frac{1}{kN_0}\right)^{-}$$

Esto significa que en un intervalo finito de tiempo hay una cantidad infinita de crecimiento. Tal modelo solo podría ser útil para calcular un crecimiento rápido en un intervalo corto de tiempo.

13. Población Suponga que la razón de crecimiento de una población es proporcional a la diferencia entre algún tamaño máximo M y el número N de individuos presentes en la población en el tiempo t. Suponga también que cuando $t = 0$, el tamaño de la población es N_0. Encuentre una fórmula para N.

---

[8] G. F. Gause, *The Struggle for Existence* (Nueva York: Hafner Publishing Co., 1964).

[9] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

[10] N. T. J. Bailey, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine* (Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).

Objetivo

Definir y evaluar integrales impropias.

11.7 Integrales impropias

Suponga que $f(x)$ es continua y no negativa para $a \leq x < \infty$. (Vea la figura 11.4). Se sabe que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área de la región ubicada entre la curva $y = f(x)$ y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$. Cuando $b \to \infty$, se puede pensar en

$$\lim_{b\to\infty} \int_a f(x)\,dx$$

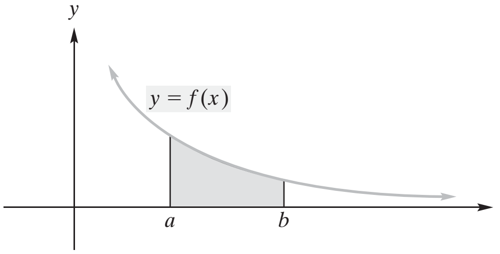


FIGURA 11.4 Área desde a hasta b.

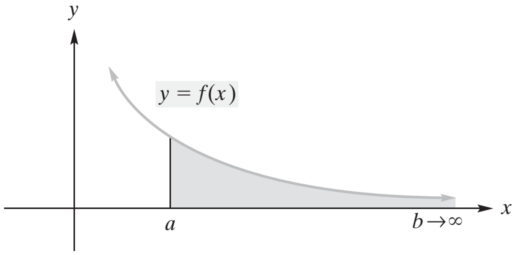


FIGURA 11.5 Área desde a hasta b cuando $b \to \infty$.

como en el área de la región no acotada y que aparece sombreada en la figura 11.5. Este límite, que se abrevia como

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

se llama **integral impropia**. (Este tipo de integrales se llaman *integrales impropias de primera especie*. Existen las *integrales impropias de segunda especie*, pero no se tratan en este libro). Si este límite existe, se dice que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es **convergente** y que la integral impropia *converge* hacia ese límite. En este caso, se considera que la región no acotada tiene un área finita y esta área se representa mediante $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es **divergente** y la región no tiene un área finita.

Podemos eliminar la restricción de que $f(x) \geq 0$. En general, la integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Otros tipos de integrales impropias son

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{2}$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \tag{3}$$

En cada uno de los tres tipos de integrales impropias [(1), (2) y (3)], el intervalo sobre el que se evalúa la integral tiene longitud infinita. La integral impropia descrita en (2) se define como

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Si este límite existe, se dice que $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ es convergente. En caso contrario, es divergente. La integral impropia descrita en (3) se definirá después del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Integrales impropias de la forma $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$

Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. Para las integrales que sean convergentes, calcule su valor.

APLÍQUELO ▶

6. La razón a la que el cuerpo humano elimina cierto medicamento de su sistema se puede aproximar por medio de $R(t) = 3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t}$, donde $R(t)$ está en mililitros por minuto y t es el tiempo en minutos desde que se toma la medicina. Determine $\int_0^\infty (3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t})\,dt$, la cantidad total de medicamento que se elimina.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

Solución:
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}\bigg|_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right] = -0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ converge hacia $\frac{1}{2}$.

b. $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$

Solución:
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\bigg|_a^0\\ &= \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1-0 = 1 \qquad e^0 = 1\end{aligned}$$

(Aquí se usa el hecho de que cuando $a \to -\infty$, la gráfica de $y = e^a$ se aproxima al eje a, por lo que $e^a \to 0$). Por lo tanto, $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ converge hacia 1.

c. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución:
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-1/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2x^{1/2}\bigg|_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty} 2(\sqrt{b}-1) = \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

La integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ se define en términos de integrales impropias de las formas (1) y (2):

$$\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \int_0^\infty e^x\,dx \qquad (4)$$

Si *ambas* integrales del lado derecho de la ecuación (4) son convergentes, entonces se dice que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente; en caso contrario, es divergente.

EJEMPLO 2 Integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

Determine si $\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx$ es convergente o divergente.

Solución:
$$\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \int_0^\infty e^x\,dx$$

Por el ejemplo 1(b), $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$. Por otra parte,

$$\int_0^\infty e^x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} e^x\bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}(e^b-1) = \infty$$

Como $\int_0^\infty e^x\,dx$ es divergente, $\int_{-\infty}^\infty e^x\,dx$ también es divergente.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 3 Función de densidad

En estadística, una función f se llama función de densidad si $f(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad. Encuentre k.

Solución: La ecuación $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ se escribe como

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Debido a que $f(x) = 0$ para $x < 0$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} ke^{-x}\, dx &= 1 \\ \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} ke^{-x}\, dx &= 1 \\ \lim_{b\to\infty} -ke^{-x}\Big|_{0}^{b} &= 1 \\ \lim_{b\to\infty} (-ke^{-b} + k) &= 1 \\ 0 + k &= 1 \qquad \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 0 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 13 ◁

PROBLEMAS 11.7

En los problemas del 1 al 12, determine las integrales en caso de que existan. Indique cuáles son divergentes.

1. $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

2. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2}\, dx$

3. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$

4. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\, dx$

5. $\int_{37}^{\infty} e^{-x}\, dx$

6. $\int_{0}^{\infty} (5 + e^{-x})\, dx$

7. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

8. $\int_{4}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$

9. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$

10. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} (5 - 3x)\, dx$

13. Función de densidad La función de densidad para la vida x, en horas, de un componente electrónico en un medidor de radiación está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & \text{para } x \geq 800 \\ 0 & \text{para } x < 800 \end{cases}$$

(a) Si k satisface la condición de que $\int_{800}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, encuentre k.

(b) La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por $\int_{1200}^{\infty} f(x)\, dx$. Evalúe esta integral.

14. Función de densidad Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

encuentre k. (*Sugerencia*: Vea el ejemplo 3).

15. Utilidades futuras Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual r compuesto continuamente está dado por

$$\int_{0}^{\infty} p(t)e^{-rt}\, dt$$

donde $p(t)$ es la utilidad anual en el tiempo t. Con $p(t) = 500\,000$ y $r = 0.02$, evalúe esta integral.

16. Psicología En un modelo psicológico para la detección de señales,[11] la probabilidad α de reportar una señal cuando no hay presencia de ninguna señal está dada por

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} e^{-x}\, dx \quad x \geq 0$$

---

[11] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

La probabilidad β (letra griega "beta") de detectar una señal cuando ésta se encuentra presente es

$$\beta = \int_{x_c}^{\infty} ke^{-kx}\,dx \quad x \geq 0$$

En ambas integrales, x_c es una constante (llamada valor de criterio en este modelo). Encuentre α y β si $k = \frac{1}{8}$.

17. Encuentre el área de la región ubicada en el tercer cuadrante y limitada por la curva $y = e^{3x}$ y el eje x.

18. Economía En el análisis de la entrada de una empresa a una industria, Stigler[12] utiliza la ecuación

$$V = \pi_0 \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-\rho t}\,dt$$

donde π_0, θ (letra griega "teta") y ρ (letra griega "ro") son constantes. Demuestre que $V = \pi_0/(\rho - \theta)$ si $\theta < \rho$.

19. Población La razón de crecimiento anual predicha para la población de cierta ciudad pequeña está dada por

$$\frac{40\,000}{(t+2)^2}$$

donde t es el número de años contados a partir de ahora. A largo plazo (es decir, cuando $t \to \infty$), ¿cuál es el cambio esperado en la población a partir del nivel actual?

Repaso del capítulo 11

Términos y símbolos importantes

Sección 11.1	**Integración por partes** integración por partes
Sección 11.2	**Integración mediante fracciones parciales** función racional propia factores lineales distintos factores lineales repetidos factores cuadráticos irreducibles distintos factores cuadráticos irreducibles repetidos
Sección 11.3	**Integración por medio de tablas** valor presente y monto acumulado de una anualidad continua
Sección 11.4	**Valor promedio de una función** valor promedio de una función
Sección 11.5	**Ecuaciones diferenciales** ecuación diferencial de primer orden separación de variables crecimiento y decaimiento exponencial constante de decaimiento vida media
Sección 11.6	**Más aplicaciones de ecuaciones diferenciales** función logística ley de enfriamiento de Newton
Sección 11.7	**Integrales impropias** integral impropia convergente divergente $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Resumen

En ocasiones, es posible determinar con facilidad una integral cuya forma es $\int u\,dv$, donde u y v son funciones de la misma variable, aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Una función racional propia puede integrarse al aplicar la técnica de las fracciones parciales (aunque *algunas* de las fracciones parciales que pueden resultar tienen integrales que están fuera del alcance de este libro). Aquí la función racional se expresa como una suma de fracciones, cada una de las cuales es más fácil de integrar que la función original.

Para determinar una integral que no tiene una forma conocida, a veces es posible hacerla coincidir con una fórmula de una tabla de integrales. Sin embargo, puede ser necesario transformarla en una forma equivalente antes de que pueda existir coincidencia.

Una anualidad es una serie de pagos efectuados en determinado periodo. Suponga que los pagos se hacen continuamente durante T años, de manera que un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año. Si la tasa anual de interés es r

---

[12] G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: Macmillan Publishing Company, 1966), p. 344.

compuesta de manera continua, entonces el valor presente de la anualidad continua está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$$

y el monto acumulado está dado por

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt$$

El valor promedio $\overline{f}$ de una función f en el intervalo $[a, b]$ está dado por

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Una ecuación que involucra la derivada de una función desconocida se llama ecuación diferencial. Si la derivada de mayor orden que se tiene es la primera, la ecuación se llama ecuación diferencial de primer orden. Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden resolverse por el método de separación de variables. En ese método, considerando la derivada como un cociente de diferenciales, se escribe la ecuación de manera que cada lado contenga solo una variable y una sola diferencial en el numerador. Integrando ambos lados de la ecuación resultante se obtiene la solución. Esta solución incluye una constante de integración y se llama solución general de la ecuación diferencial. Si la función desconocida debe satisfacer la condición de que tenga un valor específico para un valor dado de la variable independiente, entonces puede encontrarse una solución particular.

Las ecuaciones diferenciales surgen cuando se conoce una relación que implica la razón de cambio de una función. Por ejemplo, si una cantidad N en el tiempo t es tal que cambia a una razón proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dN}{dt} = kN, \text{ donde } k \text{ es una constante}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0e^{kt}$$

donde N_0 es la cantidad presente en $t = 0$. El valor de k puede determinarse cuando se conoce el valor de N para un valor dado de t diferente de $t = 0$. Si k es positiva, entonces N sigue una ley exponencial de crecimiento; si k es negativa, N sigue una ley exponencial de decaimiento. Si N representa una cantidad de un elemento radiactivo, entonces

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \text{donde } \lambda \text{ es una constante positiva.}$$

Así, N sigue una ley exponencial de decaimiento y, por consiguiente,

$$N = N_0e^{-\lambda t}$$

La constante λ se llama constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad del elemento decaiga representa la vida media del elemento:

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}$$

Una cantidad N puede seguir una razón de crecimiento dada por

$$\frac{dN}{dt} = KN(M-N), \quad \text{donde } K \text{ y } M \text{ son constantes}$$

Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene una función de la forma

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}}, \quad \text{donde } b \text{ y } c \text{ son constantes}$$

que se llama función logística. Muchos tamaños de poblaciones pueden describirse por medio de una función logística. En este caso, M representa el límite del tamaño de la población. Una función logística se usa también en el análisis de la difusión de un rumor.

La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo que se enfría en el tiempo t cambia a una razón que es proporcional a la diferencia $T - a$, donde a es la temperatura del medio ambiente. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T-a), \quad \text{donde } k \text{ es una constante}$$

La solución de esta ecuación diferencial puede usarse para determinar, por ejemplo, la hora a la que se cometió un homicidio.

Una integral de la forma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \qquad \text{o bien} \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

se llama integral impropia. Las primeras dos integrales se definen de la manera siguiente:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

y

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ [o $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$] es un número finito, se dice que la integral es convergente, de otra manera, que es divergente. La integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

Si ambas integrales incluidas en el lado derecho son convergentes, se dice que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente, de otra manera, es divergente.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 22, determine las integrales.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

3. $\int_0^2 \sqrt{9x^2+16}\,dx$

4. $\int \frac{16x}{3-4x}\,dx$

5. $\int \frac{15x-2}{(3x+1)(x-2)}\,dx$

6. $\int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$

8. $\int \frac{dx}{x^2-1}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}$ **10.** $\displaystyle\int x^3 \ln x^2\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ **12.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+5x}}\,dx$

13. $\displaystyle\int 49xe^{7x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x\ln x^2}$ **16.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+a)}$

17. $\displaystyle\int \frac{2x}{3+2x}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}$

[13]**19.** $\displaystyle\int \frac{5x^2+2}{x^3+x}\,dx$ [13]**20.** $\displaystyle\int \frac{3x^3+5x^2+4x+3}{x^4+x^3+x^2}\,dx$

[14]**21.** $\displaystyle\int \ln(x+1)\sqrt{x+1}\,dx$ [14]**22.** $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el intervalo [2, 4].

24. Encuentre el valor promedio de $f(t) = t^2e^t$ en el intervalo [0, 1].

En los problemas 25 y 26, resuelva las ecuaciones diferenciales.

25. $y' = 3x^2y + 2xy \qquad y > 0$

26. $y' - f'(x)e^{f(x)-y} = 0 \qquad y(0) = f(0)$

En los problemas del 27 al 30, determine las integrales impropias, en caso de que existan.[17] *Indique cuáles son divergentes.*

[5]**27.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2.5}}\,dx$ [15]**28.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

[5]**29.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ [15]**30.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{1-x^2}\,dx$

31. Población La población de una ciudad de rápido crecimiento era de 500 000 habitantes en 1980 y de 1 000 000 en 2000. Suponiendo un crecimiento exponencial, proyecte la población para 2020.

32. Población La población de una ciudad se duplica cada 10 años debido a un crecimiento exponencial. En cierto tiempo, la población es de 40 000 habitantes. Encuentre una expresión para el número N de personas t años después. Escriba su respuesta en términos de ln 2.

33. Radiactividad Si después de 100 años queda 95% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y, al punto porcentual más cercano, calcule el porcentaje de la cantidad original presente después de 200 años.

34. Medicina Suponga que q es la cantidad de penicilina presente en el cuerpo en el tiempo t y sea q_0 la cantidad en $t = 0$. Suponga también que la razón de cambio de q con respecto a t es proporcional a q y que q disminuye cuando t aumenta. Entonces se tiene $dq/dt = -kq$, donde $k > 0$. Despeje q. ¿Qué porcentaje de la cantidad original se tiene cuando $t = 7/k$?

35. Biología Dos organismos se colocan inicialmente en un medio y empiezan a multiplicarse. El número N de organismos presentes después de t días se registra en una gráfica cuyo eje horizontal es el eje t y el eje vertical es el eje N. Se observa que los puntos caen en una curva logística. El número de organismos presentes después de seis días es de 300 y después de 10 días tiende a un límite de 450. Encuentre la ecuación logística.

36. Inscripciones a la universidad Una universidad cree que la matrícula sigue un crecimiento logístico. El año pasado, la matrícula fue de 10 000 y este año de 11 000. Si la universidad puede recibir un máximo de 20 000 estudiantes, ¿cuál es la matrícula esperada para el año próximo?

37. Hora de un asesinato Un médico forense es llamado a un caso de homicidio. Llega a las 6:00 p.m. y encuentra que la temperatura de la víctima es de 35 °C. Una hora después, la temperatura del cadáver es de 34 °C. La temperatura en la habitación es de 25 °C. Aproximadamente, ¿a qué hora se cometió el crimen? (Suponga que la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 °C).

38. Anualidad Encuentre el valor presente, al entero más cercano, de una anualidad continua con tasa anual de 6% durante 12 años si el pago en el tiempo t es a una razón anual de $f(t) = 10t$.

[16]**39. Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la proporción de altas al término de t días está dada por

$$\int_0^t f(x)\,dx$$

donde $f(x) = 0.007e^{-0.01x} + 0.00005e^{-0.0002x}$. Evalúe

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

[16]**40. Consumo de un producto** Suponga que $A(t)$ es la cantidad de un producto que se consume en el tiempo t y que A sigue una ley de crecimiento exponencial. Si $t_1 < t_2$ y en el tiempo t_2 la cantidad consumida $A(t_2)$ es el doble de la cantidad consumida en el tiempo t_1, $A(t_1)$, entonces $t_2 - t_1$ se llama periodo de duplicación. En un análisis de crecimiento exponencial, Shonle[17] establece que en condiciones de crecimiento exponencial, "la cantidad de un producto consumido durante un periodo de duplicación es igual al total utilizado en todo el tiempo hasta el principio del periodo de duplicación". Para justificar esta afirmación, reproduzca la argumentación de Shonle de la manera siguiente. La cantidad del producto consumido hasta el tiempo t_1 está dada por

$$\int_{-\infty}^{t_1} A_0e^{kt}\,dt \qquad k > 0$$

donde A_0 es la cantidad cuando $t = 0$. Demuestre que esto es igual a $(A_0/k)e^{kt_1}$. Enseguida, la cantidad consumida durante el intervalo que va de t_1 a t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} A_0e^{kt}\,dt$$

Demuestre que esto es igual a

$$\frac{A_0}{k}e^{kt_1}[e^{k(t_2-t_1)} - 1] \tag{5}$$

Si el intervalo $[t_1, t_2]$ es un periodo de duplicación, entonces

$$A_0e^{kt_2} = 2A_0e^{kt_1}$$

Demuestre que esta relación implica que $e^{k(t_2-t_1)} = 2$. Sustituya este valor en la ecuación (5); su resultado debe ser el mismo que el total usado durante todo el tiempo hasta t_1, a saber, $(A_0/k)e^{kt_1}$.

---

[13] Los problemas 19 y 20 se refieren a la sección 11.2.

[14] Los problemas 21 y 22 se refieren a la sección 11.1.

[15] Los problemas del 27 al 30 se refieren a la sección 11.7.

[16] Los problemas 39 y 40 se refieren a la sección 11.7.

[17] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

41. Ingreso, costo y utilidad La tabla siguiente muestra los valores de las funciones de ingreso marginal (IM) y de costo marginal (CM) de una empresa:

q	0	3	6	9	12	15	18
IM	25	22	18	13	7	3	0
CM	15	14	12	10	7	4	2

El costo fijo de la compañía es 25. Suponga que la utilidad es máxima cuando IM = CM y que esto ocurre cuando $q = 12$. Además, suponga que la producción de la empresa se elige de tal forma que maximice la utilidad. Use la regla del trapecio y la regla de Simpson para resolver cada uno de los siguientes incisos.

(a) Estime el ingreso total usando tantos datos como sea posible.

(b) Estime el costo total usando la menor cantidad posible de datos.

(c) Determine cómo está relacionada la utilidad máxima con el área encerrada por la línea $q = 0$ y las curvas IM y CM, use esta relación para estimar la utilidad máxima tan exactamente como sea posible.

EXPLORE Y AMPLÍE Dietas

En la actualidad existe un gran interés en las dietas y la pérdida de peso. Algunas personas quieren perder peso para "verse bien", otras por razones de salud o condición física. De hecho, algunas lo hacen por presión de las amistades. Con frecuencia aparecen anuncios publicitarios en televisión, periódicos y revistas sobre programas para control de peso. En muchas librerías, secciones enteras se dedican a las dietas y al control de peso.

Suponga que se quiere determinar un modelo matemático para saber el peso de una persona sometida a una dieta baja en calorías.[18] El peso de una persona depende tanto de la tasa diaria de energía ingerida, digamos C calorías diarias, como de la tasa diaria de energía consumida, que típicamente tiene un valor de entre 15 y 20 calorías por día por cada libra de peso del cuerpo. El consumo depende de la edad, el sexo, la razón metabólica, etc. Para un valor promedio de 17.5 calorías por libra y por día, una persona que pese w libras consume $17.5w$ calorías por día. Si $C = 17.5w$, entonces su peso permanece constante; de otra manera, se tiene ganancia o pérdida de peso según si C es mayor o menor que $17.5w$.

¿Qué tan rápido ocurrirá la ganancia o pérdida de peso? La hipótesis fisiológica más plausible es que dw/dt es proporcional al exceso neto (o déficit) $C - 17.5w$ en el número de calorías por día. Esto es,

$$\frac{dw}{dt} = K(C - 17.5w) \qquad (1)$$

donde K es una constante. El miembro izquierdo de la ecuación tiene unidades de libras por día y $C - 17.5w$ tiene unidades de calorías por día. De modo que las unidades de K son libras por caloría. Por lo tanto, se requiere conocer cuántas libras, por cada exceso o déficit de calorías, se agregan o quitan al peso. El factor de conversión dietético que generalmente se usa es que 3500 calorías es el equivalente de una libra. Así, $K = 1/3500$ libras por caloría.

Ahora, la ecuación diferencial que modela la ganancia o pérdida de peso es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{3500}(C - 17.5w) \qquad (2)$$

Si C es constante, la ecuación es separable y su solución es

$$w(t) = \frac{C}{17.5} + \left(w_0 - \frac{C}{17.5}\right)e^{-0.005t} \qquad (3)$$

donde w_0 es el peso inicial y t está en días. A largo plazo, note que el peso de equilibrio (esto es, el peso cuando $t \to \infty$) es $w_{\text{eq}} = C/17.5$.

Por ejemplo, si alguien que pese inicialmente 180 lb adopta una dieta de 2500 calorías por día, entonces se tiene $w_{\text{eq}} = 2500/17.5 \approx 143$ libras y la función del peso es

$$\begin{aligned} w(t) &\approx 143 + (180 - 143)e^{-0.005t} \\ &= 143 + 37e^{-0.005t} \end{aligned}$$

En la figura 11.6 se muestra la gráfica de $w(t)$. Observe cuánto tiempo toma estar cerca del peso de equilibrio de 143 libras. La vida media para el proceso es $(\ln 2)/0.005 \approx 138.6$ días, alrededor de 20 semanas (tomaría casi 584 días, u 83 semanas, llegar a las 145 libras). Esto pudiera ser la causa por la que muchas personas abandonan la dieta por frustración.

---

[18] Adaptado de A. C. Segal, "A Linear Diet Model", *The College Mathematics Journal*, 18, núm. 1 (1987), pp. 44-45. Con autorización de la Mathematical Association of America.

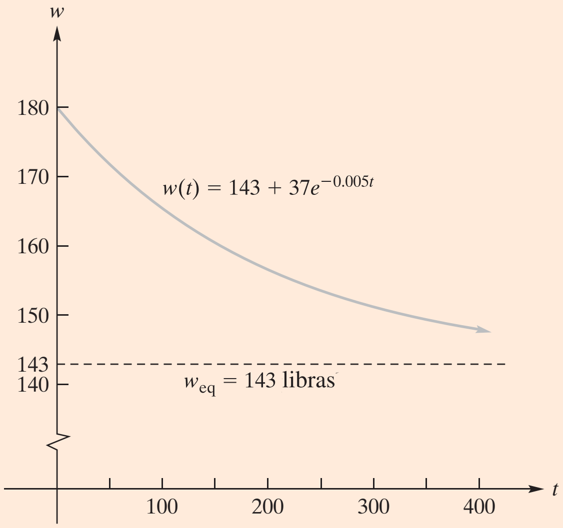


FIGURA 11.6 Peso como una función del tiempo.

Problemas

1. Si una persona que pesa 200 lb adopta una dieta de 2000 calorías por día, determine a la libra más cercana el peso de equilibrio w_{eq}. Al día más cercano, ¿después de cuántos días esta persona tendrá un peso de 175 libras? Obtenga la respuesta de manera algebraica o usando una calculadora gráfica.

2. Demuestre que la solución de la ecuación (2) está dada por la ecuación (3).

3. El peso de una persona sometida a una dieta restringida en calorías está dado, en el tiempo t, por $w(t)$. [Vea la ecuación (3)]. La diferencia entre este peso y el peso de equilibrio w_{eq} es $w(t) - w_{eq}$. Suponga que se requieren d días para que la persona pierda la mitad de esta diferencia de peso. Entonces

$$w(t+d) = w(t) - \tfrac{1}{2}[w(t) - w_{eq}]$$

Despeje d de esta ecuación y demuestre que $d = \dfrac{\ln 2}{0.005}$.

4. En forma ideal, la meta de la pérdida de peso debe establecerse en una consulta con un médico. Sin embargo, en general, un peso ideal está relacionado con la altura de la persona por el índice de masa corporal (IMC), que es igual al peso en kilogramos dividido entre la altura, en metros, al cuadrado. El rango óptimo de IMC es de 18.5 a 24.9.

¿Cuántas libras necesitaría perder una mujer de 5 pies 8 pulgadas de altura y 190 libras de peso para estar en el rango ideal de IMC? (Sea cuidadoso con las unidades cuando calcule la respuesta). Al día más cercano, ¿cuánto tardaría esa mujer en perder este exceso de peso con una dieta de 2200 calorías por día?

Se puede encontrar más información sobre peso y dietas en `www.consumer.gov/weightloss/setgoals.htm.`

5. ¿Cuáles son los pros y los contras de adoptar una dieta “de choque” que tiene como base cambios drásticos en los hábitos alimenticios para lograr una pérdida de peso rápida?

VECTORES

12

12.1 Vectores y suma de vectores

Algunas cantidades físicas, como el tiempo, la temperatura, la masa y la densidad se pueden describir completamente con un solo número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el desplazamiento de un avión: debemos indicar no solo qué tan rápidamente se desplaza, sino también en qué dirección. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o un tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no solo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja sobre un cuerpo.

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** incluye tanto una **magnitud** (la cual indica "qué tanto" o "qué tan grande") como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4 × 2 s = 8 s. No obstante, la combinación de vectores requiere un conjunto diferente de operaciones.

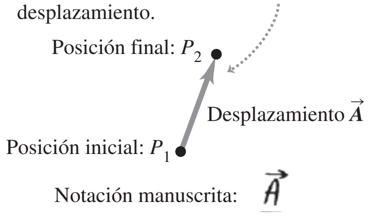
Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que simplemente es un cambio en la posición de un objeto. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos establecer no solo qué tan lejos se mueve el objeto, sino también en qué dirección. Caminar 3 km al norte desde nuestra casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Con frecuencia representamos una cantidad vectorial, como el desplazamiento, con una sola letra, como $\vec{A}$ en la figura 12.1a. simbolizaremos los vectores con ***letras negritas y cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que las cantidades vectoriales tienen propiedades diferentes de las que manifiestan las cantidades escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de los vectores *siempre* se escriben con una flecha arriba. Si no distingue entre cantidades vectoriales y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

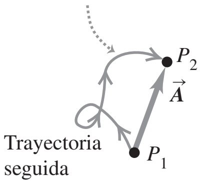
Al *dibujar* un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y la dirección de la línea es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por el objeto sea curva (figura 12.1b). Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si el objeto llegara a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería *cero* (figura 12.1c).

12.1 Desplazamiento como una cantidad vectorial. Un desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido desde el punto inicial hasta el punto final, aunque la trayectoria sea curva.

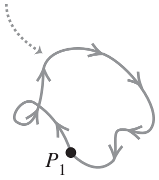
a) Un desplazamiento se representa con una flecha que apunta en la dirección del desplazamiento.



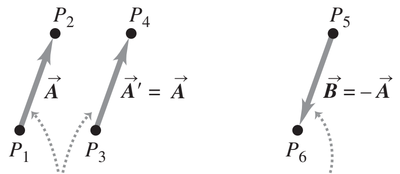
b) El desplazamiento depende solo de las posiciones iniciales y final, no de la trayectoria seguida.



c) El desplazamiento total de un viaje redondo es 0, sin importar la distancia recorrida.



12.2 Significado de vectores que tienen la misma magnitud, y la misma dirección o dirección opuesta.



Los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{A}'$ son iguales porque tienen las mismas longitud y dirección.

El desplazamiento $\vec{B}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta; $\vec{B}$ es el negativo de $\vec{A}$.

Si dos vectores tienen la misma direción, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud y la misma dirección, son *iguales*, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}'$ de P_3 a P_4 en la figura 12.2 tiene igual longitud y dirección que el vector $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escribimos esto como $\vec{A}' = \vec{A}$ en la figura 12.2, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores son iguales solo si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 12.2 no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original, pero con la dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se representa con $-\vec{A}$ y usamos un signo menos en negritas para destacar el carácter vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es de 87 m y apunta al sur, entonces $-\vec{A}$ es de 87 m y apunta al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 12.2 puede escribirse como $A = -B$ o $B = -A$ Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen direcciones opuestas, independientemente de que sus magnitudes sean iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.

Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector, pero en *cursiva normal* sin la flecha arriba. Una notación alternativa es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales en ambos lados:

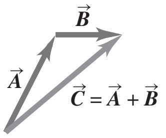
$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = \left|\vec{A}\right| \tag{1.1}$$

La magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre* es *positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto. ¡La expresión "$\vec{A}$ = 6 m" es tan absurda como "2 naranjas = 3 manzanas"!

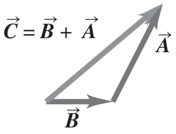
Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm de largo en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm. En un diagrama de vectores de velocidad, un vector que tiene 1 cm de longitud podría representar una velocidad cuya magnitud es de 5 m/s. Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm de largo.

12.3 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en *b)*, el orden no importa en la suma de vectores, ya que esta es conmutativa.

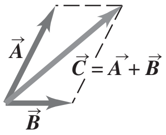
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al invertir el orden de la suma se obtiene el mismo resultado.



c) También podemos sumarlos construyendo un paralelogramo.



Suma y resta de vectores

Suponga que una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{A}$ seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo como si la partícula hubiera partido del mismo punto y experimentado un solo desplazamiento $\vec{C}$ (figura 12.3*a*). Llamamos a $\vec{C}$ **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y Expresamos esta relación simbólicamente como

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.2}$$

El signo más en negritas destaca que sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como 2 + 3 = 5. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o *punta*, del *primer* vector (figura 12.3*a*).

Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$ el resultado será el mismo (figura 12.3*b*) ya que se cumple la propiedad conmutativa.

Entonces,

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \text{ y } \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. En otras palabras, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

La figura 12.3*c* muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

CUIDADO: Magnitudes en la suma de vectores

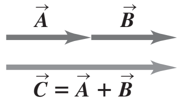
Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B. En general, tal conclusión es *errónea*; para los vectores de la figura 12.3 es evidente que $C < A + B$ La magnitud $\vec{A} + \vec{B}$ de depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y. Solo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean *paralelos*, la magnitud $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ de es igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 12.4*a*). En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 12.4*b*), la magnitud de C es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si usted tiene el cuidado de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales, evitará cometer errores en relación con la magnitud de una suma vectorial.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar vectorialmente la resultante al tercero, y así sucesivamente. La figura 12.5a muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ En la figura 12.5*b*, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener la suma vectorial $\vec{D}$; luego se suman los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la misma forma para obtener la resultante $\vec{R}$:

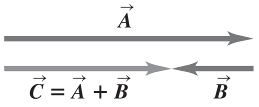
$$\vec{R} = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{D}+\vec{C}$$

12.4 *a)* Solo cuando dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud de su suma $\vec{C}$ =*A*+*B*.*b*) es igual a la suma de sus magnitudes: C = A + B. b) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: C = |A – B| .

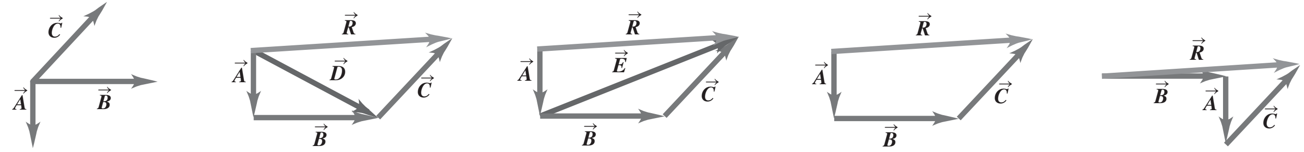
a) La suma de dos vectores paralelos



b) La suma de dos vectores antiparalelos



12.5 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...

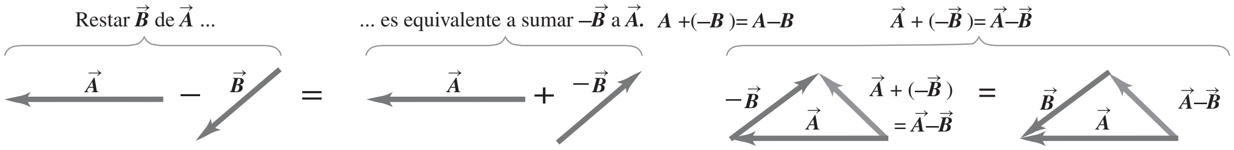
b) podríamos sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar $\vec{D}$ y luego sumar $\vec{C}$ a $\vec{D}$ para obtener la suma final (resultante) $\vec{R}$, ...

c) o podríamos sumar $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{E}$ y después sumar $\vec{A}$ a $\vec{E}$ para calcular $\vec{R}$, ...

d) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{R}$ directamente ...

e) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en cualquier otro orden y aun así obtener $\vec{R}$.

12.6 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, puede colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$ o bien, colocar los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta.



Con $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ de punta a cola, $\vec{A}-\vec{B}$ es el vector desde la cola de **A** hasta la punta de **–B**.

Con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta, $\vec{A}-\vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la cola de **B**.

Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y para obtener el vector $\vec{E}$ (figura 12.5*c*), y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

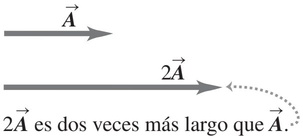
No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ basta con dibujar los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del vector anterior. La suma vectorial $\vec{R}$ va de la cola del primer vector a la punta del último vector (figura 12.5*d*). El orden no importa; la figura 12.5*e* muestra un orden distinto, y el lector puede intentar otros. Vemos así que la suma de vectores obedece la ley asociativa.

Así como sumamos vectores, también podemos *restarlos*. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

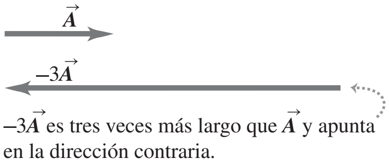
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

12.7 Multiplicación de un vector *a)* por un escalar positivo y *b)* por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector cambia, pero no su dirección.



b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, cambia su magnitud y se invierte su dirección.



La figura 12.6 muestra un ejemplo de resta de vectores.

Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una cantidad escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo (figura 12.7a). En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar *c*, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de *c* multiplicado por la magnitud del vector $\vec{A}$). Si *c* es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$; si *c* es negativo, $c\vec{A}$, tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $3\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$ (figura 12.7*b*).

El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = ; m\vec{a}$ la fuerza neta $\vec{F}$ (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa *m* del cuerpo (una cantidad escalar) y su aceleración $\vec{a}$ (una cantidad vectorial). La dirección de $\vec{F}$ es la misma que la de $\vec{a}$ porque *m* es positiva, y la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la masa *m* (que es positiva) multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. La unidad de fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de aceleración.

EJEMPLO 1 Suma de dos vectores en ángulos rectos

Un esquiador de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

Solución:

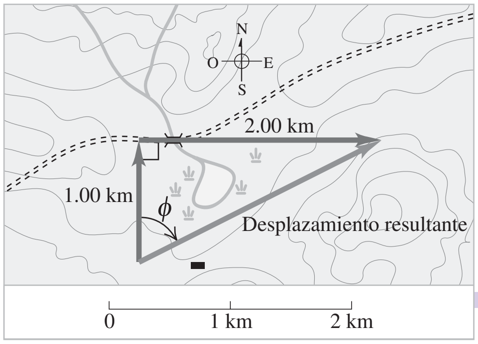
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica combinar dos desplazamientos en ángulos rectos uno del otro. En este caso, las cantidades vectoriales se suman resolviendo un triángulo rectángulo, lo cual podemos hacer usando el teorema de Pitágoras y trigonometría básica. Las incógnitas son la distancia en línea recta y la dirección del esquiador con respecto a su punto de partida. La figura 12.8 es un diagrama a escala de los dos desplazamientos del esquiador y el desplazamiento neto resultante. Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). El desplazamiento parece ser de aproximadamente 2.4 km y la medición con un transportador indica que f es aproximadamente igual a 63°.

EJECUTAR: La distancia del punto inicial al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa:

$$\sqrt{(1.00\text{km})^2 + (2.00\text{km})^2} = 2.24\text{km}$$

El ángulo ϕ se obtiene con un poco de trigonometría (del apéndice B):

12.8 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí.



$$\tan\phi = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{2.00\text{ km}}{1.00\text{ km}}$$

$$\phi = 63.4°$$

Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o 90° – 63.4° = 26.6° al norte del este.

EVALUAR: Nuestras respuestas (2.24 km y $\phi = 63.4°$) están cerca de nuestras predicciones. En el caso más general de la suma de dos vectores que *no* están en ángulos rectos, se puede usar la ley de los cosenos en lugar del teorema de Pitágoras, y usar la ley de los senos para obtener el ángulo correspondiente a ϕ de este ejemplo.

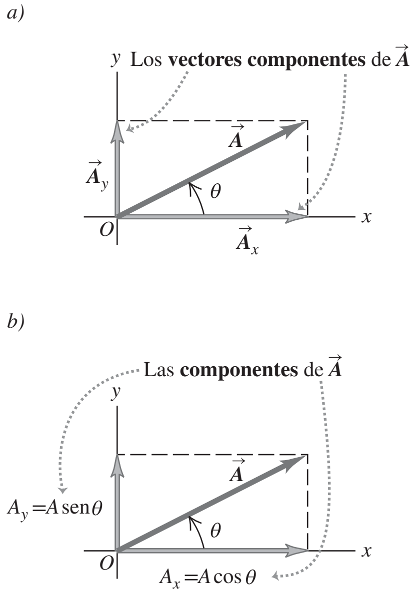
12.2 Componentes de vectores

Sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. Al medir un diagrama se obtiene solo una exactitud muy limitada, y los cálculos con triángulos rectángulos funcionan únicamente cuando los dos vectores son perpendiculares. De modo que necesitamos entonces un método sencillo pero general para sumar vectores; este se conoce como el método de *componentes*.

Para definir las componentes de un vector $\vec{A}$ partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 12.9*a*) y luego dibujamos el vector con su cola en *O*, el origen del sistema coordenado. Podemos representar cualquier vector en el plano *xy* como la suma de un vector paralelo al eje *x* y un vector paralelo al eje *y*. Estos dos vectores se identifican como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura 12.9*a*; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$ y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$ Simbólicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x \text{ y } \vec{A}_y \tag{1.5}$$

12.9 Representación de un vector $\vec{A}$ en términos de *a)* los vectores componentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ y *b)* las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).



Puesto que cada vector componente se encuentra a lo largo de un eje de coordenadas, solo necesitamos un número para describirlo. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección *x* positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta en la dirección *x* negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa). Definimos el número A_y del mismo modo. Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$ (figura 12.9*b*).

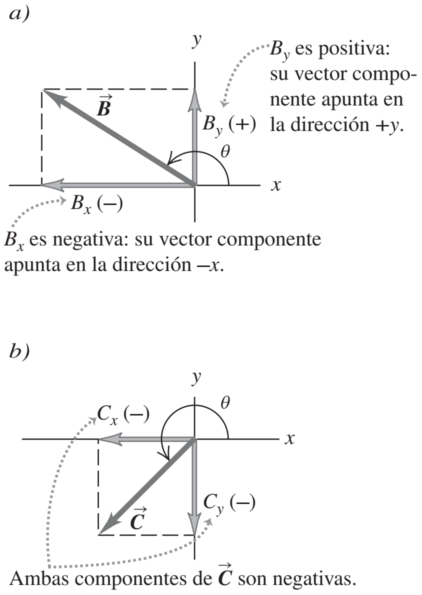
CUIDADO: Las componentes no son vectores

Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son tan solo números: *no* son vectores. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservada para los vectores.

Podemos calcular las componentes del vector $\vec{A}$ si conocemos la magnitud *A* y su dirección. Describiremos la dirección de un vector por su ángulo en relación con una dirección de referencia, que en la figura 12.9*b* es el eje *x* positivo, y el ángulo entre el vector $\vec{A}$ y el eje *x* positivo es θ (la letra griega theta).

Imagine que, originalmente, el vector $\vec{A}$ está sobre el eje +*x* y que luego usted lo hace girar hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 12.9*b*. Si la rotación es del eje +*x* hacia el eje +*y*, como indica la figura 12.9*b*, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje +*x* al eje –*y*, entonces θ es *negativo*. Por lo tanto, el eje +*y* está a un ángulo de 90°, el eje –*x* está a 180° y el eje –*y* está a 270° (o –90°). Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

12.10 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.



$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$
$$A_x = A\cos\theta \quad \text{y} \quad A_y = A\operatorname{sen}\theta$$
$$(\theta \text{ medido del eje } +x \text{ girando hacia el eje } +y) \qquad (1.6)$$

En la figura 12.9*b*, A_x y A_y son positivas. Esto es congruente con las ecuaciones (1.6); θ u está en el primer cuadrante (entre 0° y 90°) y tanto el coseno como el seno de un ángulo en este cuadrante son positivos. En cambio, en la figura 12.10*a*, la componente B_x es negativa. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.6); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 12.10*b*, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).

CUIDADO: Relación entre la magnitud de un vector y la dirección de sus componentes

Las ecuaciones (1.6) son correctas *solamente* si el ángulo θ se mide desde el eje *x* positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia, o se utiliza otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 2 ilustra este aspecto.

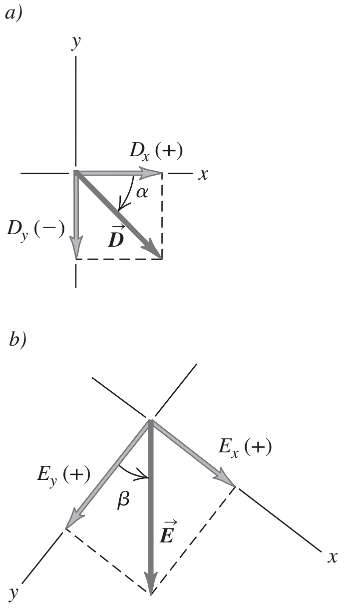
EJEMPLO 2 Cálculo de componentes

a) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* del vector $\vec{D}$ en la figura 12.11*a*?
La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45°$.
b) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* del vector $\vec{E}$ en la figura 12.11*b*?
La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0°$.

Solución:

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos usar las ecuaciones (1.6) para calcular las componentes de estos vectores, pero debemos tener cuidado, porque ninguno de los ángulos α o β de la figura 12.11 está medido del eje +*x* al eje +*y*. A partir de la figura estimamos que las longitudes de las componentes en el inciso *a*) son aproximadamente de 2 m, y las del inciso *b*) son de 3 y 4 m. Los signos de las componentes están indicados en la figura.

12.11 Cálculo de las componentes *x* y *y* de vectores.



EJECUTAR: *a*) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje *x* positivo es α (la letra griega alfa), medido hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones (1.6) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45°$ Entoces obtenemos.

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{m})(\cos(-45^{\circ})) = +2.1 \text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{m})(\operatorname{sen}(-45^{\circ})) = -2.1 \text{ m}$$

Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45°$ en las ecuaciones (1.6), habríamos obtenido *D* y con el signo equivocado.
b) El eje *x* y el eje y forman ángulos rectos en la figura 12.11*b*, de modo que no importa que no se encuentren en posición horizontal y vertical, respectivamente. Pero para usar las ecuaciones (1.6), debemos usar el ángulo $\theta = 90.0° - \beta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Luego, obtenemos

(1.6)

$$E_x = E\cos 53^{\circ} = (4.50 \text{ m})(\cos 53^{\circ}.0) = +2.71 \text{ m}$$
$$E_y = E\operatorname{sen} 53^{\circ} = (4.50 \text{ m})(\operatorname{sen} 53^{\circ}.0) = +3.59 \text{ m}$$

EVALUAR: Las respuestas en ambos incisos están cerca de nuestras predicciones. Sin embargo, pregúntese esto: ¿por qué las respuestas del inciso *a*) tienen solo dos cifras significativas?

Cálculos de vectores usando componentes

Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores.

Veamos tres ejemplos importantes.

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes.

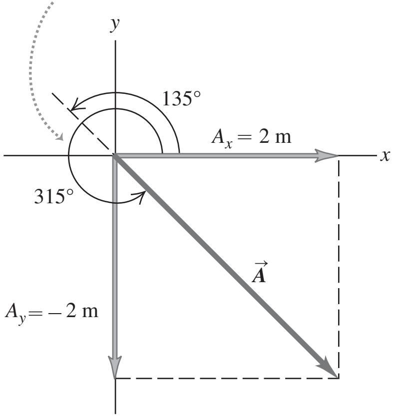
Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes *x* y *y*. Las ecuaciones (1.6) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 12.9b, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es:

$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} \tag{1.7}$$

(Siempre tomamos la raíz positiva). La ecuación (1.7) es válida para cualesquiera de los ejes *x* y *y*, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ como un ángulo positivo desde el eje +*x* hacia el eje +*y* (como en la figura 12.9*b*), entonces

$$tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \text{y} \qquad \theta = \text{arctan}\ \frac{A_y}{A_x} \tag{1.8}$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener una tecla INV o 2ND para usarse con la tecla TAN.



12.12 Diagrama de vectores que indica los signos de sus componentes *x* y *y*.

Suponga que $\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = -1$. ¿Cuál es el valor de θ?

Dos ángulos tienen tangentes de −1: 135° y 315°. El análisis del diagrama muestra que θ debe ser igual a 315°.

CUIDADO: Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes

Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones (1.8) para obtener θ: dos ángulos cualesquiera que difieran 180° tienen la misma tangente. Suponga que $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m como en la figura 12.12; entonces, $\tan\theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente –1: 135° y 315° (o bien, –45°). Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o bien, –45°) es el valor correcto. La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan arctan (–1) = –45°. En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto sería 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo estará en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo, como la figura 12.12, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

2. Multiplicación de un vector por un escalar.

Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un escalar *c*, cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es el producto de *c* por la componente correspondiente de componentes de $\vec{A}$:

$$Dx = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \tag{1.9}$$

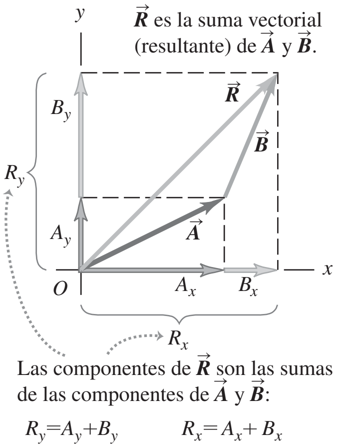
Por ejemplo, la ecuación (1.9) indica que cada componente del vector $\overrightarrow{2A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ de manera que $\overrightarrow{2A}$ está la misma dirección que $\vec{A}$ pero tiene el doble de magnitud. Cada componente del vector $-\overrightarrow{3A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ pero tiene el signo contrario, así que $-\overrightarrow{3A}$ está en la dirección opuesta de $\vec{A}$ y su magnitud es tres veces mayor.

3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores.

La figura 12.13 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su resultante $\vec{R}$ junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma $(A_x + B_x)$ de las componentes x de los vectores que se están sumando. Lo mismo sucede con las componentes y. En símbolos,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y \quad \text{(componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}\text{)} \tag{1.10}$$

12.13 Obtención de la suma vectorial (resultante) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando componentes.



La figura 12.13 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin* importar el signo de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera usando las ecuaciones (1.6), podríamos calcular las componentes de la resultante $\vec{R}$. Luego, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{R}$ las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por las R.

Podemos ampliar este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Si $\vec{R}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ ...., entonces, las componentes de $\vec{R}$ son

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \ \dots$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \ \dots \tag{1.11}$$

Solo hemos hablado de vectores que están en el plano xy; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Podemos introducir un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.12}$$

Siempre tomamos la raíz positiva. Además, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial $\vec{R}$ tienen un elemento adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \dots$$

Nos hemos enfocado en la suma de vectores de *desplazamiento*, pero el método es aplicable a todas las cantidades vectoriales. Cuando estudiemos el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de la suma vectorial que se aplican al desplazamiento.

Estrategia para resolver problemas: Suma de vectores

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Determine cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje los vectores que va a sumar y los ejes de coordenadas adecuados. Coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente. Trace la suma vectorial $\vec{R}$ desde la cola del primer vector (en el origen) hasta la punta del último. Use su dibujo para estimar la magnitud y la dirección de $\vec{R}$. Elija las herramientas matemáticas que usará para realizar el cálculo completo: las ecuaciones (1.6) para obtener las componentes de los vectores dados y, si es necesario, las ecuaciones (1.11) para obtener las componentes de la suma vectorial, las ecuaciones (1.12) para determinar su magnitud, y las ecuaciones (1.8) para conocer su dirección.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla, como en el ejemplo 3 que se presenta a continuación. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes están dadas por las ecuaciones 1.6:

$$A_x = A \cos \theta \qquad\qquad A_y = A \operatorname{sen} \theta$$

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra dirección de referencia, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como en el ejemplo 3.

2. Sume algebraicamente las componentes x, incluyendo los signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y. Véase el ejemplo 3.

3. Calcule la magnitud de R y la dirección θ de la resultante usando las ecuaciones (1.7) y (1.8):

$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2}} \qquad\qquad \theta = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta*: Verifique que la magnitud y dirección de la suma vectorial concuerden con las estimaciones que hizo a partir de su dibujo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede tener un error de 180°; el dibujo indicará el valor correcto.

EJEMPLO 3 Suma de vectores usando sus componentes

Tres participantes en un concurso de TV están colocados en el centro de un campo plano grande. A cada uno se le proporciona una regla graduada de un metro, un compás, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

$\vec{A}$: 72.4 m, 32.0° al este del norte
$\vec{B}$: 57.3 m, 36.0° al sur del oeste
$\vec{C}$: 17.8 m al sur

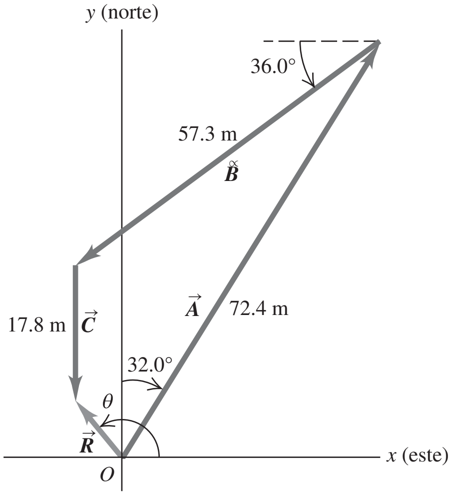
Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, el ganador *calcula* primero a dónde debe ir.

¿Qué calculó?

Solución:

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El objetivo es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma de vectores. La situación se muestra en la figura 12.14. Elegimos

12.14 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



el eje +*x* como el este, y el eje +*y* como el norte. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ mide aproximadamente unos 10 m, 40° al oeste del norte (lo cual corresponde a θ ≈ 130º).

EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje +*x* al eje +*y*, son (90.0° –32.0°)= 58.0°, (180.0° + 36.0°) = 216.0° y 270.0°, respectivamente. Ahora podemos usar las ecuaciones (1.6), para obtener las componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A \cos \theta_A = (72.4\text{ m})(\cos 58.0^\circ) = 38.37\text{ m}$$

$$A_y = A \text{ sen } \theta_A = (72.4\text{ m})(\text{sen } 58.0^\circ) = 61.40\text{ m}$$

Hemos conservado una cifra significativa extra en las componentes; esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas. La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, su suma y los demás cálculos.

Distancia	**Ángulo**	**Componente *x***	**Componente *y***
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	– 46.36 m	–33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	–17.80 m

$R_x = –7.99$ m $R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99\,\text{m})^2 + (9.92\,\text{m})^2} = 12.7\text{ m}$$

$$\theta = \arctan \frac{9.92\text{m}}{-7.99\text{m}} = -51^{\circ}$$

La comparación con la figura 12.14 indica que el ángulo calculado es completamente diferente por 180º. El valor correcto es $\theta = 180° - 51 = 129°$, o bien, 39° al oeste del norte.

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ concuerdan con nuestras estimaciones. Observe cómo el diagrama de la figura 12.14 facilitó la eliminación del error de 180° en la dirección de la resultante.

EJEMPLO 4 Suma vectorial sencilla en tres dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

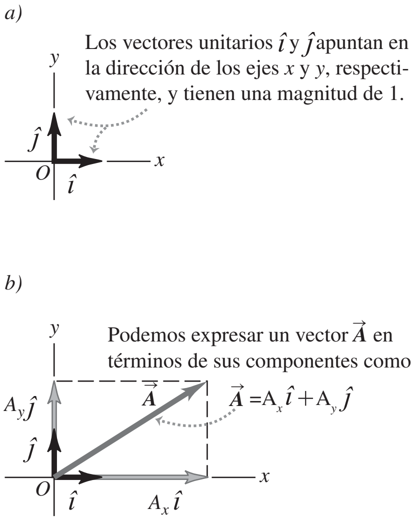
Solución:
Sea el eje $+x$ el este, el eje $+y$ el norte y el eje $+z$ hacia arriba. Entonces, las componentes del desplazamiento del avión son $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da la magnitud del desplazamiento

$$A = \sqrt{(-10.4\,\text{km})^2 + (8.7\,\text{km})^2 + (2.1\,\text{km})^2} = 13.7\ \text{km}$$

Evalúe su comprensión de la sección 12.2 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano xy.
a) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga la misma magnitud que $\vec{B}$ pero componentes diferentes?
b) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga las mismas componentes que $\vec{B}$ pero una magnitud diferente?

12.3 Vectores unitarios

12.15 *a)* Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b)* Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.



Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ apuntan en la dirección de los ejes x y y, respectivamente, y tienen una magnitud de 1.

Podemos expresar un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como

Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en *direccionar*, es decir, señalar una dirección en el espacio. Los vectores unitarios proporcionan una notación conveniente para muchas expresiones que implican componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o “sombrero” (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas x-y podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje $+y$ (figura 12.15*a*). Así, podemos expresar la relación entre los vectores componentes y las componentes, como sigue:

$$\vec{A}_x = A_x\,\hat{\imath} \qquad \vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \tag{1.13}$$

De forma similar, escribimos un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

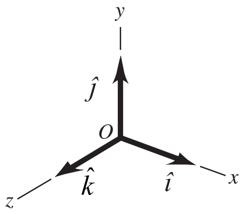
Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son ecuaciones vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$ es una cantidad vectorial (figura 12.15*b*).

Usando vectores unitarios, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\,\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\\ \vec{B} &= B_x\,\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (A_x\,\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\,\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\ &= (A_x + B_x) + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath}\\ &= R_x\,\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}\end{aligned} \tag{1.15}$$

12.16 Los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

Si no todos los vectores están en el plano xy, necesitamos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$ (figura 12.16). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se convierten en

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k} \qquad (1.16)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\,\hat{\imath} + (A_y + B_y)\,\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\,\hat{k}$$
$$= R_x\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath} + R_z\,\hat{k} \qquad (1.17)$$

EJEMPLO 5 Uso de vectores unitarios

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6.00\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath} - 1.00\,\hat{k})\ m \quad y$$
$$\vec{E} = (4.00\hat{\imath} - 5.00\,\hat{\jmath} + 8.00\,\hat{k})\ m$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\ \vec{D} - \vec{E}$

Solución:

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Multiplicamos el vector $\vec{D}$ por 2 (un escalar) y luego restamos el vector $\vec{E}$ del resultado, para obtener el vector $\vec{F} = 2\,\vec{D} - \vec{E}$. La ecuación (1.9) indica que para multiplicar $\vec{D}$ por 2, se multiplica cada una de sus componentes por 2. Después, se usa la ecuación (1.17) para efectuar la resta; recuerde de la sección 12.1 que restar un vector es lo mismo que sumar el negativo de ese vector.

EJECUTAR: Tenemos

$$\vec{F} = 2(6.00\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath} - 1.00\ \hat{k}\ )\ \text{m} - (4.00\,\hat{\imath} - 5.00\,\hat{\jmath} + 800\ \hat{k}\ )\ \text{m}$$
$$= [\ (12.00 - 4.00)\ \hat{\imath} + (6.00 + 5.00)\,\hat{\jmath} + (-\,2.00 - 8.00)\ \hat{k}\ \ ]\ \text{m}$$
$$= (8.00\ \hat{\imath} + 11.00\,\hat{\jmath} - 10.00\ \hat{k}\ )\text{m}$$

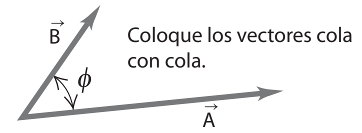
De la ecuación (1.12), la magnitud de $\vec{F}$ es

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$
$$= \sqrt{(8.00\text{m})^2 + (11.00\text{m})^2 + (-10.00\text{m})^2}$$
$$= 16.9\ \text{m}$$

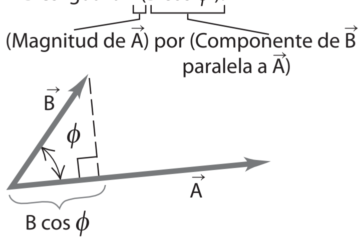
EVALUAR: Nuestra respuesta es del mismo orden de magnitud que las componentes más grandes implicadas en la suma. No esperaríamos que nuestra respuesta fuera mucho mayor que esto, pero podría ser mucho más pequeña.

12.17 Cálculo del producto escalar de dos vectores, $\vec{A}\cdot\vec{B}$ $=AB\cos\phi$.

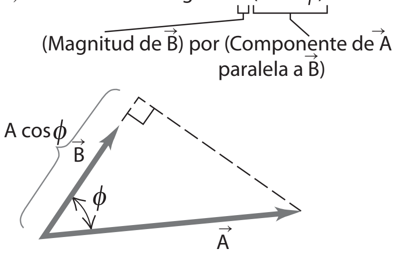
a)



b) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es igual a A(B cos ϕ).



c) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ también es igual a B(A cosϕ).



12.4 Productos de vectores

Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural de combinar desplazamientos y veremos lo útil que resulta en el cálculo de muchas otras cantidades vectoriales. También podemos expresar muchas relaciones físicas usando *productos* de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos de productos de vectores. El primero, llamado *producto escalar*, produce un resultado escalar. El segundo, el *producto vectorial*, genera otro vector.

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Debido a esta notación, el producto escalar también se denomina **producto punto**. Aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es un escalar.

Para definir el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con su cola en el mismo punto (figura 12.17*a*). El ángulo ϕ (la letra griega fi) puede tomar valores entre 0° y 180°. La figura 12.17*b* muestra la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$; esta proyección es la componente de $\vec{B}$ sobre la proyección de $\vec{A}$ y es igual a $B\cos\phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no solo en los ejes x y y). Definimos $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado en la forma de ecuación.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\phi \qquad \text{(definición del producto escalar (punto))} \tag{1.18}$$

También podemos definir $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$, como en la figura 12.17*c*. Así, $\vec{A}\cdot\vec{B} = B\,(A\cos\phi) = AB\cos\phi$, que es lo mismo que la ecuación (1.18).

El producto escalar es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero. Si ϕ está entre 0º y 90º, $\cos\phi > 0$ y el producto escalar es positivo (figura 12.18*a*). Cuando ϕ está entre 90º y 180º, de modo que $\cos\phi < 0$, la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ es negativa, y $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (producto punto o producto escalar) también es negativo (figura 12.18*b*). Por último, cuando $\phi = 90º$, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ (figura 12.18*c*)

El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.

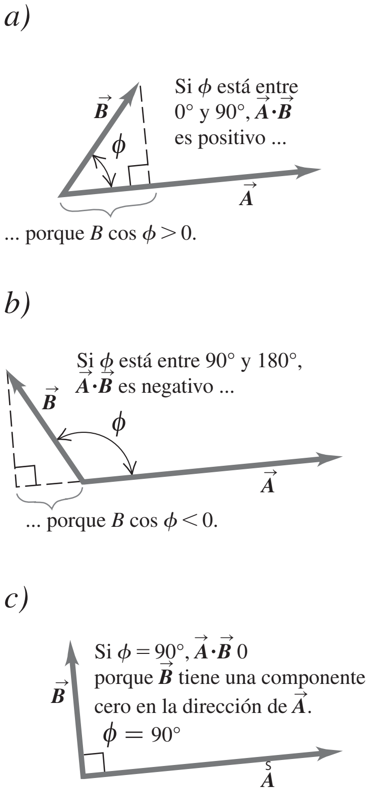
Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cualesquiera $AB\cos\phi = BA\cos\phi$. Esto significa que $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar obedece la ley conmutativa de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

Usaremos el producto escalar en el capítulo 6 para describir el trabajo realizado por una fuerza. Si una fuerza constante $\vec{F}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{s}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

El trabajo efectuado por la fuerza es positivo si el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ está entre 0° y 90°, negativo si el ángulo está entre 90° y 180°, y cero si $\vec{F}$ y $\vec{s}$ son perpendiculares. (Este es otro ejemplo de un término con significado especial en física; en el lenguaje cotidiano, “trabajo” no es algo que pueda ser positivo o negativo). En capítulos posteriores usaremos el producto escalar para varios fines, desde calcular potencial eléctrico hasta determinar el efecto de campos magnéticos variables sobre circuitos eléctricos.

12.18 El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Cálculo del producto escalar usando componentes

Podemos calcular el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para saber cómo se hace, obtenemos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, pues $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} &= (1)\,(1)\cos 0° = 1 \\ \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} &= (1)\,(1)\cos 90° = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, realizamos el producto escalar entre estos vectores, así como entre los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} &= A_xB_x\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + A_xB_y\,\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + A_xB_z\,\hat{\imath}\cdot\hat{k} \\ &\quad + A_yB_x\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + A_yB_y\,\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + A_yB_z\,\hat{\jmath}\cdot\hat{k} \\ &\quad + A_zB_x\,\hat{k}\cdot\hat{\imath} + A_zB_y\,\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + A_zB_z\,\hat{k}\cdot\hat{k} \end{aligned}$$

Por las ecuaciones (1.19), vemos que seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan simplemente dan

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \text{(producto escalar (punto) en términos de sus componentes)} \tag{1.21}$$

Por lo tanto, *el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes*.

El producto escalar permite calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera cuyas componentes conocemos. En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con la ecuación (1.21). El ejemplo 7 de la siguiente página muestra cómo hacer esto.

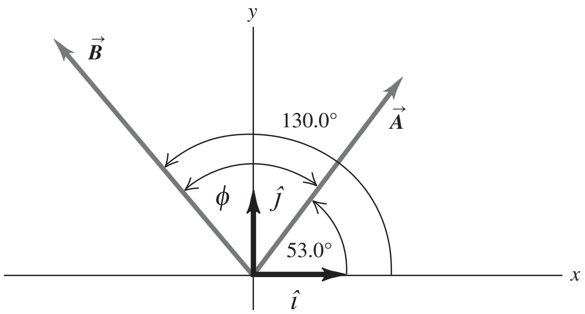
EJEMPLO 6 Cálculo de un producto escalar

Obtenga el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ de los dos vectores de la figura 12.19. Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

Solución:

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos calcular el producto escalar de dos formas: usando las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos (ecuación 1.18); o usando las componentes de los vectores (ecuación 1.21). Lo haremos de las dos formas, y los resultados se verificarán uno con otro.

12.19 Dos vectores en dos dimensiones.



EJECUTAR: El ángulo entre los dos vectores es ϕ = 130.0° – 53.0° = 77.0°, así que la ecuación (1.18) nos da

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi = (4.00)(5.00) \cos 77.0$$

Para usar la ecuación (1.21) necesitamos calcular primero las componentes de los vectores. Los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje +*x*, medidos hacia el eje +*y*, de modo que podemos usar las ecuaciones (1.6):

$$A_x = (4.00) \cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00) \text{ sen } 53.0° = 3.195$$
$$B_x = (5.00) \cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00) \text{ sen } 130.0° = 3.830$$

Como en el ejemplo 3, dejamos una cifra significativa de más en las componentes y redondearemos al final. La ecuación (1.21) ahora nos da

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= (2.407)\,(-3.214) + (3.195)\,(3.830) + (0)\,(0) = 4.50\end{aligned}$$

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado, como debe de ser.

EJEMPLO 7 Cálculo de un ángulo con el producto escalar

Determine el ángulo entre los vectores

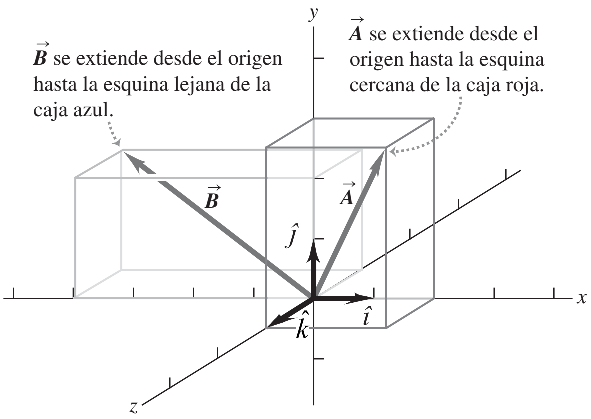
$$\vec{A} = 2.00\,\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath} + 1.00\,\hat{k} \text{ y}$$

$$\vec{B} = -400\ \hat{\imath} + 2.00\,\hat{\jmath} - 1.00\,\hat{k}$$

Solución:

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos dan las componentes *x*, *y* y *z* de dos vectores. Nuestra incógnita es el ángulo ϕ entre ellos (figura 12.20). Para calcular esto, resolvemos la ecuación (1.18), $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$ despejando ϕ en términos del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y las magnitudes *A* y *B*. Podemos evaluar el producto escalar usando la ecuación (1.21),

12.20 Dos vectores en tres dimensiones.



$\vec{B}$ se extiende desde el origen hasta la esquina lejana de la caja azul.

$\vec{A}$ se extiende desde el origen hasta la esquina cercana de la caja roja.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ y obtenemos los valores de *A* y *B* usando la ecuación (1.7)

EJECUTAR: Resolvemos la ecuación (1.18) para despejar coseno de ϕ y escribimos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ usando la ecuación (1.21). El resultado es

$$\cos \phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

Se puede utilizar esta fórmula para encontrar el ángulo *entre* dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera. En nuestro ejemplo, tenemos que $A_x = 2.00$, $A_y = 3.00$, y $A_z = 1.00$ y $B_x = -4.00$, $B_y = 2.00$ y $B_z = -1.00$. Por lo tanto,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_x B_x + A_z B_z$$

$$= (2.00)\,(-4.00) + (3.00)(2.00) + (1.00)\,(-1.00)$$

$$= -3.00$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.00)^2 + (3.00)^2 + (1.00)^2}$$

$$= \sqrt{14.00}$$

$$= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (2.00)^2 + (-1.00)^2}$$

$$= \sqrt{21.00}$$

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3.00}{\sqrt{14.00}\sqrt{21.00}} = -0.175$$

$$\phi = 100^{\circ}$$

EVALUAR: Para verificar el resultado, observe que el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es negativo, lo cual significa que ϕ está entre 90° y 180° (véase la figura 12.18), que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A}\times\vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es un vector en sí mismo.

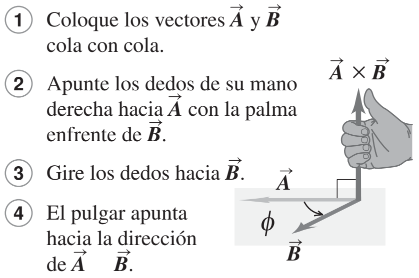
Para definir el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$, dibujamos de nuevo los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y con sus colas en el mismo punto (figura 12.21*a*). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una cantidad vectorial con dirección perpendicular a este plano (es decir, perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$ y una magnitud igual a AB sen ϕ. Esto es, si $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$, entonces,

$$C = AB \text{ sen } \phi \text{ (magnitud del producto vectorial (cruz) de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}) \qquad (1.22)$$

Medimos el ángulo ϕ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, de manera que ϕ está entre 0° y 180°. Por lo tanto, sen $\phi \geq 0$ y C en la ecuación (1.22) nunca es negativo, como corresponde a una magnitud vectorial. Observe también que cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos, ϕ = 0° o 180°, y C = 0. Es decir, *el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es cero. En particular, el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.*

12.21 *a)* El producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ determinado por la regla de la mano derecha.
b) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.

a) Uso de la regla de la mano derecha para obtener la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$



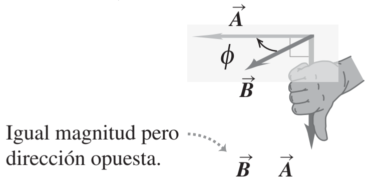
① Coloque los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cola con cola.

② Apunte los dedos de su mano derecha hacia $\vec{A}$ con la palma enfrente de $\vec{B}$.

③ Gire los dedos hacia $\vec{B}$.

④ El pulgar apunta hacia la dirección de $\vec{A}$ $\vec{B}$.

b) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$ (el producto vectorial es anticonmutativo)



Igual magnitud pero dirección opuesta.

CUIDADO: Producto vectorial contra producto escalar Tenga cuidado de no confundir la expresión AB sen ϕ de la magnitud del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ con la expresión similar AB cos ϕ del producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Para ver la diferencia entre estas dos expresiones, suponga que variamos el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la vez que mantenemos constantes sus magnitudes. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud del producto vectorial será cero y el producto escalar será el máximo. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud del producto vectorial será la máxima y el producto escalar será cero.

Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado del plano. Elegimos cuál de estas es la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$ como sigue. Imagine que hace girar el vector $\vec{A}$ alrededor de la línea perpendicular hasta alinearlo con $\vec{B}$, eligiendo el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Gire los dedos de su mano derecha alrededor de la perpendicular, con las puntas de los dedos señalando en la dirección de la rotación; entonces, el pulgar señalará la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$. Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 12.21*a* y describe una segunda manera de visualizar esta regla.

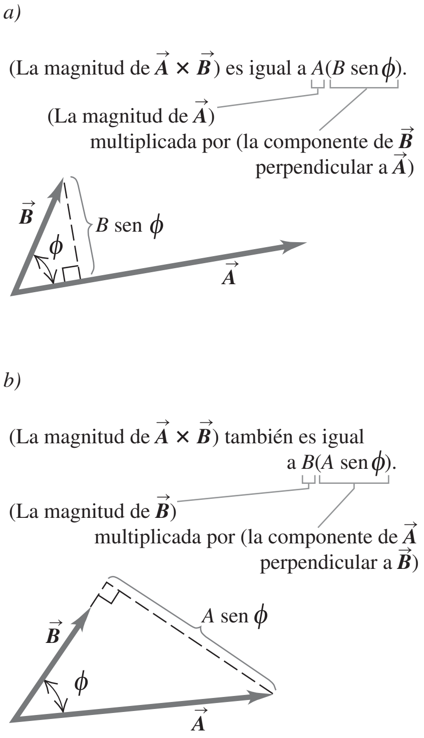
De manera análoga, determinamos la dirección de $\vec{B}\times\vec{A}$ girando $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$ como en la figura 12.21*b*. El resultado es un vector *opuesto* al vector $\vec{A}\times\vec{B}$. !El producto vectorial *no* es conmutativo! De hecho, para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera.

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \qquad (1.23)$$

Como hicimos con el producto escalar, podemos interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial. En la figura 12.22*a*, B sen ϕ es la componente del vector $\vec{B}$ que es *perpendicular* a la dirección del vector $\vec{A}$. Por la ecuación (1.22), la magnitud

$\vec{A}\times\vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$ La figura 12.22*b* muestra que la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ también es igual a la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ *perpendicular* a $\vec{B}$. Observe que la figura 12.22 ilustra el caso en que ϕ está entre 0° y 90°; usted debería dibujar un diagrama similar para ϕ entre 90° y 180°, con la finalidad de comprobar que es válida la misma interpretación geométrica de la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$.

12.22 Cálculo de la magnitud AB sen ϕ del producto de dos vectores, $\vec{A}\times\vec{B}$.



Cálculo del producto vectorial usando componentes

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y podemos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ los cuales son mutuamente perpendiculares (figura 12.23*a*). El producto vectorial de cualquier vector consigo mismo es cero, así que

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=\mathbf{0}$$

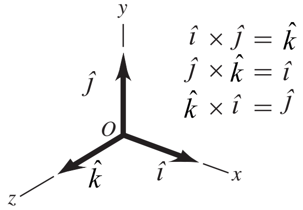
El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida. Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), y la regla de la mano derecha, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{\imath}\times\hat{\jmath}&=-\hat{\jmath}\times\hat{\imath}=\hat{k}\\ \hat{\jmath}\times\hat{k}&=-\hat{k}\times\hat{\jmath}=\hat{\imath}\\ \hat{k}\times\hat{\imath}&=-\hat{\imath}\times\hat{k}=\hat{\jmath}\end{aligned}\qquad(1.24)$$

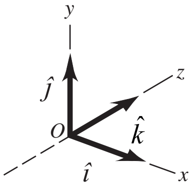
Podrá verificar estas ecuaciones observando la figura 12.23*a*.

12.23 *a)* Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas de mano derecha, como este.
b) Nunca usaremos un sistema de coordenadas de mano izquierda (donde $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=-\hat{k}$, etcétera).

a) Sistema de coordenadas de mano derecha:



b) Sistema de coordenadas de mano izquierda; no lo usaremos aquí.



Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y ampliamos la expresión del producto vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k})\\ &=A_x\hat{\imath}\times B_x\hat{\imath}+A_x\hat{\imath}\times B_y\hat{\jmath}+A_x\hat{\imath}\times B_z\hat{k}\\ &\quad+A_y\hat{\jmath}\times B_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}\times B_y\hat{\jmath}+A_y\hat{\jmath}\times B_z\hat{k}\\ &\quad+A_z\hat{k}\times B_x\hat{\imath}+A_z\hat{k}\times B_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}\times B_z\hat{k}\end{aligned}\qquad(1.25)$$

También podemos rescribir los términos individuales en la ecuación (1.25) como $A_x\hat{\imath}\times B_y\hat{\jmath}=(A_xB_y)\,\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$, etcétera. Evaluamos esto usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios en las ecuaciones (1.24) y luego agrupamos términos para obtener

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\imath}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\jmath}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}\qquad(1.26)$$

Por lo tanto, las componentes de $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ están dadas por

$$C_x=A_yB_z-A_zB_y\qquad C_y=A_zB_x-A_xB_z\qquad C_z=A_xB_y-A_yB_x$$

$$(\text{componentes de } \vec{C}=\vec{A}\times\vec{B})\qquad(1.27)$$

El producto vectorial también puede expresarse en forma determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

Si usted no está familiarizado con determinantes, omita el estudio de esta forma.

Si invertimos la dirección del eje z en el sistema de ejes de la figura 12.23*a*, obtenemos el sistema de la figura 12.23*b*. Aquí, como podrá comprobar el lector, la definición del producto vectorial da $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=-\hat{k}$ en vez de $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$. De hecho, todos los productos vectoriales de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tendrían signos opuestos a los de las ecuaciones (1.24). Vemos que hay dos tipos de sistemas de coordenadas, que difieren en los signos de los productos vectoriales de los vectores unitarios. En un sistema de ejes en el cual $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, como en la figura 12.23*a*, se conoce como **sistema de mano derecha**. Lo usual es utilizar *solo* sistemas de mano derecha, algo que haremos a lo largo de este libro.

EJEMPLO 8 Cálculo de un producto vectorial

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $+x$. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje $+x$ (figura 12.24). Calcule el producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

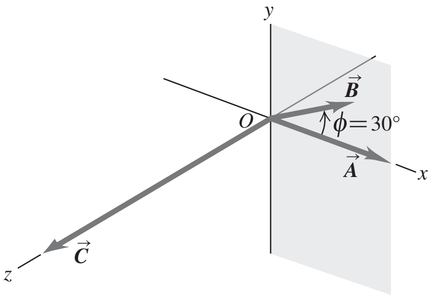
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Obtendremos el producto vectorial de dos maneras, lo cual nos ayudará a hacer la verificación de nuestro resultado. Primero usaremos la ecuación (1.22) y la regla de la mano derecha; luego, usaremos las ecuaciones (1.27) para obtener el producto vectorial usando las componentes.

EJECUTAR: Por la ecuación (1.22), la magnitud del producto vectorial es

$$A\,B\ \text{sen}\ \phi = (6)\ (4)\ (\text{sen}\ 30º) = 12$$

12.24 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$ (la dirección del vector unitario $\hat{k}$), por lo tanto, $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = 12\,\hat{k}$.

Para usar las ecuaciones (1.27), primero determinamos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$

$$B_x = 4\cos 30º = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4\ \text{sen}\ 30º = 2 \qquad B_z = 0$$

Luego, las ecuaciones (1.27) nos dan

$$C_x = (0)\ (0) - (0)\ (2) = 0$$

$$C_y = (0)\ (2\sqrt{3}) - (6)\ (0) = 0$$

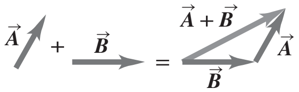
$$C_z = (6)\ (2) - (0)\ (2\sqrt{3}) = 12$$

Nuevamente tenemos que $\vec{C} = 12\hat{k}$.

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado. Dependiendo de la situación, uno u otro enfoque será más conveniente.

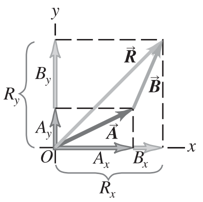
Resumen

Escalares, vectores y suma de vectores: Las cantidades escalares son números y se combinan mediante las reglas habituales de la aritmética. Las cantidades vectoriales tienen tanto dirección como magnitud, y se combinan según las reglas de la suma vectorial. El negativo de un vector tiene la misma magnitud que este pero apunta en la dirección opuesta. (Véase el ejemplo 1).



Componentes de vectores y suma de vectores: La suma vectorial puede efectuarse con las componentes de los vectores. La componente *x* de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la suma de las componentes *x* de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y las componentes y y z se obtienen de forma análoga. (Véase los ejemplos 2 al 4).

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \\ R_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$



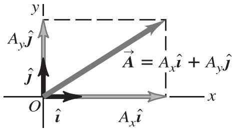
(1.10)

Vectores unitarios: Los vectores unitarios señalan direcciones en el espacio y tienen magnitud 1, sin unidades.

Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ alineados con los ejes *x*, y y *z* de un sistema de coordenadas rectangular, tienen especial utilidad. (Véase el ejemplo 5).

$$\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

(1.16)

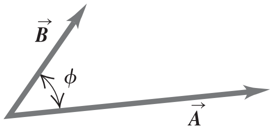


Producto escalar: El producto escalar $\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar. Se puede expresar en términos de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo ϕ que forman, o bien, en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar es conmutativo; $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. (Véase los ejemplos 6 y 7).

$$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = AB\cos\phi = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\cos\phi \qquad (1.18)$$

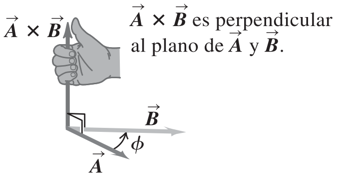
$$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.21)$$

Producto escalar $\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = AB\cos\phi$



Producto vectorial: El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$ cuya magnitud depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ así como del ángulo ϕ entre los dos vectores. La dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$ es perpendicular al plano de los dos vectores multiplicados, según la regla de la mano derecha. Las componentes de $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ se pueden expresar en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial no es conmutativo; $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es cero. (Véase el ejemplo 8).

$$\begin{aligned} & C = AB\,\mathrm{sen}\,\phi \\ (1.22)\qquad & C_x = A_yB_z - A_zB_y \\ (1.27)\qquad & C_y = A_zB_x - A_xB_z \\ & C_z = A_xB_y - A_yB_x \end{aligned}$$



(Magnitud de $\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}$) = AB sen ϕ

EXPLORE Y AMPLÍE Vectores en el techo

Una unidad de aire acondicionado está sujeta a un techo inclinado a un ángulo de 35° en relación con la horizontal (figura 12.25). Su peso actúa como una fuerza sobre la unidad en dirección vertical hacia abajo. Con el propósito de que la unidad no aplaste las baldosas del tejado, la componente del peso perpendicular al techo no debe ser mayor de 425 N (un Newton, o 1 N, es la unidad de fuerza en el sistema SI, y es igual a 0.2248 lb). *a*) ¿Cuál es el peso máximo permitido de la unidad? *b*) Si los sujetadores fallan, la unidad se deslizará 1.50 m a lo largo del techo antes de que se detenga contra la cornisa. ¿Qué cantidad de trabajo hace la fuerza del peso sobre la unidad durante el deslizamiento si la unidad tiene el peso calculado en el inciso a)?

Como se describió en la sección 1.10, el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre un objeto que experimenta un desplazamiento $\vec{s}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema implica vectores y sus componentes. ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Qué aspecto(s) del vector peso (magnitud, dirección y/o determinadas componentes) representa la incógnita del inciso *a*)? ¿Qué aspectos debe conocer para resolver el inciso *b*)?

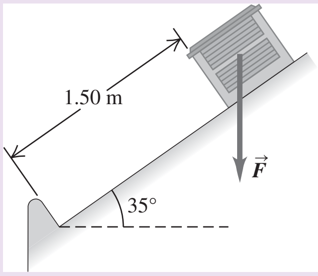
2. Elabore un dibujo con base en la figura 12.25. Agregue los ejes *x* y *y* eligiendo la dirección positiva de cada uno. Sus ejes no tienen que ser horizontal y vertical, pero tienen que ser perpendiculares entre sí. Elija la opción más conveniente.

3. Elija las ecuaciones que utilizará para determinar las incógnitas.

EJECUTAR

4. Use la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes para despejar la incógnita del inciso *a*). Tenga cuidado: ¿El ángulo de 35° es el adecuado para usarlo en la ecuación?
(*Sugerencia*: Revise su dibujo).

12.25 Unidad de aire acondicionado sobre un techo inclinado.



5. Asegúrese de que su respuesta tenga el número correcto de cifras significativas.

6. Use la definición de producto escalar para despejar la incógnita en el inciso *b*). Una vez más, asegúrese de usar el número correcto de cifras significativas.

EVALUAR

7. ¿Su respuesta del inciso *a*) incluye una componente cuyo valor absoluto es mayor que la magnitud del vector? ¿Es esto razonable?

8. Hay dos maneras de obtener el producto escalar de dos vectores, una de las cuales se usó para resolver el inciso *b*). Verifique su respuesta realizando el cálculo de la otra manera. ¿Se obtiene la misma respuesta?

Este libro proporciona los fundamentos matemáticos necesarios para que los estudiantes desarrollen sus habilidades de cálculo con variables, a través de la resolución de múltiples problemas.

Se utiliza un enfoque único que conjuga rigor matemático y accesibilidad, por medio de planteamientos intuitivos.

El número de ejemplos y ejercicios, así como los variados problemas ligados con aplicaciones reales, resultan muy útiles y motivadores para los estudiantes.

www.pearsonenespañol.com

ISBN: 978-612-4149-49-8